

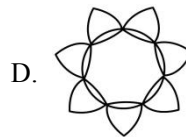
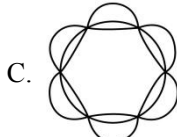
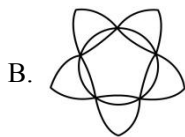
数学试卷

考生注意：

1. 考试时间 120 分钟；
2. 全卷共三道大题，总分 120 分；
3. 所有试题请在答题卡上作答，在试卷上答题无效.

一、单项选择题（本题 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 下列图形既是轴对称图形，又是中心对称图形的是（ ）



【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了中心对称图形与轴对称图形的概念，正确掌握中心对称图形与轴对称图形定义是解题关键. 中心对称图形的定义：把一个图形绕某一点旋转 180° ，如果旋转后的图形能与原来的图形重合，那么这个图形就叫做中心对称图形；轴对称图形的定义：如果一个图形沿着一条直线对折后两部分完全重合，这样的图形叫做轴对称图形. 根据定义依次对各个选项进行判断即可.

【详解】A、是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项不符合题意；

B、是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项不符合题意；

C、是轴对称图形，是中心对称图形，故此选项符合题意；

D、是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项不符合题意；

故选：C.

2. 下列计算正确的是（ ）

A. $2a^3 \cdot a^2 = 2a^6$

B. $(-2a)^3 \div b \times \frac{1}{b} = -8a^3$

C. $(a^3 + a^2 + a) \div a = a^2 + a$

D. $3a^{-2} = \frac{3}{a^2}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了单项式的乘除法，多项式除以单项式，负整数指数幂，根据运算法则进行逐项计算，即可作答.

【详解】解：A、 $2a^3 \cdot a^2 = 2a^5$ ，故该选项是错误的；

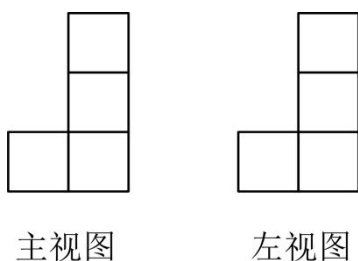
B、 $(-2a)^3 \div b \times \frac{1}{b} = -\frac{8a^3}{b^2}$ ，故该选项是错误的；

C、 $(a^3 + a^2 + a) \div a = a^2 + a + 1$ ，故该选项是错误的；

D、 $3a^{-2} = \frac{3}{a^2}$ ，故该选项是正确的；

故选：D.

3. 由 5 个形状、大小完全相同的小正方体组合而成的几何体，其主视图和左视图如图所示，则搭建该几何体的方式有（ ）



A. 1 种

B. 2 种

C. 3 种

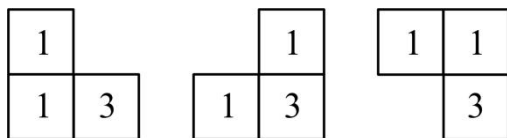
D. 4 种

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了三视图，解题的关键是理解三视图的定义。根据小正方体一共 5 个，以及主视图和左视图，画出俯视图即可。

【详解】解：由主视图可知，左侧一列最高一层，右侧一列最高三层，由左视图可知，前一排最高三层，后一排最高一层，可知右侧第一排一定为三层，可得该几何体俯视图如图所示，



故选：C.

4. 某校八年级 3 班承担下周学校升旗任务，老师从备选的甲、乙、丙、丁四名同学中，选择两名担任升旗手，则甲、乙两名同学同时被选中的概率是（ ）

A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{1}{8}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{2}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查画树状图或列表法求概率，列表适用于两个因素的问题，三个或三个以上因素的问题只

能用树状图. 根据列表法或者树状图分析出所有可能的结果, 然后根据概率公式求出结果即可.

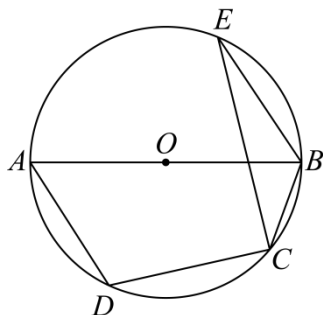
【详解】解: 列表如下:

	甲	乙	丙	丁
甲		(甲, 乙)	(甲, 丙)	(甲, 丁)
乙	(乙, 甲)		(乙, 丙)	(乙, 丁)
丙	(丙, 甲)	(丙, 乙)		(丙, 丁)
丁	(丁, 甲)	(丁, 乙)	(丁, 丙)	

由列表可知, 共有 12 种等可能的结果, 其中甲、乙两名同学同时被选中的情况有 2 种, 则甲、乙两名同学同时被选中的概率是 $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

故选: A.

5. 如图, 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形, AB 是 $\odot O$ 的直径, 若 $\angle BEC = 20^\circ$, 则 $\angle ADC$ 的度数为 ()



A. 100°

B. 110°

C. 120°

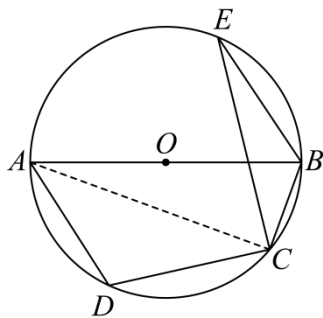
D. 130°

【答案】B

【解析】

【分析】此题考查了圆周角定理、圆内接四边形的性质, 连接 AC , 由 AB 是 $\odot O$ 的直径得到 $\angle ACB = 90^\circ$, 根据圆周角定理得到 $\angle CAB = \angle BEC = 20^\circ$, 得到 $\angle ABC = 90^\circ - \angle BAC = 70^\circ$, 再由圆内接四边形对角互补得到答案.

【详解】解: 如图, 连接 AC ,



$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$,

$\because \angle BEC = 20^\circ$,

$\therefore \angle CAB = \angle BEC = 20^\circ$

$\therefore \angle ABC = 90^\circ - \angle BAC = 70^\circ$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形,

$\therefore \angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 110^\circ$,

故选: B

6. 一种药品原价每盒 48 元, 经过两次降价后每盒 27 元, 两次降价的百分率相同, 则每次降价的百分率为 ()

A. 20%

B. 22%

C. 25%

D. 28%

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程的实际应用, 设每次降价的百分率为 x , 根据原价每盒 48 元, 经过两次降价后每盒 27 元, 列出方程进行求解即可.

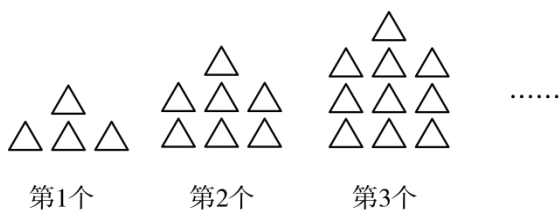
【详解】解: 设每次降价的百分率为 x , 由题意, 得:

$$48(1-x)^2 = 27,$$

$$\text{解得: } x_1 = \frac{1}{4} = 25\%, x_2 = \frac{7}{4} \text{ (舍去);}$$

故选 C.

7. 如图是由一些同样大小的三角形按照一定规律所组成的图形, 第 1 个图有 4 个三角形. 第 2 个图有 7 个三角形, 第 3 个图有 10 个三角形.....按照此规律排列下去, 第 674 个图中三角形的个数是 ()



A. 2022

B. 2023

C. 2024

D. 2025

【答案】B

【解析】

【分析】此题考查了图形的变化规律，解题的关键是根据图形的排列，归纳出图形的变化规律．根据前几个图形的变化发现规律，可用含 n 的代数式表示出第 n 个图形中三角形的个数，从而可求第 674 个图形中三角形的个数．

【详解】解：第 1 个图案有 4 个三角形，即 $4 = 3 \times 1 + 1$ ，

第 2 个图案有 7 个三角形，即 $7 = 3 \times 2 + 1$ ，

第 3 个图案有 10 个三角形，即 $10 = 3 \times 3 + 1$ ，

....，

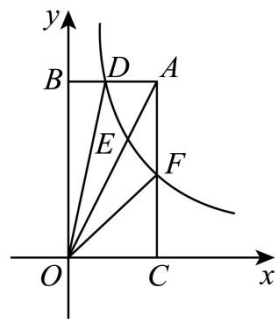
按此规律摆下去，第 n 个图案有 $(3n+1)$ 个三角形，

则第 674 个图案中三角形的个数为： $3 \times 674 + 1 = 2023$ （个）．

故选：B．

8. 矩形 $OBAC$ 在平面直角坐标系中的位置如图所示，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象与 AB 边交于点 D ，与 AC

边交于点 F ，与 OA 交于点 E ， $OE = 2AE$ ，若四边形 $ODAF$ 的面积为 2，则 k 的值是（ ）

A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{8}{5}$

【答案】D

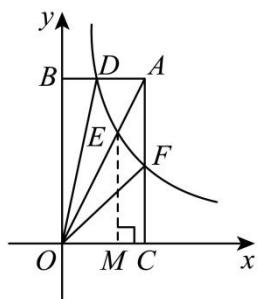
【解析】

【分析】本题考查了矩形的性质、三角形面积的计算、反比例函数的图象和性质、相似三角形的判定和性质；熟练掌握矩形的性质和反比例函数的性质是解决问题的关键．

过点 E 作 $EM \perp OC$ ，则 $EM \parallel AC$ ，设 $E\left(a, \frac{k}{a}\right)$ ，由 $\triangle OME \sim \triangle OCA$ ，可得 $OC = \frac{3}{2}a$ ， $AC = \frac{3}{2} \cdot \frac{k}{a}$ ，再

由 $S_{\text{矩形}OBAC} = S_{\triangle OBD} + S_{\triangle OCF} + S_{\text{四边形}ODAF}$ ，列方程，即可得出 k 的值．

【详解】过点 E 作 $EM \perp OC$ ，则 $EM \parallel AC$ ，



$$\therefore \triangle OME \sim \triangle OCA,$$

$$\therefore \frac{OM}{OC} = \frac{EM}{AC} = \frac{OE}{OA}$$

$$\text{设 } E\left(a, \frac{k}{a}\right),$$

$$\because OE = 2AE$$

$$\therefore \frac{OM}{OC} = \frac{EM}{AC} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore OC = \frac{3}{2}a, AC = \frac{3}{2} \cdot \frac{k}{a}$$

$$\therefore S_{\text{矩形}OBAC} = S_{\triangle OBD} + S_{\triangle OCF} + S_{\text{四边形}ODAF} = \frac{3}{2}a \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{k}{a}$$

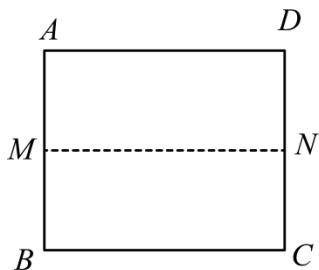
$$\text{即 } \frac{k}{2} + \frac{k}{2} + 2 = \frac{3}{2}a \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{k}{a}, \text{ 解得: } k = \frac{8}{5}$$

故选 D

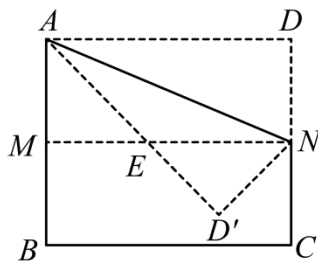
9. 小明同学手中有一张矩形纸片 $ABCD$ ， $AD = 12\text{cm}$ ， $CD = 10\text{cm}$ ，他进行了如下操作：

第一步，如图①，将矩形纸片对折，使 AD 与 BC 重合，得到折痕 MN ，将纸片展平。

第二步，如图②，再一次折叠纸片，把 $\triangle ADN$ 沿 AN 折叠得到 $\triangle AD'N$ ， AD' 交折痕 MN 于点 E ，则线段 EN 的长为（ ）



图①



图②

- A. 8cm B. $\frac{169}{24}\text{cm}$ C. $\frac{167}{24}\text{cm}$ D. $\frac{55}{8}\text{cm}$

【答案】B

【解析】

【分析】 本题考查了矩形与折叠问题，熟练掌握矩形的性质，折叠的性质，勾股定理是解题的关键.

根据矩形的性质和折叠的性质推出 $\angle ANM = \angle D'AN$ ，进而得出 $EA = AN$ ，设 $EA = AN = x\text{cm}$ ，则 $EM = (12 - x)\text{cm}$ ，根据勾股定理可得： $AM^2 + ME^2 = AE^2$ ，列出方程求解即可.

【详解】 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore AB = CD = 10\text{cm},$$

由折叠可得： $AM = \frac{1}{2}AB = 5\text{cm}$ ， $AD = AD' = 12\text{cm}$ ， $MN \perp AB$ ， $\angle DAN = \angle D'AN$ ，

$\therefore$ 四边形 $AMND$ 是矩形，

$$\therefore MN \parallel AD, MN = AD = 12\text{cm},$$

$$\therefore \angle DAN = \angle ANM,$$

$$\therefore \angle ANM = \angle D'AN,$$

$$\therefore EA = EN,$$

设 $EA = EN = x\text{cm}$ ，则 $EM = (12 - x)\text{cm}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AME$ 中，根据勾股定理可得： $AM^2 + ME^2 = AE^2$ ，

$$\text{即 } 5^2 + (12 - x)^2 = x^2,$$

$$\text{解得： } x = \frac{169}{24},$$

$$\text{即 } EN = \frac{169}{24}\text{cm},$$

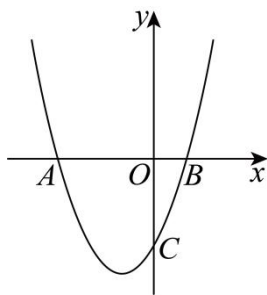
故选：B.

10. 在平面直角坐标系中，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于 A 、 B 两点， $A(-3, 0)$ ， $B(1, 0)$ ，与 y

轴交点 C 的纵坐标在 $-3 \sim -2$ 之间，根据图象判断以下结论：① $abc^2 > 0$ ；② $\frac{4}{3} < b < 2$ ；③若

$ax_1^2 - bx_1 = ax_2^2 - bx_2$ 且 $x_1 \neq x_2$ ，则 $x_1 + x_2 = -2$ ；④直线 $y = -\frac{5}{6}cx + c$ 与抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的一个

交点 (m, n) ($m \neq 0$)，则 $m = \frac{1}{2}$. 其中正确的结论是 ()



A. ①②④

B. ①③④

C. ①②③

D. ①②③④

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查二次函数的图象和性质，二次函数和一元二次方程的关系，掌握二次函数和一元二次方程的关系是解题的关键，

根据题意得到抛物线的解析式为 $y = ax^2 + 2ax - 3a$ ，即可得到 $b = 2a$ ， $c = -3a$ ，代入即可判断①；根据 $-3 < -3a < -2$ 判断②；把 $b = 2a$ 代入 $ax_1^2 - bx_1 = ax_2^2 - bx_2$ ，然后利用因式分解法解方程即可判断③；然后把 $b = 2a$ ， $c = -3a$ 代入解方程求出 m 的值判断④.

【详解】解：设抛物线的解析式为： $y = a(x+3)(x-1) = ax^2 + 2ax - 3a$ ，

$$\therefore b = 2a, \quad c = -3a,$$

$$\therefore abc^2 = a \cdot 2a \cdot (-3a)^2 = 18a^4 > 0, \text{ 故①正确;}$$

$\therefore$ 点 C 的纵坐标在 $-3 \sim -2$ 之间，

$$\therefore -3 < -3a < -2, \text{ 即 } \frac{4}{3} < 2a < 2,$$

$$\therefore \frac{4}{3} < b < 2, \text{ 故②正确;}$$

$$\therefore ax_1^2 - bx_1 = ax_2^2 - bx_2,$$

$$\therefore ax_1^2 - 2ax_1 = ax_2^2 - 2ax_2, \text{ 即 } x_1^2 - 2x_1 - x_2^2 + 2x_2 = 0,$$

$$\therefore (x_1 + x_2 - 2)(x_1 - x_2) = 0,$$

又 $\because x_1 \neq x_2$,

$$\therefore x_1 + x_2 = 2, \text{ 故③错误;}$$

$$\therefore \text{令 } y \text{ 相等, 则 } -\frac{5}{6}cx + c = ax^2 + bx + c$$

$$\therefore \frac{5}{2}ax - 3a = ax^2 + 2ax - 3a, \text{ 解得 } x_1 = 0 \text{ (舍)}, \quad x_1 = \frac{1}{2},$$

$\therefore m = \frac{1}{2}$, 故④正确;

故选 A.

二、填空题 (本题 8 个小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

11. 函数 $y = \frac{\sqrt{x+3}}{x}$ 中, 自变量 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq -3$ 且 $x \neq 0$

【解析】

【分析】 根据二次根式的性质和分式的意义, 被开方数大于等于 0, 分母不等于 0 列不等式组求解.

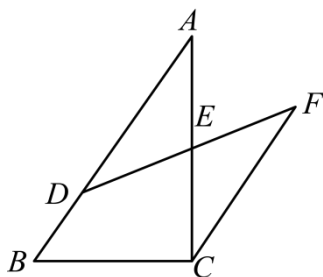
【详解】 解: 根据题意得: $x+3 \geq 0$ 且 $x \neq 0$,

解得 $x \geq -3$ 且 $x \neq 0$.

故答案为: $x \geq -3$ 且 $x \neq 0$.

【点睛】 本题考查了函数自变量的取值范围. 考查的知识点为: 分式有意义, 分母不为 0, 二次根式有意义, 被开方数是非负数.

12. 如图, $\triangle ABC$ 中, D 是 AB 上一点, $CF \parallel AB$, D 、 E 、 F 三点共线, 请添加一个条件_____, 使得 $AE = CE$. (只添一种情况即可)



【答案】 $DE = EF$ 或 $AD = CF$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】 本题考查全等三角形的判定和性质, 解答本题的关键是明确题意, 利用全等三角形的判定解答. 根据题目中的条件和全等三角形的判定, 可以写出添加的条件, 注意本题答案不唯一.

【详解】 解: $\because CF \parallel AB$

$\therefore \angle A = \angle ECF, \angle ADE = \angle CFE,$

$\therefore$ 添加条件 $DE = EF$, 可以使得 $\triangle ADE \cong \triangle CFE$ (AAS),

添加条件 $AD = CF$, 也可以使得 $\triangle ADE \cong \triangle CFE$ (ASA),

$\therefore AE = CE;$

故答案为: $DE = EF$ 或 $AD = CF$ (答案不唯一).

13. 将抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 向下平移 5 个单位长度后，经过点 $(-2, 4)$ ，则 $6a - 3b - 7 =$ _____.

【答案】2

【解析】

【分析】此题考查了二次函数的平移，根据平移规律得到函数解析式，把点的坐标代入得到 $2a - b = 3$ ，再整体代入变形后代数式即可.

【详解】解：抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 向下平移 5 个单位长度后得到 $y = ax^2 + bx + 3 - 5 = ax^2 + bx - 2$ ，

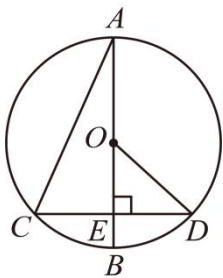
把点 $(-2, 4)$ 代入得到， $4 = a \times (-2)^2 - 2b - 2$ ，

得到 $2a - b = 3$ ，

$\therefore 6a - 3b - 7 = 3(2a - b) - 7 = 3 \times 3 - 7 = 2$ ，

故答案为：2

14. 如图，在 $\odot O$ 中，直径 $AB \perp CD$ 于点 E ， $CD = 6, BE = 1$ ，则弦 AC 的长为_____.



【答案】 $3\sqrt{10}$

【解析】

【分析】本题考查了垂径定理和勾股定理等知识，熟练掌握垂径定理，由勾股定理得出方程是解题的关键.

由垂径定理得 $CE = ED = \frac{1}{2}CD = 3$ ，设 $\odot O$ 的半径为 r ，则 $OE = OB - EB = r - 1$ ，在 $Rt\triangle OED$ 中，由勾股定理得出方程，求出 $r = 5$ ，即可得出 $AE = 9$ ，在 $Rt\triangle AEC$ 中，由勾股定理即可求解.

【详解】解： $\because AB \perp CD, CD = 6$ ，

$\therefore CE = ED = \frac{1}{2}CD = 3$ ，

设 $\odot O$ 的半径为 r ，则 $OE = OB - EB = r - 1$ ，

在 $Rt\triangle OED$ 中，由勾股定理得： $OE^2 + DE^2 = OD^2$ ，即 $(r - 1)^2 + 3^2 = r^2$ ，

解得： $r = 5$ ，

$\therefore OA = 5, OE = 4$ ，

$\therefore AE = OA + OE = 9$ ，

在 $Rt\triangle AEC$ 中，由勾股定理得： $AC = \sqrt{CE^2 + AE^2} = \sqrt{3^2 + 9^2} = 3\sqrt{10}$ ，

故答案为： $3\sqrt{10}$ 。

15. 已知一组正整数 $a, 1, b, b, 3$ 有唯一众数 8，中位数是 5，则这一组数据的平均数为_____。

【答案】 5

【解析】

【分析】 本题考查了众数、平均数和中位数的知识。根据众数、平均数和中位数的概念求解。

【详解】 解： $\because$ 这组数据有唯一众数 8，

$\therefore b$ 为 8，

$\therefore$ 中位数是 5，

$\therefore a$ 是 5，

$\therefore$ 这一组数据的平均数为 $\frac{1+3+5+8+8}{5} = 5$ ，

故答案为： 5。

16. 若分式方程 $\frac{x}{x-1} = 3 - \frac{mx}{1-x}$ 的解为正整数，则整数 m 的值为_____。

【答案】 -1

【解析】

【分析】 此题考查了分式方程的解，方程的解即为能使方程左右两边相等的未知数的值。

表示出方程的解，由解是正整数，确定出整数 m 的值即可。

【详解】 解： $\frac{x}{x-1} = 3 - \frac{mx}{1-x}$ ，

化简得： $\frac{x}{x-1} = 3 + \frac{mx}{x-1}$ ，

去分母得： $x = 3(x-1) + mx$ ，

移项合并得： $(2+m)x = 3$ ，

解得： $x = \frac{3}{2+m}$ ，

由方程的解是正整数，得到 x 为正整数，即 $2+m=1$ 或 $2+m=3$ ，

解得： $m=-1$ 或 $m=1$ （舍去，会使得分式无意义）。

故答案为： -1。

17. 矩形 $ABCD$ 的面积是 90，对角线 AC, BD 交于点 O ，点 E 是 BC 边的三等分点，连接 DE ，点 P 是 DE

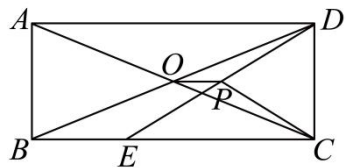
的中点， $OP = 3$ ，连接 CP ，则 $PC + PE$ 的值为_____.

【答案】13 或 $\sqrt{109}$

【解析】

【分析】本题考查了矩形的性质，三角形中位线定理，勾股定理. 当 $CE > BE$ 时，利用三角形中位线定理求得 $CE = 12$ ，再求得矩形的边长，利用勾股定理求得 DE 的长，再根据斜边中线的性质即可求解；当 $CE < BE$ 时，同理求解即可.

【详解】解：当 $CE > BE$ 时，如图，



$\because$ 矩形 $ABCD$,

$\therefore$ 点 O 是 BD 的中点,

$\because$ 点 P 是 DE 的中点,

$\therefore BE = 2OP = 6$, $CP = PE = PD$,

$\because$ 点 E 是 BC 边的三等分点,

$\therefore CE = 2BE = 12$, $BC = 3BE = 18$,

$\because$ 矩形 $ABCD$ 的面积是 90,

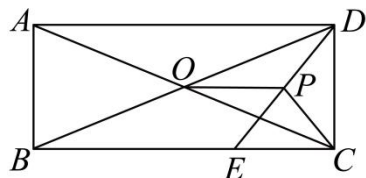
$\therefore BC \times CD = 90$,

$\therefore CD = 5$,

$\therefore DE = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$,

$\therefore PC + PE = DE = 13$;

当 $CE < BE$ 时，如图，



$\because$ 矩形 $ABCD$,

$\therefore$ 点 O 是 BD 的中点,

$\because$ 点 P 是 DE 的中点,

$\therefore BE = 2OP = 6$, $CP = PE = PD$,

∵ 点 E 是 BC 边的三等分点,

$$\therefore CE = \frac{1}{2}BE = 3, \quad BC = 3 + 6 = 9,$$

∵ 矩形 $ABCD$ 的面积是 90,

$$\therefore BC \times CD = 90,$$

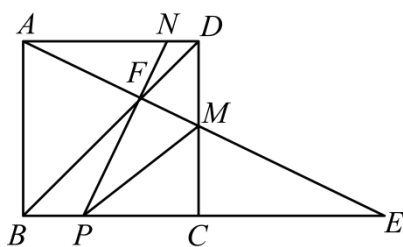
$$\therefore CD = 10,$$

$$\therefore DE = \sqrt{3^2 + 10^2} = \sqrt{109},$$

$$\therefore PC + PE = DE = \sqrt{109};$$

故答案为: 13 或 $\sqrt{109}$.

18. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, E 是 BC 延长线上一点, AE 分别交 BD 、 CD 于点 F 、 M , 过点 F 作 $NP \perp AE$, 分别交 AD 、 BC 于点 N 、 P , 连接 MP . 下列四个结论: ① $AM = PN$; ② $DM + DN = \sqrt{2}DF$; ③ 若 P 是 BC 中点, $AB = 3$, 则 $EM = 2\sqrt{10}$; ④ $BF \cdot NF = AF \cdot BP$; ⑤ 若 $PM \parallel BD$, 则 $CE = \sqrt{2}BC$. 其中正确的结论是_____.



【答案】①②③⑤

【解析】

【分析】如图 1, 作 $PG \perp AD$ 于 G , 则四边形 $ABPG$ 是矩形, 证明 $\triangle PGN \cong \triangle ADM$ (ASA), 则 $AM = PN$, 可判断①的正误; 如图 2, 作 $HF \perp DF$ 交 AD 于 H , 连接 CF , 证明 $\triangle ABF \cong \triangle CBF$ (SAS), 则 $AF = CF$, $\angle BAF = \angle BCF$, 由 $\angle BPF + \angle BAF = 360^\circ - \angle ABP - \angle AFP = 180^\circ$, $\angle BPF + \angle FPC = 180^\circ$, 可得 $\angle BAF = \angle FPC$, $PF = CF = AF$, $FN = FM$, 证明 $\triangle HFN \cong \triangle DFM$ (SAS), 则 $HN = DM$, 由勾股定理得, $DH = \sqrt{DF^2 + HF^2} = \sqrt{2}DF$, 由 $DH = HN + DN = DM + DN$, 可得 $DM + DN = \sqrt{2}DF$, 可判断②的正误; 如图 3, 连接 AP , 由勾股定理得, $AP = \sqrt{AB^2 + BP^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$,

$$AP = \sqrt{PF^2 + AF^2} = \sqrt{2}PF = \frac{3\sqrt{5}}{2}, \text{ 可求 } PF = \frac{3\sqrt{10}}{4}, \text{ 设 } EM = x, \text{ 则 } PE = \frac{3}{2} + x, \text{ 由勾}$$

股定理得, $AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{3^2 + (3+x)^2}$, 由 $\sin \angle E = \frac{PF}{PE} = \frac{AB}{AE}$, 可得 $\frac{\frac{3\sqrt{10}}{4}}{\frac{3}{2}+x} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + (3+x)^2}}$,

整理得, $x^2 - 2x - 24 = 0$, 可求满足要求的解为 $x = 6$, 则 $AE = 3\sqrt{10}$, $BE = 9$, 由 $\cos \angle E = \frac{CE}{EM} = \frac{BE}{AE}$,

可得 $\frac{6}{EM} = \frac{9}{3\sqrt{10}}$, 可求 $EM = 2\sqrt{10}$, 可判断③的正误; 由题意知, $\angle BPF > 90^\circ$, $\triangle BPF$ 、 $\triangle NFA$ 不相

似, $BF \cdot NF \neq AF \cdot BP$, 可判断④的正误; 由设 $PC = CM = a$, $BC = CD = AD = AB = b$, $CE = c$,

则 $DM = b - a$, $BE = b + c$, $PE = a + c$, $PM = \frac{PC}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}a$, 证明 $\triangle AFN \cong \triangle PFM$ (SAS), 则

$AN = PM = \sqrt{2}a$, 证明 $\triangle AMD \sim \triangle EDC$, 则 $\frac{AD}{CE} = \frac{DM}{CM}$, 即 $\frac{b}{c} = \frac{b-a}{a}$, 可求 $a = \frac{bc}{b+c}$, 同理,

$\triangle ANF \sim \triangle EPF$, 则 $\frac{AN}{PE} = \frac{FN}{PF}$, 即 $\frac{\sqrt{2}a}{a+c} = \frac{FN}{PF}$, 同理, $\triangle DMF \sim \triangle BAF$, 则 $\frac{DM}{AB} = \frac{FM}{AF} = \frac{FN}{PF}$, 即

$\frac{b-a}{b} = \frac{FN}{PF}$, 可得 $\frac{b-a}{b} = \frac{\sqrt{2}a}{a+c}$, 将 $a = \frac{bc}{b+c}$ 代入 $\frac{b-a}{b} = \frac{\sqrt{2}a}{a+c}$ 得, $\frac{b - \frac{bc}{b+c}}{b} = \frac{\sqrt{2} \frac{bc}{b+c}}{\frac{bc}{b+c} + c}$, 整理得,

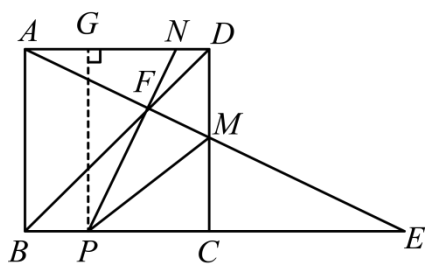
$\sqrt{2}b + \sqrt{2}c = 2b + c$, 可得, $\frac{c}{b} = \sqrt{2}$, 则 $CE = \sqrt{2}BC$, 可判断⑤的正误.

【详解】解: $\because$ 正方形 $ABCD$,

$\therefore \angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \angle DAB = 90^\circ$, $AB = BC = CD = AD$,

$\angle ADB = \angle ABD = \angle CBD = \angle CDB = 45^\circ$,

如图 1, 作 $PG \perp AD$ 于 G , 则四边形 $ABPG$ 是矩形,



$\therefore PG = AB = AD$,

$\therefore \angle GPN + \angle GNP = 90^\circ = \angle GNP + \angle DAM$,

$\therefore \angle GPN = \angle DAM$,

又 $\because PG = AD$, $\angle PGN = 90^\circ = \angle ADM$,

$\therefore \triangle PGN \cong \triangle ADM$ (ASA),

$\therefore AM = PN$, ①正确, 故符合要求;

如图 2, 作 $HF \perp DF$ 交 AD 于 H , 连接 CF ,

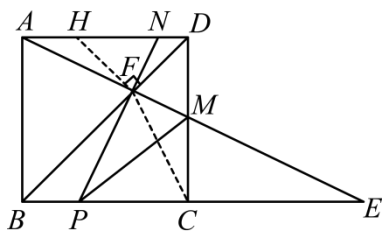


图2

$$\therefore \angle DHF = 45^\circ = \angle ADB,$$

$$\therefore DF = HF,$$

$$\because AB = BC, \quad \angle ABF = \angle CBF = 45^\circ, \quad BF = BF,$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CBF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore AF = CF, \quad \angle BAF = \angle BCF,$$

$$\because \angle BPF + \angle BAF = 360^\circ - \angle ABP - \angle AFP = 180^\circ, \quad \angle BPF + \angle FPC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BAF = \angle FPC.$$

$$\therefore \angle BCF = \angle FPC,$$

$$\therefore PF = CF = AF,$$

$$\therefore PN - PF = AM - AF, \text{ 即 } FN = FM,$$

$$\therefore \angle HFN + \angle NFD = 90^\circ = \angle DFM + \angle NFD,$$

$$\therefore \angle HFN = \angle DFM,$$

$$\because HF = DF, \quad \angle HFN = \angle DFM, \quad FN = FM,$$

$$\therefore \Delta HFN \cong_{\Delta} DFM \text{ (SAS)},$$

$$\therefore HN = DM \text{ ,}$$

由勾股定理得, $DH = \sqrt{DF^2 + HF^2} = \sqrt{2}DF$,

$$\therefore DH = HN + DN = DM + DN,$$

$\therefore DM + DN = \sqrt{2}DF$, ②正确, 故符合要求;

$\because P$ 是 BC 中点, $AB=3$,

$$\therefore BP = CP = \frac{3}{2},$$

如图 3, 连接 AP .

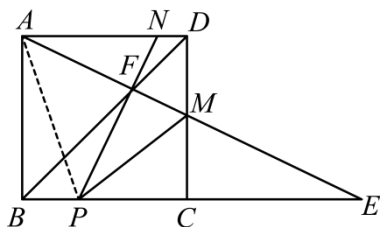


图3

由勾股定理得, $AP = \sqrt{AB^2 + BP^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$, $AP = \sqrt{PF^2 + AF^2} = \sqrt{2}PF = \frac{3\sqrt{5}}{2}$,

解得, $PF = \frac{3\sqrt{10}}{4}$,

设 $EM = x$, 则 $PE = \frac{3}{2} + x$, $BE = 3 + x$,

由勾股定理得, $AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{3^2 + (3+x)^2}$,

$\therefore \sin \angle E = \frac{PF}{PE} = \frac{AB}{AE}$,

$\frac{\frac{3\sqrt{10}}{4}}{\frac{3}{2} + x} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + (3+x)^2}}$, 整理得, $x^2 - 2x - 24 = 0$,

解得, $x = 6$ 或 $x = -4$ (舍去),

$\therefore AE = 3\sqrt{10}$, $BE = 9$,

$\therefore \cos \angle E = \frac{CE}{EM} = \frac{BE}{AE}$,

$\therefore \frac{6}{EM} = \frac{9}{3\sqrt{10}}$,

解得, $EM = 2\sqrt{10}$, ③正确, 故符合要求;

由题意知, $\angle BPF > 90^\circ$,

$\therefore \triangle BPF$ 、 $\triangle NFA$ 不相似, $BF \cdot NF \neq AF \cdot BP$, ④错误, 故不符合要求;

$\therefore PM \parallel BD$,

$\therefore \angle CPM = \angle CBD = 45^\circ$, $\angle CMP = \angle CDB = 45^\circ$,

设 $PC = CM = a$, $BC = CD = AD = AB = b$, $CE = c$, 则 $DM = b - a$, $BE = b + c$, $PE = a + c$,

$PM = \frac{PC}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}a$,

$\therefore AF = PF$, $\angle AFN = 90^\circ = \angle PFM$, $FN = FM$,

$\therefore \triangle AFN \cong \triangle PFM$ (SAS),

$$\therefore AN = PM = \sqrt{2}a,$$

$$\therefore \angle ADM = 90^\circ = \angle ECM, \quad \angle AMD = \angle EDC,$$

$$\therefore \triangle AMD \sim \triangle EDC,$$

$$\therefore \frac{AD}{CE} = \frac{DM}{CM}, \quad \text{即} \frac{b}{c} = \frac{b-a}{a},$$

$$\text{解得, } a = \frac{bc}{b+c},$$

$$\text{同理, } \triangle ANF \sim \triangle EPF,$$

$$\therefore \frac{AN}{PE} = \frac{FN}{PF}, \quad \text{即} \frac{\sqrt{2}a}{a+c} = \frac{FN}{PF},$$

$$\text{同理, } \triangle DMF \sim \triangle BAF,$$

$$\therefore \frac{DM}{AB} = \frac{FM}{AF} = \frac{FN}{PF}, \quad \text{即} \frac{b-a}{b} = \frac{FN}{PF},$$

$$\therefore \frac{b-a}{b} = \frac{\sqrt{2}a}{a+c},$$

$$\text{将 } a = \frac{bc}{b+c} \text{ 代入 } \frac{b-a}{b} = \frac{\sqrt{2}a}{a+c} \text{ 得, } \frac{b - \frac{bc}{b+c}}{b} = \frac{\sqrt{2} \frac{bc}{b+c}}{\frac{bc}{b+c} + c}, \text{ 整理得, } \sqrt{2}b + \sqrt{2}c = 2b + c,$$

$$\text{解得, } \frac{c}{b} = \sqrt{2},$$

$$\therefore CE = \sqrt{2}BC, \quad \text{⑤正确, 故符合要求;}$$

故答案为: ①②③⑤.

【点睛】本题考查了正方形的性质，全等三角形的判定与性质，等角对等边，勾股定理，正弦，余弦，相似三角形的判定与性质．熟练掌握正方形的性质，全等三角形的判定与性质，等角对等边，勾股定理，正弦，余弦，相似三角形的判定与性质是解题的关键．

三、解答题 (共 66 分)

19. 先化简，再求值： $\frac{2x-6}{x} \div \left(x - \frac{6x-9}{x}\right)$ ，并从 -1, 0, 1, 2, 3 中选一个合适的数代入求值．

【答案】 $\frac{2}{x-3}$ ，取 $x=-1$ ，原式 $= -\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】本题考查了分式的化简求值，熟练掌握分式的运算法则是解题关键．

先计算括号内的减法，再计算除法，然后根据分式有意义的条件选取合适的值代入计算即可得．

$$\begin{aligned}
 \text{【详解】解: } & \frac{2x-6}{x} \div \left(x - \frac{6x-9}{x} \right) \\
 &= \frac{2x-6}{x} \div \left(\frac{x^2}{x} - \frac{6x-9}{x} \right) \\
 &= \frac{2x-6}{x} \div \frac{x^2-6x+9}{x} \\
 &= \frac{2(x-3)}{x} \cdot \frac{x}{(x-3)^2} \\
 &= \frac{2}{x-3}.
 \end{aligned}$$

$\because x \neq 0$ 且 $x \neq 3$,

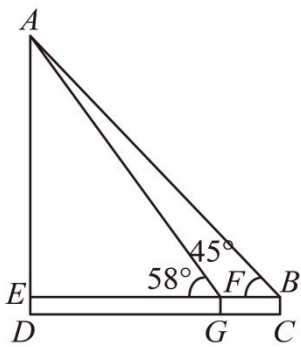
$\therefore x = -1$ 或 $x = 1$ 或 $x = 2$.

$$\text{当 } x = -1 \text{ 时, 原式} = \frac{2}{-1-3} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{或当 } x = 1 \text{ 时, 原式} = \frac{2}{1-3} = -1.$$

$$\text{或当 } x = 2 \text{ 时, 原式} = \frac{2}{2-3} = -2.$$

20. 如图, 某数学活动小组用高度为1.5米的测角仪 BC , 对垂直于地面 CD 的建筑物 AD 的高度进行测量, $BC \perp CD$ 于点 C . 在 B 处测得 A 的仰角 $\angle ABE = 45^\circ$, 然后将测角仪向建筑物方向水平移动 6 米至 FG 处, $FG \perp CD$ 于点 G , 测得 A 的仰角 $\angle AFE = 58^\circ$, BF 的延长线交 AD 于点 E , 求建筑物 AD 的高度 (结果保留小数点后一位). (参考数据: $\sin 58^\circ \approx 0.85, \cos 58^\circ \approx 0.53, \tan 58^\circ \approx 1.60$)



【答案】 17.5 米

【解析】

【分析】 本题主要考查了矩形的性质与判定, 解直角三角形的实际应用, 由题意可得四边形 $BEDC$ 是矩形, 则 $DE = BC = 1.5\text{m}$. 解直角三角形得到 $AE = BE, EF = \frac{AE}{\tan 58^\circ}$, 进而得到 $AE = 6 + \frac{AE}{\tan 58^\circ}$, 据此求出 AE 即可得到答案.

【详解】解：根据题意可知四边形 $BEDC$ 是矩形，

$$\therefore DE = BC = 1.5\text{m}.$$

如图， $\angle ABE = 45^\circ, \angle AFE = 58^\circ$.

$$\because \tan \angle ABE = \frac{AE}{BE}, \tan \angle AFE = \frac{AE}{EF},$$

$$\therefore AE = BE \cdot \tan 45^\circ = BE, EF = \frac{AE}{\tan 58^\circ}.$$

$$\because BE = EF + BF,$$

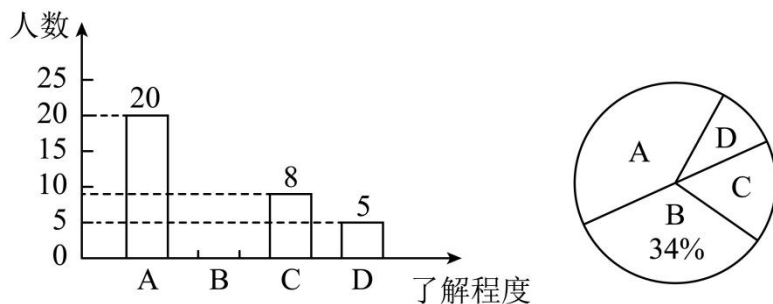
$$\therefore AE = 6 + \frac{AE}{\tan 58^\circ}$$

$$\therefore AE \approx 16.$$

$$\therefore AD = AE + DE = 17.5 \text{ (米)}$$

答：建筑物 AD 的高度约为 17.5 米.

21. 某校为掌握学生对垃圾分类的了解情况，在全校范围内抽取部分学生进行问卷调查，并将收集到的信息进行整理，绘制成如图所示不完整的统计图，其中 A 为“非常了解”， B 为“了解较多”， C 为“基本了解”， D 为“了解较少”. 请你根据图中提供的信息，解答下列问题：



- (1) 本次调查共抽取了_____名学生；
- (2) 补全条形统计图，并求出扇形统计图中“了解较少”所对应的圆心角度数；
- (3) 若全校共有 1200 名学生，请估计全校有多少名学生“非常了解”垃圾分类问题.

【答案】(1) 50 (2) 36° ，图形见详解

(3) 480 名

【解析】

【分析】本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用，读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键. 条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据；扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小.

- (1) 用 A 、 C 、 D 的总人数除以所占比例即可求解；
- (2) 先用 $360^\circ \times$ “了解较少”的占比，用总人数减去 A 、 C 、 D 的人数即可得 B 的人数，据此即可补全条形统计图；
- (3) 用样本估算总体即可。

【小问 1 详解】

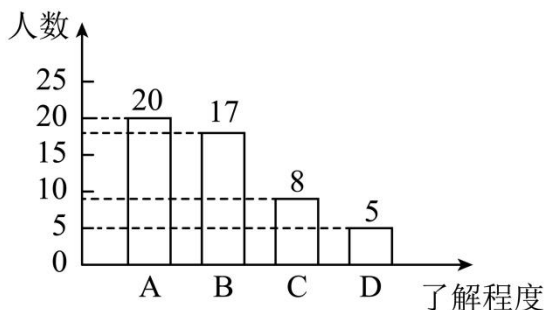
解：这次被调查的学生人数为： $(20+8+5) \div (1-34\%) = 50$ (名)；

【小问 2 详解】

“了解较少”所对应的圆心角度数为： $360^\circ \times \frac{5}{50} = 36^\circ$ ，

$$50 \times 34\% = 17 \text{ (人)}$$

补全图形如下：



【小问 3 详解】

$$1200 \times \frac{20}{50} = 480 \text{ (名)},$$

估计全校有多少名学生“非常了解”垃圾分类问题有 480 名。

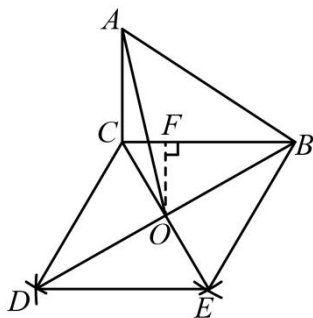
22. 在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $BC = 12$ ， $AC = 8$ ，以 BC 为边向 $\triangle ACB$ 外作有一个内角为 60° 的菱形 $BCDE$ ，对角线 BD ， CE 交于点 O ，连接 OA ，请用尺规和三角板作出图形，并直接写出 $\triangle AOC$ 的面积。

【答案】图形见解析， $\triangle AOC$ 的面积为 12 或 36。

【解析】

【分析】本题考查了菱形的性质，直角三角形的性质以及勾股定理。分两种情况讨论，作 $OF \perp BC$ ，垂足为 F ，利用直角三角形的性质以及勾股定理分别求得 CF 的长，再利用三角形面积公式即可求解。

【详解】解：当 $\angle CBE = 60^\circ$ 时，所作图形如图，作 $OF \perp BC$ ，垂足为 F ，



$\because$ 菱形 $BCDE$, $\angle CBE = 60^\circ$,

$\therefore \angle COB = 90^\circ$, $\angle CBO = 30^\circ$, $\angle OCB = 60^\circ$,

$\because BC = 12$,

$\therefore OC = \frac{1}{2}BC = 6$,

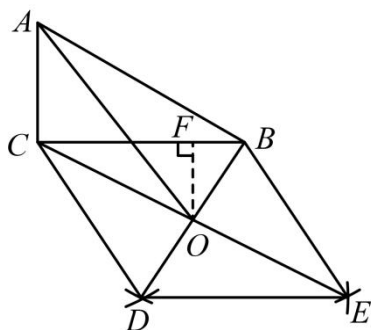
$\because \angle OCB = 60^\circ$,

$\therefore \angle COF = 30^\circ$,

$\therefore CF = \frac{1}{2}OC = 3$,

$\therefore \triangle AOC$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12$;

当 $\angle BCD = 60^\circ$ 时, 所作图形如图, 作 $OF \perp BC$, 垂足为 F ,



$\because$ 菱形 $BCDE$, $\angle BCD = 60^\circ$,

$\therefore \angle COB = 90^\circ$, $\angle BCO = 30^\circ$,

$\because BC = 12$,

$\therefore OB = \frac{1}{2}BC = 6$, $OC = \sqrt{BC^2 - OB^2} = 6\sqrt{3}$,

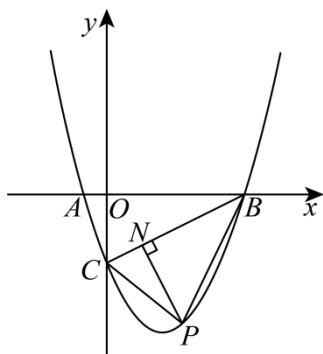
$\therefore OF = \frac{1}{2}OC = 3\sqrt{3}$, $CF = \sqrt{OC^2 - OF^2} = 9$,

$\therefore \triangle AOC$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 8 \times 9 = 36$;

综上, $\triangle AOC$ 的面积为 12 或 36.

23. 如图, 二次函数 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交于 A 、 B 两点, 与 y 轴交于点 C , 点 A 的坐标为 $(-1, 0)$,

点 C 的坐标为 $(0, -3)$ ，连接 BC 。



(1) 求该二次函数的解析式；

(2) 点 P 是抛物线在第四象限图象上的任意一点，当 $\triangle BCP$ 的面积最大时， BC 边上的高 PN 的值为_____。

【答案】(1) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 3$

(2) $\frac{9}{5}\sqrt{5}$

【解析】

【分析】本题考查待定系数法求函数解析式，二次函数与图形的面积，掌握待定系数法是解题的关键。

(1) 直接利用待定系数法求函数解析式即可；

(2) 先求出直线 BC 的解析式，然后过点 P 作 $PD \perp x$ 轴交 BC 于点 D ，设点 P 的坐标为 $\left(x, \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 3\right)$ ，

则点 D 的坐标为 $\left(x, \frac{1}{2}x - 3\right)$ ，根据 $S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2}PD \cdot OB$ 求出面积的最大值，然后求高 PN 即可。

【小问 1 详解】

解：把 $(-1, 0)$ 和 $(0, -3)$ 代入得：

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - b + c = 0 \\ c = -3 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} b = -\frac{5}{2} \\ c = -3 \end{cases}$$

$\therefore$ 二次函数的解析式为 $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 3$ ；

【小问 2 详解】

解：令 $y = 0$ ，则 $0 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 3$ ，解得： $x_1 = -1$ ， $x_2 = 6$ ，

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(6, 0)$ ，

$\therefore BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$ ，

设直线 BC 的解析式为 $y = mx + n$ ，代入得：

$$\begin{cases} n = -3 \\ 6m + n = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ n = -3 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x - 3$,

过点 P 作 $PD \perp x$ 轴交 BC 于点 D ,

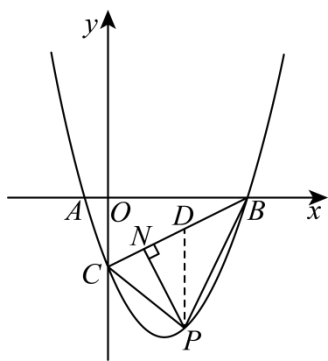
设点 P 的坐标为 $\left(x, \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 3\right)$ ，则点 D 的坐标为 $\left(x, \frac{1}{2}x - 3\right)$,

$$\therefore PD = \frac{1}{2}x - 3 - \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 3\right) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x,$$

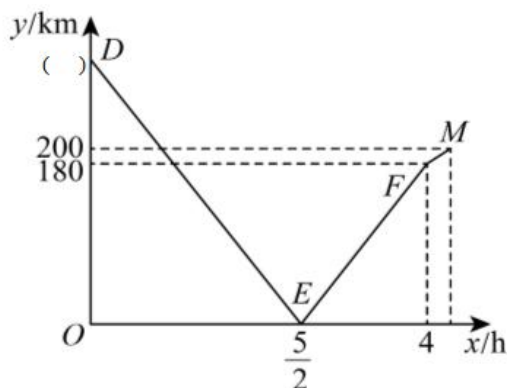
$$\therefore S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2}PD \cdot OB = \frac{1}{2} \times 6 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x\right) = -\frac{3}{2}(x-3)^2 + \frac{27}{2},$$

$$\therefore \triangle PBC \text{ 最大为 } \frac{27}{2},$$

$$\therefore PN = \frac{2S_{\triangle PBC}}{BC} = \frac{27}{3\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}.$$



24. 一条公路上依次有 A 、 B 、 C 三地，甲车从 A 地出发，沿公路经 B 地到 C 地，乙车从 C 地出发，沿公路驶向 B 地。甲、乙两车同时出发，匀速行驶，乙车比甲车早 $\frac{2}{7}$ 小时到达目的地。甲、乙两车之间的路程 y km 与两车行驶时间 x h 的函数关系如图所示，请结合图象信息，解答下列问题：



- (1) 甲车行驶的速度是_____ km/h，并在图中括号内填上正确的数；
- (2) 求图中线段 EF 所在直线的函数解析式（不要求写出自变量的取值范围）；
- (3) 请直接写出两车出发多少小时，乙车距 B 地的路程是甲车距 B 地路程的 3 倍。

【答案】(1) 70, 300

(2) $y = 120x - 300$

(3) $\frac{5}{8}h$ 或 $\frac{25}{13}h$

【解析】

【分析】 本题考查一次函数的实际应用，一元一次方程的实际应用，求出 A 、 B 、 C 两两之间的距离是解题的关键。

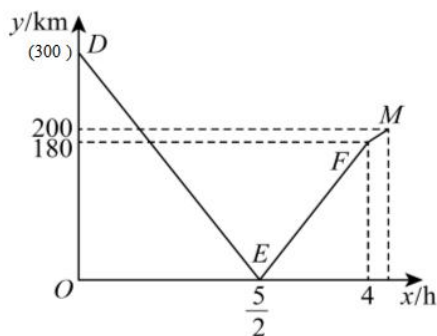
- (1) 利用时间、速度、路程之间的关系求解；
- (2) 利用待定系数法求解；
- (3) 先求出 A 、 B 、 C 两两之间的距离和乙车的速度，设两车出发 x 小时，乙车距 B 地的路程是甲车距 B 地路程的 3 倍，分甲乙相遇前、相遇后两种情况，列一元一次方程分别求解即可。

【小问 1 详解】

解：由图可知，甲车 $\frac{2}{7}$ 小时行驶的路程为 $(200 - 180)$ km，

$$\therefore \text{甲车行驶的速度是 } (200 - 180) \div \frac{2}{7} = 70 (\text{km/h}),$$

$$\therefore A、C \text{ 两地的距离为: } \left(4 + \frac{2}{7}\right) \times 70 = 300 (\text{km}),$$



故答案为：70；300；

【小问2详解】

解：由图可知 E, F 的坐标分别为 $\left(\frac{5}{2}, 0\right), (4, 180)$,

设线段 EF 所在直线的函数解析式为 $y = kx + b$,

$$\text{则} \begin{cases} \frac{5}{2}k + b = 0 \\ 4k + b = 180 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = 120 \\ b = -300 \end{cases},$$

$\therefore$ 线段 EF 所在直线的函数解析式为 $y = 120x - 300$;

【小问3详解】

解：由题意知， A, C 两地的距离为： $\left(4 + \frac{2}{7}\right) \times 70 = 300(\text{km})$,

乙车行驶的速度为： $300 \div \frac{5}{2} - 70 = 50(\text{km/h})$,

C, B 两地的距离为： $50 \times 4 = 200(\text{km})$,

A, B 两地的距离为： $300 - 200 = 100(\text{km})$,

设两车出发 x 小时，乙车距 B 地的路程是甲车距 B 地路程的 3 倍，

分两种情况，当甲乙相遇前时：

$$200 - 50x = 3(100 - 70x),$$

$$\text{解得 } x = \frac{5}{8};$$

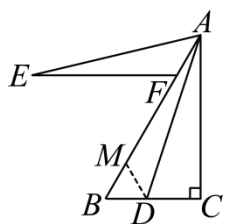
当甲乙相遇后时：

$$200 - 50x = 3(70x - 100),$$

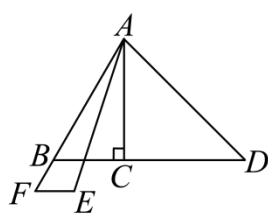
解得 $x = \frac{25}{13}$;

综上所述，两车出发 $\frac{5}{8}h$ 或 $\frac{25}{13}h$ 时，乙车距 B 地的路程是甲车距 B 地路程的 3 倍.

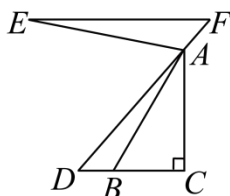
25. 数学老师在课堂上给出了一个问题，让同学们探究. 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$ ，点 D 在直线 BC 上，将线段 AD 绕点 A 顺时针旋转 60° 得到线段 AE ，过点 E 作 $EF \parallel BC$ ，交直线 AB 于点 F .



图①



图②



图③

(1) 当点 D 在线段 BC 上时，如图①，求证： $BD + EF = AB$ ；

分析问题：某同学在思考这道题时，想利用 $AD = AE$ 构造全等三角形，便尝试着在 AB 上截取 $AM = EF$ ，连接 DM ，通过证明两个三角形全等，最终证出结论：

推理证明：写出图①的证明过程：

探究问题：

(2) 当点 D 在线段 BC 的延长线上时，如图②：当点 D 在线段 CB 的延长线上时，如图③，请判断并直接写出线段 BD ， EF ， AB 之间的数量关系；

拓展思考：

(3) 在 (1) (2) 的条件下，若 $AC = 6\sqrt{3}$ ， $CD = 2BD$ ，则 $EF =$ _____.

【答案】(1) 见解析；(2) 图②： $AB = BD - EF$ ，图③： $AB = EF - BD$ ；(3) 10 或 18

【解析】

【分析】(1) 在 AB 边上截取 $AM = EF$ ，连接 DM ，根据题意证明出 $\triangle DAM \cong \triangle AEF$ (SAS)，得到 $AF = DM$ ，然后证明出 $\triangle BMD$ 是等边三角形，得到 $BD = BM = DM$ ，进而求解即可；

(2) 图②：在 BD 上取点 H ，使 $BH = AB$ ，连接 AH 并延长到点 G 使 $AG = AF$ ，连接 DG ，首先证明出 $\triangle ABH$ 是等边三角形，得到 $\angle BAH = 60^\circ$ ，然后求出 $\angle BAH = \angle DAE$ ，然后证明出 $\triangle FAE \cong \triangle GAD$ (SAS)，得到 $EF = DG$ ， $\angle AFE = \angle G$ ，然后证明出 $\triangle DHG$ 是等边三角形，得到 $DH = DG = EF$ ，进而求解即可；

图③：在 EF 上取点 H 使 $AH = AF$ ，同理证明出 $\triangle EAH \cong \triangle ADB$ (AAS)，得到 $BD = AH$ ， $AB = EH$ ，

进而求解即可；

(3) 根据勾股定理和含 30° 角直角三角形的性质求出 $BC = 6$ ， $AB = 12$ ，然后结合 $CD = 2BD$ ，分别 (1)

(2) 的条件下求出 BD 的长度，进而求解即可。

【详解】(1) 证明：在 AB 边上截取 $AM = EF$ ，连接 DM 。

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ - \angle BAC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ 。

$\because EF \parallel BC$ ，

$\therefore \angle EFB = \angle B = 60^\circ$ 。

又 $\because \angle EAD = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle EFB = \angle EAD$ 。

又 $\because \angle BAD = \angle EAD - \angle EAF$ ， $\angle AEF = \angle EFB - \angle EAF$ ，

$\therefore \angle BAD = \angle AEF$ 。

又 $\because AD = AE$ ， $AM = EF$ ，

$\therefore \triangle DAM \cong \triangle AEF$ (SAS)。

$\therefore AF = DM$ 。

$\therefore \angle AMD = \angle EFA = 180^\circ - \angle EFB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ 。

$\therefore \angle BMD = 180^\circ - \angle AMD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ 。

$\because \angle B = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle BMD = \angle B = \angle BDM$ 。

$\therefore \triangle BMD$ 是等边三角形。

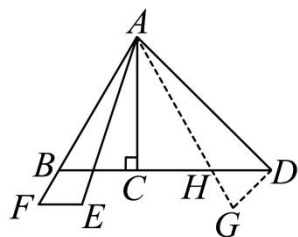
$\therefore BD = BM = DM$ ，

$\because AB = AM + BM$ ，

$\therefore AB = EF + BD$ ；

(2) 图②：当点 D 在线段 BC 的延长线上时， $AB = BD - EF$ ，证明如下：

如图所示，在 BD 上取点 H ，使 $BH = AB$ ，连接 AH 并延长到点 G 使 $AG = AF$ ，连接 DG ，



$\because \angle ABC = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABH$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle BAH = 60^\circ,$$

$\because$ 线段 AD 绕点 A 顺时针旋转 60° 得到线段 AE ,

$$\therefore \angle DAE = 60^\circ, \quad AE = AD,$$

$$\therefore \angle BAH = \angle DAE,$$

$$\therefore \angle BAH - \angle EAH = \angle DAE - \angle EAH, \quad \text{即 } \angle BAE = \angle HAD,$$

$$\text{又 } \because AG = AF,$$

$$\therefore \triangle FAE \cong \triangle GAD (\text{SAS}),$$

$$\therefore EF = DG, \quad \angle AFE = \angle G,$$

$$\because BD \parallel EF,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle F = \angle G = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DHG = \angle AHB = 60^\circ,$$

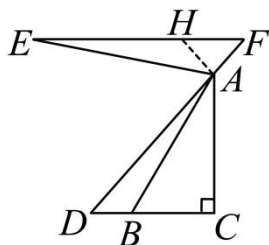
$\therefore \triangle DHG$ 是等边三角形,

$$\therefore DH = DG = EF,$$

$$\therefore AB = BH = BD - DH = BD - EF;$$

图③：当点 D 在线段 CB 的延长线上时， $AB = EF - BD$ ，证明如下：

如图所示，在 EF 上取点 H 使 $AH = AF$ ，



$$\because EF \parallel BC,$$

$$\therefore \angle F = \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\because AH = AF,$$

$\therefore \triangle AHF$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle AHF = \angle HAF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AHE = 120^\circ,$$

$\because$ 将线段 AD 绕点 A 顺时针旋转 60° 得到线段 AE ,

$$\therefore AD = AE, \quad \angle DAE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DAB + \angle EAH = 180^\circ - \angle EAD - \angle HAF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle D + \angle DAB = \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle D = \angle EAH,$$

$$\because \angle DBA = 180^\circ - \angle ABC = 120^\circ = \angle EHA,$$

$$\text{又} \because AD = AE,$$

$$\therefore \triangle EAH \cong \triangle ADB \text{ (AAS)},$$

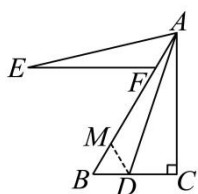
$$\therefore BD = AH, \quad AB = EH,$$

$$\because AH = FH,$$

$$\therefore BD = HF,$$

$$\therefore AB = EH = EF - FH = EF - BD;$$

(3) 如图所示,



图①

$$\because \angle BAC = 30^\circ, \quad \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore AB = 2BC, \quad AB^2 = BC^2 + AC^2,$$

$$\therefore (2BC)^2 = BC^2 + (6\sqrt{3})^2,$$

$$\therefore BC = 6,$$

$$\therefore AB = 2BC = 12,$$

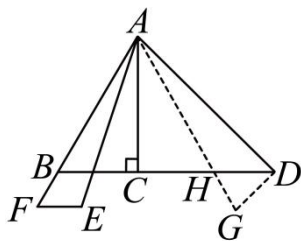
$$\because CD = 2BD, \quad BC = BD + CD,$$

$$\therefore CD = \frac{1}{3}BC = 2,$$

由 (1) 可知, $BD + EF = AB$,

$$\therefore EF = AB - BD = 12 - 2 = 10;$$

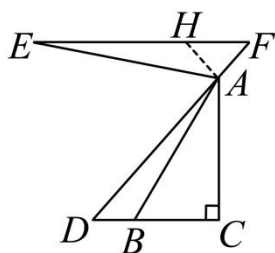
如图所示, 当点 D 在线段 BC 的延长线上时,



$$\because CD < BD, \quad \text{与} \quad CD = 2BD \text{ 矛盾},$$

$\therefore$ 不符合题意;

如图所示，当点 D 在线段 CB 的延长线上时，



$$\because CD = 2BD = BD + BC, \quad BC = 6,$$

$$\therefore BD = BC = 6,$$

由 (2) 可知, $AB = EF - BD$,

$$\therefore AB = 2BC = 12,$$

$$\therefore EF = AB + BD = 12 + 6 = 18.$$

综上所述, $EF = 10$ 或 18 .

【点睛】此题考查了全等三角形的性质和判定, 勾股定理, 等边三角形的性质和判定, 含 30° 角直角三角形的性质, 解题的关键是掌握以上知识点.

26. 牡丹江某县市作为猴头菇生产的“黄金地带”, 年总产量占全国总产量的 50% 以上, 黑龙江省发布的“九珍十八品”名录将猴头菇列为首位. 某商店准备在该地购进特级鲜品、特级干品两种猴头菇, 购进鲜品猴头菇 3 箱、干品猴头菇 2 箱需 420 元, 购进鲜品猴头菇 4 箱、干品猴头菇 5 箱需 910 元. 请解答下列问题:

- (1) 特级鲜品猴头菇和特级干品猴头菇每箱的进价各是多少元?
- (2) 某商店计划同时购进特级鲜品猴头菇和特级干品猴头菇共 80 箱, 特级鲜品猴头菇每箱售价定为 50 元, 特级干品猴头菇每箱售价定为 180 元, 全部销售后, 获利不少于 1560 元, 其中干品猴头菇不多于 40 箱, 该商店有哪几种进货方案?
- (3) 在 (2) 的条件下, 购进猴头菇全部售出, 其中两种猴头菇各有 1 箱样品打 a (a 为正整数) 折售出, 最终获利 1577 元, 请直接写出商店的进货方案.

【答案】(1) 特级鲜品猴头菇每箱进价为 40 元, 特级干品猴头菇每箱进价为 150 元

(2) 有 3 种方案, 详见解析

(3) 特级干品猴头菇 40 箱, 特级鲜品猴头菇 40 箱

【解析】

【分析】本题考查了二元一次方程组的应用、一元一次不等式组的应用以及一元一次方程的应用, 解题的关键是: (1) 找准等量关系, 正确列出二元一次方程组; (2) 根据各数量之间的关系, 正确列出一元一次不等式组; (3) 正确计算求解.

(1) 设特级鲜品猴头菇和特级干品猴头菇每箱的进价分别是 x 元和 y 元，根据“购进鲜品猴头菇 3 箱、干品猴头菇 2 箱需 420 元，购进鲜品猴头菇 4 箱、干品猴头菇 5 箱需 910 元”，列出方程组求解即可；

(2) 设商店计划购进特级鲜品猴头菇 m 箱，则购进特级干品猴头菇 $(80-m)$ 箱，根据“获利不少于 1560 元，其中干品猴头菇不多于 40 箱，”列出不等式组求解即可；

(3) 根据 (2) 中三种方案分别求解即可；

【小问 1 详解】

解：设特级鲜品猴头菇和特级干品猴头菇每箱的进价分别是 x 元和 y 元，

$$\text{则} \begin{cases} 3x + 2y = 420 \\ 4x + 5y = 910 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} x = 40 \\ y = 150 \end{cases},$$

故特级鲜品猴头菇每箱进价为 40 元，特级干品猴头菇每箱进价为 150 元；

【小问 2 详解】

解：设商店计划购进特级鲜品猴头菇 m 箱，则购进特级干品猴头菇 $(80-m)$ 箱，

$$\text{则} \begin{cases} (50-40)m + (80-m)(180-150) \geq 1560 \\ 80-m \leq 40 \end{cases},$$

解得： $40 \leq m \leq 42$ ，

$\therefore m$ 为正整数，

$\therefore m = 40, 41, 42$ ，

故该商店有三种进货方案，

分别为：①购进特级鲜品猴头菇 40 箱，则购进特级干品猴头菇 40 箱；

②购进特级鲜品猴头菇 41 箱，则购进特级干品猴头菇 39 箱；

③购进特级鲜品猴头菇 42 箱，则购进特级干品猴头菇 38 箱；

【小问 3 详解】

解：当购进特级鲜品猴头菇 40 箱，则购进特级干品猴头菇 40 箱时：

$$\text{根据题意得} (40-1) \times (50-40) + (40-1) \times (180-150) + \left(50 \cdot \frac{a}{10} - 40\right) + \left(180 \cdot \frac{a}{10} - 150\right) = 1577,$$

解得： $a = 9$ ；

当购进特级鲜品猴头菇 41 箱，则购进特级干品猴头菇 39 箱时：

根据题意得 $(41-1) \times (50-40) + (39-1) \times (180-150) + \left(50 \cdot \frac{a}{10} - 40\right) + \left(180 \cdot \frac{a}{10} - 150\right) = 1577$,

解得： $a \approx 9.9$ (是小数，不符合要求)；

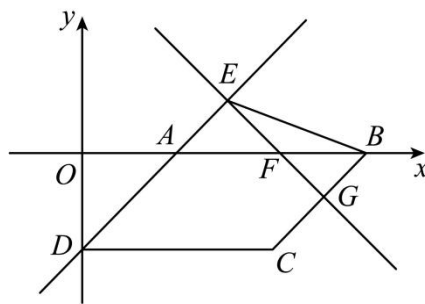
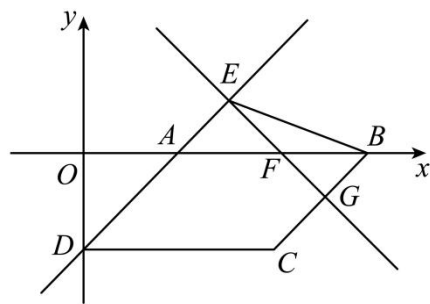
当购进特级鲜品猴头菇 42 箱，则购进特级干品猴头菇 38 箱时：

根据题意得 $(42-1) \times (50-40) + (38-1) \times (180-150) + \left(50 \cdot \frac{a}{10} - 40\right) + \left(180 \cdot \frac{a}{10} - 150\right) = 1577$,

解得： $a \approx 10.7$ (不符合要求)；

故商店的进货方案是特级干品猴头菇 40 箱，特级鲜品猴头菇 40 箱。

27. 如图，在平面直角坐标系中，直线 $y = x + b$ 与 x 轴的正半轴交于点 A ，与 y 轴的负半轴交于点 D ，点 B 在 x 轴的正半轴上，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，线段 OA 的长是一元二次方程 $x^2 - 4x - 12 = 0$ 的一个根。请解答下列问题：



备用图

(1) 求点 D 的坐标；

(2) 若线段 BC 的垂直平分线交直线 AD 于点 E ，交 x 轴于点 F ，交 BC 于点 G ，点 E 在第一象限， $AE = 3\sqrt{2}$ ，

连接 BE ，求 $\tan \angle ABE$ 的值；

(3) 在 (2) 的条件下，点 M 在直线 DE 上，在 x 轴上是否存在点 N ，使以 E 、 M 、 N 为顶点的三角形是直角边比为 $1:2$ 的直角三角形？若存在，请直接写出 $\triangle EMN$ 的个数和其中两个点 N 的坐标；若不存在，请说明理由。

【答案】(1) $D(0, -6)$

(2) $\frac{1}{3}$

(3) 存在，12 个， $N_1(0, 0)$, $N_2(8, 0)$, $N_3(10, 0)$, $N_4(12, 0)$, $N_5(18, 0)$

【解析】

【分析】(1) 先解方程求出 $OA = 6$ ，然后求出直线解析式即可求得点 D 的坐标；

(2) 过点 E 作 $EH \perp AB$ 于点 H ，求出 $AH = EH = 3$ ，然后证明 $\triangle AEF \cong \triangle BGF$ ，即可得到

$BF = AF = 2AH = 6$ ，然后求出 $\angle ABE$ 得正切值即可；

(3) 利用分类讨论画出图形，利用勾股定理解题即可．

【小问 1 详解】

解：解方程 $x^2 - 4x - 12 = 0$ 得 $x_1 = 6$ ， $x_2 = -2$ ，

$\therefore OA = 6$ ，即点 A 的坐标为 $(6, 0)$ ，

把 $(6, 0)$ 代入 $y = x + b$ 得 $b = -6$ ，

$\therefore y = x - 6$ ，点 D 的坐标为 $(0, -6)$ ；

【小问 2 详解】

解：过点 E 作 $EH \perp AB$ 于点 H ，

$\therefore OA = OD = 6$ ，

$\therefore \angle OAD = \angle ODA = \angle EAH = 45^\circ$ ， $AD = \sqrt{OA^2 + OD^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$ ，

$\therefore AH = EH = AE \cdot \tan \angle EAH = 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3$ ，

又 $\because ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore BC = AD = 6\sqrt{2}$ ， $AE \parallel BC$ ，

$\therefore GE$ 是 BC 的垂直平分线，

$\therefore BG = \frac{1}{2}BC = 3\sqrt{2} = AE$ ，

$\therefore AE \parallel BC$ ，

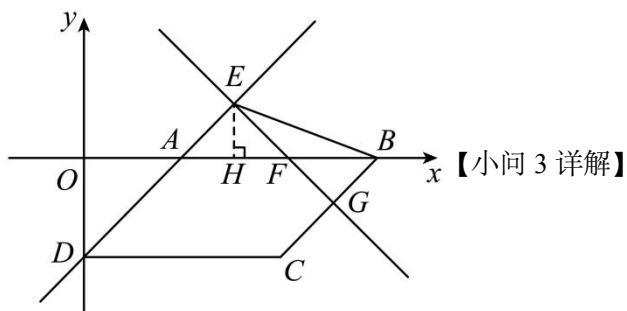
$\therefore \angle EAF = \angle GBF$ ， $\angle AEF = \angle FGB = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle AEF \cong \triangle BGF$ ，

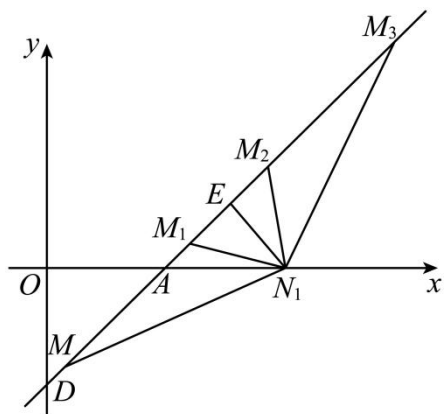
$\therefore BF = AF = 2AH = 6$ ，

$\therefore BH = AF + FB - AH = 6 + 6 - 3 = 9$ ，

$\therefore \tan \angle ABE = \frac{EH}{BH} = \frac{1}{3}$ ；



如图，当 $\angle MEN = 90^\circ$ 时，有 4 个，



解： $\because \angle EAN_1 = 45^\circ$ ，

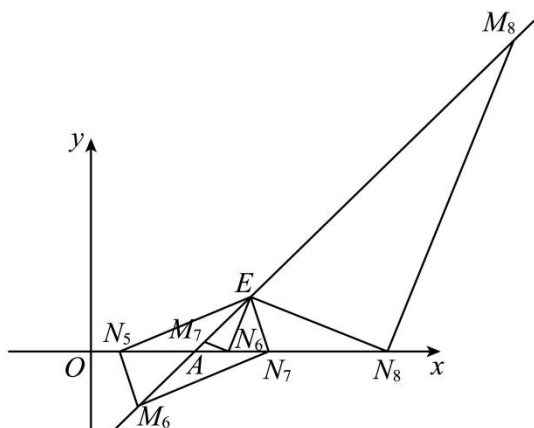
$$\therefore EN_1 = EA = 3\sqrt{2}，$$

由 (2) 得 $AN_1 = 6$ ， $OA = 6$ ，

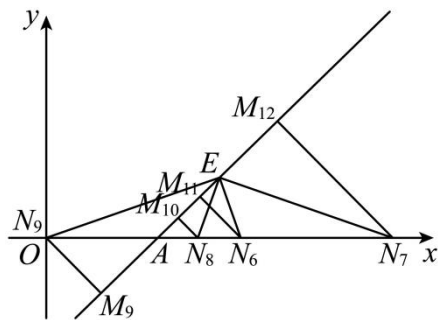
$$\therefore ON_1 = 12，$$

$\therefore$ 点 N 得坐标为 $(12, 0)$ ；

当 $\angle ENM = 90^\circ$ 时，有 4 个， 如图，



当 $\angle EMN = 90^\circ$ 时，有 4 个， 如图，



$$\therefore \angle N_9 A M_9 = 45^\circ,$$

$$\therefore N_9 M_9 = M_9 A = \frac{1}{2} E M_9 = E A = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore N_9 A = \sqrt{M_9 A^2 + N_9 M_9^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = 6,$$

$\therefore$ 点 N_9 与 O 重合,

故点 N_9 得坐标为 $(0,0)$,

综上所述, 点 $\triangle EMN$ 的个数为 12 个, 和点 N 的坐标为 $(0,0)$ 或 $(12,0)$.

【点睛】 本题考查解一元二次方程, 直线的解析式, 平行四边形的性质, 勾股定理, 全等三角形的判定和性质, 解直角三角形等知识, 掌握等腰直角三角形的性质是解题的关键.