

数学试卷

考生注意：

1. 考试时间 120 分钟；
2. 全卷共三道大题，总分 120 分；
3. 所有试题请在答题卡上作答，在试卷上答题无效.

一、单项选择题（本题 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 下列图形既是轴对称图形，又是中心对称图形的是（ ）



2. 下列计算正确的是（ ）

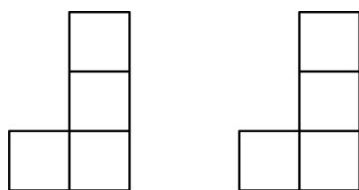
A. $2a^3 \cdot a^2 = 2a^6$

B. $(-2a)^3 \div b \times \frac{1}{b} = -8a^3$

C. $(a^3 + a^2 + a) \div a = a^2 + a$

D. $3a^{-2} = \frac{3}{a^2}$

3. 由 5 个形状、大小完全相同的小正方体组合而成的几何体，其主视图和左视图如图所示，则搭建该几何体的方式有（ ）



主视图

左视图

- A. 1 种 B. 2 种 C. 3 种 D. 4 种
4. 某校八年级 3 班承担下周学校升旗任务，老师从备选的甲、乙、丙、丁四名同学中，选择两名担任升旗手，则甲、乙两名同学同时被选中的概率是（ ）

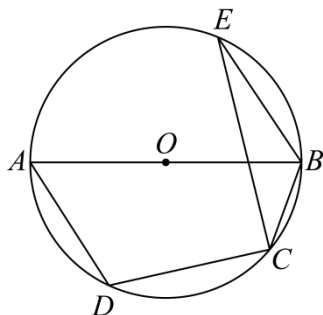
A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{1}{8}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{2}{3}$

5. 如图，四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形， AB 是 $\odot O$ 的直径，若 $\angle BEC = 20^\circ$ ，则 $\angle ADC$ 的度数为（ ）

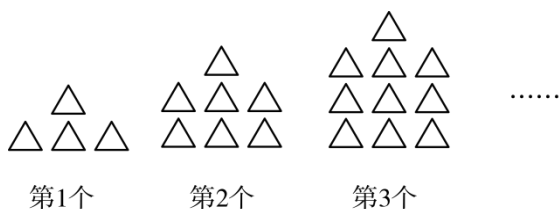


- A. 100° B. 110° C. 120° D. 130°

6. 一种药品原价每盒 48 元，经过两次降价后每盒 27 元，两次降价的百分率相同，则每次降价的百分率为 ()

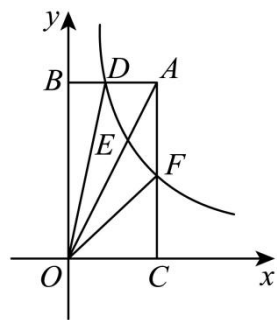
- A. 20% B. 22% C. 25% D. 28%

7. 如图是由一些同样大小的三角形按照一定规律所组成的图形，第 1 个图有 4 个三角形，第 2 个图有 7 个三角形，第 3 个图有 10 个三角形……按照此规律排列下去，第 674 个图中三角形的个数是 ()



- A. 2022 B. 2023 C. 2024 D. 2025

8. 矩形 $OBAC$ 在平面直角坐标系中的位置如图所示，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象与 AB 边交于点 D ，与 AC 边交于点 F ，与 OA 交于点 E ， $OE = 2AE$ ，若四边形 $ODAF$ 的面积为 2，则 k 的值是 ()

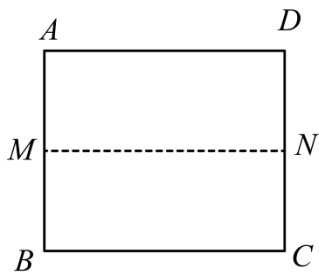


- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{8}{5}$

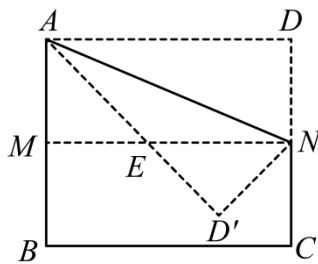
9. 小明同学手中有一张矩形纸片 $ABCD$ ， $AD = 12\text{cm}$ ， $CD = 10\text{cm}$ ，他进行了如下操作：

第一步，如图①，将矩形纸片对折，使 AD 与 BC 重合，得到折痕 MN ，将纸片展平。

第二步，如图②，再一次折叠纸片，把 $\triangle ADN$ 沿 AN 折叠得到 $\triangle AD'N$ ， AD' 交折痕 MN 于点 E ，则线段 EN 的长为 ()



图①

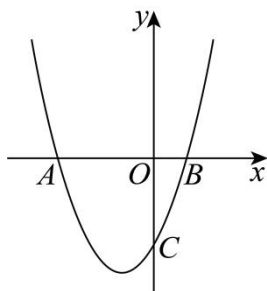


图②

- A. 8cm B. $\frac{169}{24}$ cm C. $\frac{167}{24}$ cm D. $\frac{55}{8}$ cm

10. 在平面直角坐标系中，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于 A 、 B 两点， $A(-3, 0)$ ， $B(1, 0)$ ，与 y 轴交点 C 的纵坐标在 $-3 \sim -2$ 之间，根据图象判断以下结论：① $abc^2 > 0$ ；② $\frac{4}{3} < b < 2$ ；③若

$ax_1^2 - bx_1 = ax_2^2 - bx_2$ 且 $x_1 \neq x_2$ ，则 $x_1 + x_2 = -2$ ；④直线 $y = -\frac{5}{6}cx + c$ 与抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的一个交点 (m, n) ($m \neq 0$)，则 $m = \frac{1}{2}$ 。其中正确的结论是 ()

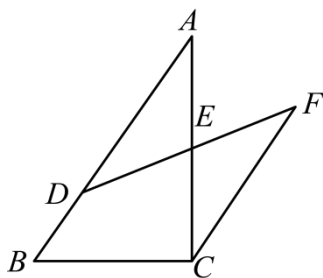


- A. ①②④ B. ①③④ C. ①②③ D. ①②③④

二、填空题 (本题 8 个小题，每小题 3 分，共 24 分)

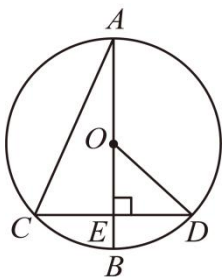
11. 函数 $y = \frac{\sqrt{x+3}}{x}$ 中，自变量 x 的取值范围是_____.

12. 如图， $\triangle ABC$ 中， D 是 AB 上一点， $CF \parallel AB$ ， D 、 E 、 F 三点共线，请添加一个条件_____，使得 $AE = CE$ 。(只添一种情况即可)



13. 将抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 向下平移 5 个单位长度后，经过点 $(-2, 4)$ ，则 $6a - 3b - 7 =$ _____.

14. 如图, 在 $\odot O$ 中, 直径 $AB \perp CD$ 于点 E , $CD = 6, BE = 1$, 则弦 AC 的长为_____.

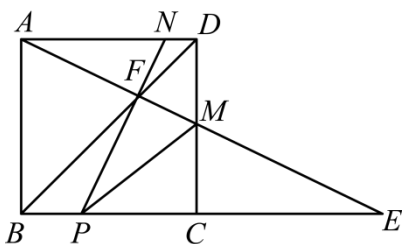


15. 已知一组正整数 $a, 1, b, b, 3$ 有唯一众数8, 中位数是5, 则这一组数据的平均数为_____.

16. 若分式方程 $\frac{x}{x-1} = 3 - \frac{mx}{1-x}$ 的解为正整数, 则整数 m 的值为_____.

17. 矩形 $ABCD$ 的面积是90, 对角线 AC, BD 交于点 O , 点 E 是 BC 边的三等分点, 连接 DE , 点 P 是 DE 的中点, $OP = 3$, 连接 CP , 则 $PC + PE$ 的值为_____.

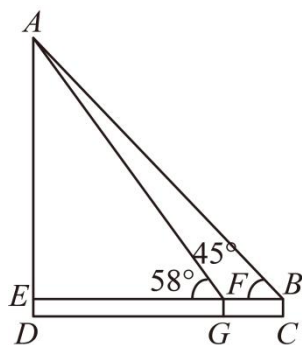
18. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, E 是 BC 延长线上一点, AE 分别交 BD, CD 于点 F, M , 过点 F 作 $NP \perp AE$, 分别交 AD, BC 于点 N, P , 连接 MP . 下列四个结论: ① $AM = PN$; ② $DM + DN = \sqrt{2}DF$; ③若 P 是 BC 中点, $AB = 3$, 则 $EM = 2\sqrt{10}$; ④ $BF \cdot NF = AF \cdot BP$; ⑤若 $PM \parallel BD$, 则 $CE = \sqrt{2}BC$. 其中正确的结论是_____.



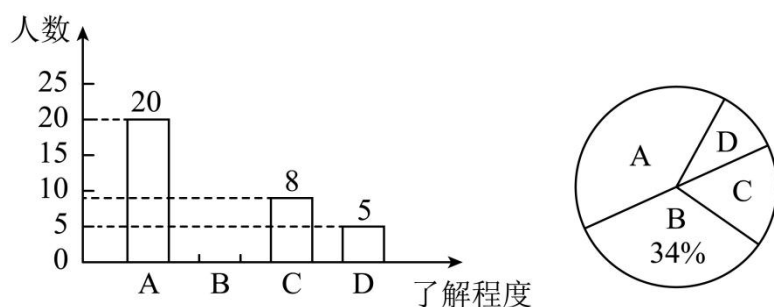
三、解答题 (共 66 分)

19. 先化简, 再求值: $\frac{2x-6}{x} \div \left(x - \frac{6x-9}{x}\right)$, 并从 $-1, 0, 1, 2, 3$ 中选一个合适的数代入求值.

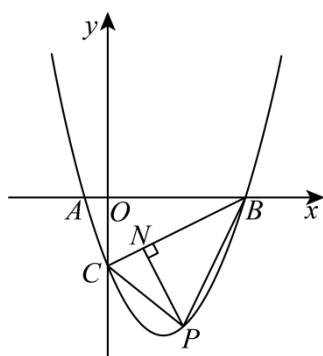
20. 如图, 某数学活动小组用高度为1.5米的测角仪 BC , 对垂直于地面 CD 的建筑物 AD 的高度进行测量, $BC \perp CD$ 于点 C . 在 B 处测得 A 的仰角 $\angle ABE = 45^\circ$, 然后将测角仪向建筑物方向水平移动6米至 FG 处, $FG \perp CD$ 于点 G , 测得 A 的仰角 $\angle AFE = 58^\circ$, BF 的延长线交 AD 于点 E , 求建筑物 AD 的高度 (结果保留小数点后一位). (参考数据: $\sin 58^\circ \approx 0.85, \cos 58^\circ \approx 0.53, \tan 58^\circ \approx 1.60$)



21. 某校为掌握学生对垃圾分类的了解情况, 在全校范围内抽取部分学生进行问卷调查, 并将收集到的信息进行整理, 绘制成如图所示不完整的统计图, 其中 A 为“非常了解”, B 为“了解较多”, C 为“基本了解”, D 为“了解较少”. 请你根据图中提供的信息, 解答下列问题:

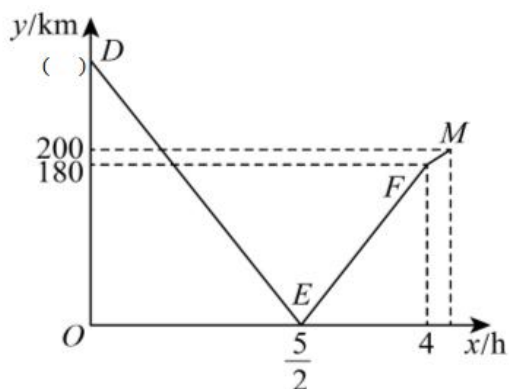


- (1) 本次调查共抽取了_____名学生;
 - (2) 补全条形统计图, 并求出扇形统计图中“了解较少”所对应的圆心角度数;
 - (3) 若全校共有 1200 名学生, 请估计全校有多少名学生“非常了解”垃圾分类问题.
22. 在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = 12$, $AC = 8$, 以 BC 为边向 $\triangle ACB$ 外作有一个内角为 60° 的菱形 $BCDE$, 对角线 BD , CE 交于点 O , 连接 OA , 请用尺规和三角板作出图形, 并直接写出 $\triangle AOC$ 的面积.
23. 如图, 二次函数 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交于 A 、 B 两点, 与 y 轴交于点 C , 点 A 的坐标为 $(-1, 0)$, 点 C 的坐标为 $(0, -3)$, 连接 BC .

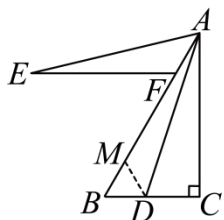


- (1) 求该二次函数的解析式;
- (2) 点 P 是抛物线在第四象限图象上的任意一点, 当 $\triangle BCP$ 的面积最大时, BC 边上的高 PN 的值为_____.

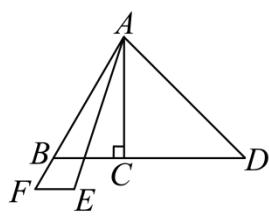
24. 一条公路上依次有 A 、 B 、 C 三地，甲车从 A 地出发，沿公路经 B 地到 C 地，乙车从 C 地出发，沿公路驶向 B 地. 甲、乙两车同时出发，匀速行驶，乙车比甲车早 $\frac{2}{7}$ 小时到达目的地. 甲、乙两车之间的路程 y km 与两车行驶时间 x h 的函数关系如图所示，请结合图象信息，解答下列问题：



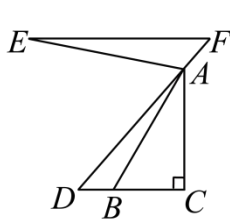
- (1) 甲车行驶的速度是 _____ km/h，并在图中括号内填上正确的数；
 - (2) 求图中线段 EF 所在直线的函数解析式（不要求写出自变量的取值范围）；
 - (3) 请直接写出两车出发多少小时，乙车距 B 地的路程是甲车距 B 地路程的 3 倍.
25. 数学老师在课堂上给出了一个问题，让同学们探究. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$ ，点 D 在直线 BC 上，将线段 AD 绕点 A 顺时针旋转 60° 得到线段 AE ，过点 E 作 $EF \parallel BC$ ，交直线 AB 于点 F .



图①



图②



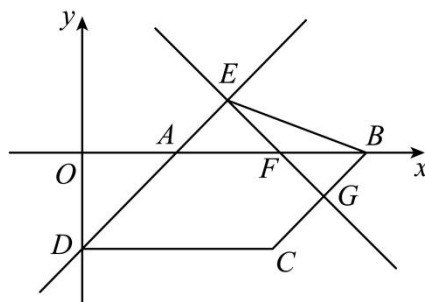
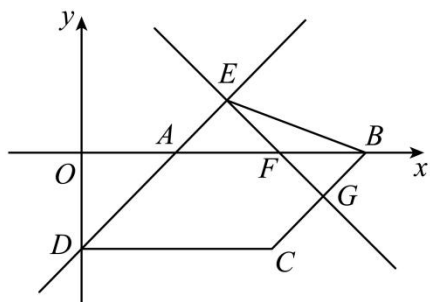
图③

- (1) 当点 D 在线段 BC 上时，如图①，求证： $BD + EF = AB$ ；
- 分析问题：某同学在思考这道题时，想利用 $AD = AE$ 构造全等三角形，便尝试着在 AB 上截取 $AM = EF$ ，连接 DM ，通过证明两个三角形全等，最终证出结论：
- 推理证明：写出图①的证明过程：
- 探究问题：
- (2) 当点 D 在线段 BC 的延长线上时，如图②；当点 D 在线段 CB 的延长线上时，如图③，请判断并直接写出线段 BD ， EF ， AB 之间的数量关系；
- 拓展思考：
- (3) 在 (1) (2) 的条件下，若 $AC = 6\sqrt{3}$ ， $CD = 2BD$ ，则 $EF =$ _____.

26. 牡丹江某县市作为猴头菇生产的“黄金地带”，年总产量占全国总产量的50%以上，黑龙江省发布的“九珍十八品”名录将猴头菇列为首位。某商店准备在该地购进特级鲜品、特级干品两种猴头菇，购进鲜品猴头菇3箱、干品猴头菇2箱需420元，购进鲜品猴头菇4箱、干品猴头菇5箱需910元。请解答下列问题：

- (1) 特级鲜品猴头菇和特级干品猴头菇每箱的进价各是多少元？
- (2) 某商店计划同时购进特级鲜品猴头菇和特级干品猴头菇共80箱，特级鲜品猴头菇每箱售价定为50元，特级干品猴头菇每箱售价定为180元，全部销售后，获利不少于1560元，其中干品猴头菇不多于40箱，该商店有哪几种进货方案？
- (3) 在(2)的条件下，购进猴头菇全部售出，其中两种猴头菇各有1箱样品打 a (a 为正整数)折售出，最终获利1577元，请直接写出商店的进货方案。

27. 如图，在平面直角坐标系中，直线 $y = x + b$ 与 x 轴的正半轴交于点 A ，与 y 轴的负半轴交于点 D ，点 B 在 x 轴的正半轴上，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，线段 OA 的长是一元二次方程 $x^2 - 4x - 12 = 0$ 的一个根。请解答下列问题：



备用图

- (1) 求点 D 的坐标；
- (2) 若线段 BC 的垂直平分线交直线 AD 于点 E ，交 x 轴于点 F ，交 BC 于点 G ，点 E 在第一象限， $AE = 3\sqrt{2}$ ，连接 BE ，求 $\tan \angle ABE$ 的值；
- (3) 在(2)的条件下，点 M 在直线 DE 上，在 x 轴上是否存在点 N ，使以 E 、 M 、 N 为顶点的三角形是直角边比为1:2的直角三角形？若存在，请直接写出 $\triangle EMN$ 的个数和其中两个点 N 的坐标；若不存在，请说明理由。