

青海省 2024 年初中学业水平考试

数 学

(本试卷满分 120 分，考试时间 120 分钟)

注意事项：

1. 本试卷为试题卷，请将答案写在答题卡上，否则无效。

2. 答卷前请将密封线内的项目填写清楚。

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合要求）。

1. -2024 的相反数是（ ）

- A. 2024 B. -2024 C. $\frac{1}{2024}$ D. $-\frac{1}{2024}$

【答案】A

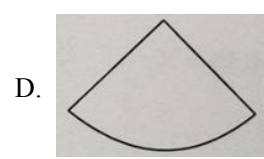
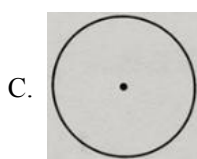
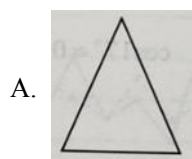
【解析】

【分析】本题主要考查了求一个数的相反数，只有符号不同的两个数互为相反数，0 的相反数是 0，据此求解即可。

【详解】解：有理数 -2024 的相反数是 2024，

故选：A.

2. 生活中常见的路障锥通常是圆锥的形状，它的侧面展开图是（ ）



【答案】D

【解析】

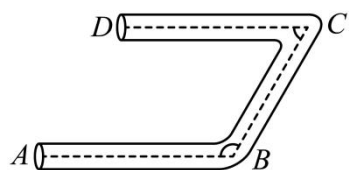
【分析】本题考查了立体图形的侧面展开图，熟记常见立体图形的侧面展开图的特征是解决此类问题的关键.

由圆锥的侧面展开图的特征知它的侧面展开图为扇形.

【详解】解：圆锥的侧面展开图是扇形.

故选：D.

3. 如图，一个弯曲管道 $AB \parallel CD$ ， $\angle ABC = 120^\circ$ ，则 $\angle BCD$ 的度数是（ ）

A. 120° B. 30° C. 60° D. 150°

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查平行线的性质，熟练掌握平行线的性质是解题的关键. 根据两直线平行，同旁内角互补即可得出结果.

【详解】 $\because AB \parallel CD$

$$\therefore \angle ABC + \angle BCD = 180^\circ$$

$$\because \angle ABC = 120^\circ$$

$$\therefore \angle BCD = 60^\circ$$

故选：C

4. 计算 $12x - 20x$ 的结果是（ ）

A. $8x$ B. $-8x$ C. -8 D. x^2

【答案】B

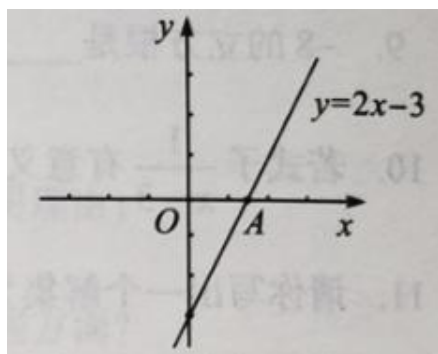
【解析】

【分析】此题考查了合并同类项，根据合并同类项法则计算即可.

【详解】解： $12x - 20x = -8x$ ，

故选：B.

5. 如图，一次函数 $y = 2x - 3$ 的图象与 x 轴相交于点 A ，则点 A 关于 y 轴的对称点是（ ）



A. $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

B. $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

C. $(0, 3)$

D. $(0, -3)$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了一次函数与坐标轴的交点坐标，点的对称，属于简单题，求交点坐标是解题关键。先求出点A的坐标，再根据对称性求出对称点的坐标即可。

【详解】解：令 $y = 0$ ，则 $0 = 2x - 3$ ，

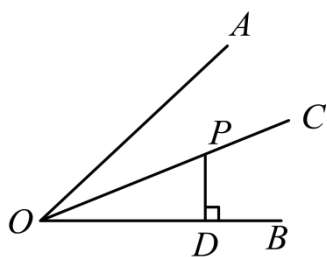
解得： $x = \frac{3}{2}$ ，

即A点为 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ ，

则点A关于y轴的对称点是 $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ 。

故选：A。

6. 如图，OC平分 $\angle AOB$ ，点P在OC上， $PD \perp OB$ ， $PD = 2$ ，则点P到OA的距离是（ ）



A. 4

B. 3

C. 2

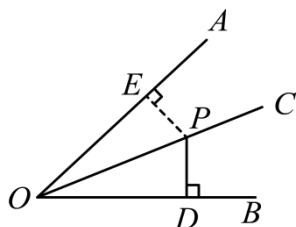
D. 1

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了角平分线的性质定理。过点P作 $PE \perp OA$ 于点E，根据角平分线的性质可得 $PE = PD$ ，即可求解。

【详解】解：过点P作 $PE \perp OA$ 于点E，

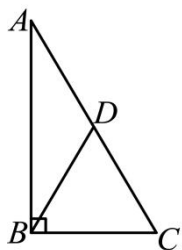


$\therefore OC$ 平分 $\angle AOB$, $PD \perp OB$, $PE \perp OA$,

$\therefore PE = PD = 2$,

故选: C.

7. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, D 是 AC 的中点, $\angle BDC = 60^\circ$, $AC = 6$, 则 BC 的长是 ()



A. 3

B. 6

C. $\sqrt{3}$

D. $3\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半的性质, 等边三角形的判定和性质. 根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半结合等边三角形的判定得到 $\triangle BDC$ 等边三角形, 据此求解即可.

【详解】解: $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, D 是 AC 的中点,

$$\therefore BD = \frac{1}{2}AC = CD,$$

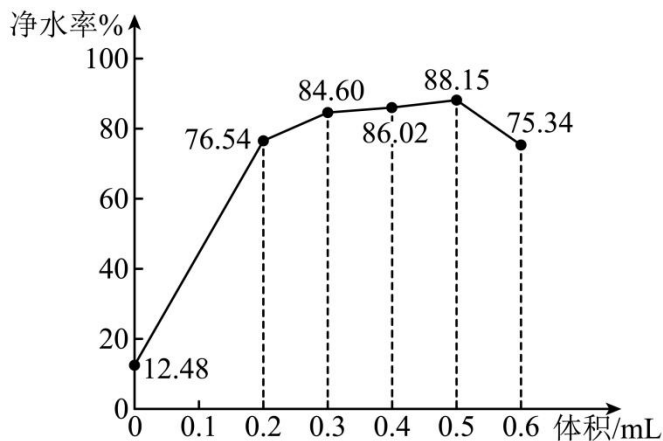
$$\therefore \angle BDC = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle BDC$ 等边三角形,

$$\therefore BC = CD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 6 = 3.$$

故选: A.

8. 化学实验小组查阅资料了解到: 某种絮凝剂溶于水后能够吸附水中悬浮物并发生沉降, 从而达到净水的目的. 实验得出加入絮凝剂的体积与净水率之间的关系如图所示, 下列说法正确的是 ()



- A. 加入絮凝剂的体积越大，净水率越高
- B. 未加入絮凝剂时，净水率为 0
- C. 絮凝剂的体积每增加 0.1mL，净水率的增加量相等
- D. 加入絮凝剂的体积是 0.2mL 时，净水率达到 76.54%

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查从图像上获取信息，熟练掌握能从图像上获得信息是解题的关键，根据图像信息对选项进行判断即可

【详解】A、从图像上可以看到，加入絮凝剂的体积在 0.5mL 达到最大净水率，之后净水率开始降低，不符合题意，选项错误；

B、未加入絮凝剂时，净水率为 12.48%，故不符合题意，选项错误；

C、当絮凝剂的体积为 0.3mL 时，净水率增加量为 $84.60\% - 76.54\% = 8.06\%$ ，絮凝剂的体积为 0.4mL 时，净水率增加量为 $86.02\% - 84.60\% = 1.42\%$ ；故絮凝剂的体积每增加 0.1mL，净水率的增加量不相等，不符合题意，选项错误；

D、根据图像可得，加入絮凝剂的体积是 0.2mL 时，净水率达到 76.54%，符合题意，选项正确；

故选：D

二、填空题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）.

9. -8 的立方根是_____.

【答案】-2

【解析】

【分析】根据立方根的定义进行求解即可得.

【详解】解：∵ $(-2)^3 = -8$,

∴ -8 的立方根是 -2,

故答案为 -2 .

【点睛】本题考查了立方根的定义，熟练掌握立方根的定义是解题的关键.

10. 若式子 $\frac{1}{x-3}$ 有意义，则实数 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \neq 3$

【解析】

【分析】本题主要考查了分式有意义的条件，分式有意义的条件是分母不等于零，根据分式有意义的条件列不等式解答即可.

【详解】解： $\because$ 式子 $\frac{1}{x-3}$ 有意义

$\therefore x-3 \neq 0$ ，解得： $x \neq 3$.

故答案为： $x \neq 3$.

11. 请你写出一个解集为 $x > \sqrt{7}$ 的一元一次不等式_____.

【答案】 $x - \sqrt{7} > 0$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】本题考查了不等式的解集，根据不等式的性质对不等式进行变形，得到的不等式就满足条件.

【详解】解：解集是 $x > \sqrt{7}$ 的不等式： $x - \sqrt{7} > 0$.

故答案为： $x - \sqrt{7} > 0$ (答案不唯一).

12. 正十边形一个外角的度数是_____.

【答案】 36° ## 36 度

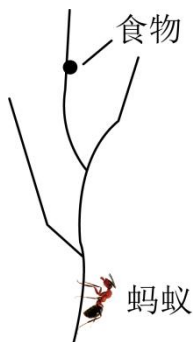
【解析】

【分析】本题考查正多边形的外角，根据正 n 多边形的外角公式 $\frac{360^\circ}{n}$ 求解即可.

【详解】解：正十边形的一个外角的大小是 $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$,

故答案为： 36° .

13. 如图，一只蚂蚁在树枝上寻觅食物，假定蚂蚁在每个叉路口都随机选择一条路径，它获得食物的概率是_____.



【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

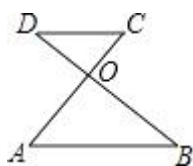
【分析】 本题主要考查了求概率. 直接根据概率公式计算, 即可求解.

【详解】 解: $\because$ 有 3 条路径, 有 1 条路径树枝上有食物,

$\therefore$ 它获得食物的概率是 $\frac{1}{3}$.

故答案为: $\frac{1}{3}$

14. 如图, 线段 AC、BD 交于点 O, 请你添加一个条件: _____, 使 $\triangle AOB \sim \triangle COD$.



【答案】 $OB=OD$. (答案不唯一)

【解析】

【分析】 $AO=OC$, 有一对对顶角 $\angle AOB$ 与 $\angle COD$, 添加 $OB=OD$, 即得结论.

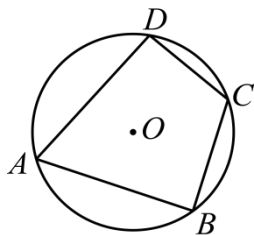
【详解】 解: $\because OA=OC$, $\angle AOB=\angle COD$ (对顶角相等), $OB=OD$,

$\therefore \triangle ABO \cong \triangle CDO$ (SAS).

故答案为: $OB=OD$. (答案不唯一)

【点睛】 本题考查三角形全等的判定方法, 判定两个三角形全等的一般方法有: SSS、SAS、ASA、AAS、HL. 添加时注意: AAA、SSA 不能判定两个三角形全等, 判定两个三角形全等时, 必须有边的参与, 若有两边一角对应相等时, 角必须是两边的夹角.

15. 如图, 四边形 ABCD 是 $\odot O$ 的内接四边形. 若 $\angle A = 50^\circ$, 则 $\angle BCD$ 的度数是_____.



【答案】 130°

【解析】

【分析】 直接根据圆内接四边形的性质求解.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形,

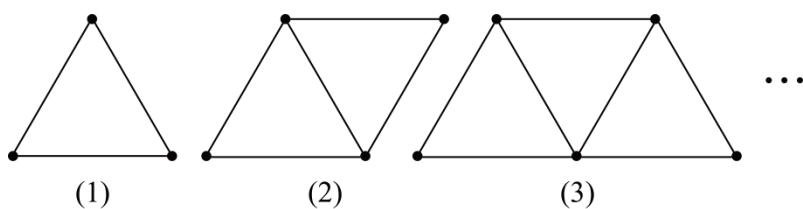
$$\therefore \angle BCD + \angle A = 180^\circ, \text{ 又 } \angle A = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ.$$

故答案为: 130° .

【点睛】 本题考查了圆内接四边形的性质: 圆内接四边形的对角互补; 圆内接四边形的任意一个外角等于它的内对角.

16. 如图是由火柴棒摆成的图案, 按此规律摆放, 第 (7) 个图案中有 _____ 个火柴棒.



【答案】 15

【解析】

【分析】 本题考查图形类规律探究. 根据题意得到第 (1)、(2)、(3) 个图形中火柴棒的数量, 由此可得第 (n) 个图形有 $(1+2n)$ 根火柴棒, 即可.

【详解】 解: 根据题意得: 第 (1) 个图形有 $3 = 1 + 2$ 根火柴棒,

第 (2) 个图形有 $5 = (1 + 2 \times 2)$ 根火柴棒,

第 (3) 个图形有 $7 = (1 + 2 \times 3)$ 根火柴棒,

.....

第 (n) 个图形有 $(1 + 2n)$ 根火柴棒,

$\therefore$ 第 (7) 个图案中有 $1 + 2 \times 7 = 15$ 根火柴棒,

故答案为: 15

三、解答题 (本大题共 9 小题, 共 72 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤).

17. 计算: $\sqrt{18} - \tan 45^\circ + \pi^0 - |-\sqrt{2}|$.

【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了特殊值的三角函数值、零指数幂和绝对值，根据相关运算法则化简后合并即可.

【详解】 解： $\sqrt{18} - \tan 45^\circ + \pi^0 - |-\sqrt{2}|$

$$= 3\sqrt{2} - 1 + 1 - \sqrt{2}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

18. 先化简，再求值： $\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) \div \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)$ ，其中 $x = 2 - y$.

【答案】 $\frac{1}{x+y}, \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了分式的混合运算. 先计算括号内的，再计算除法，然后把 $x = 2 - y$ 代入化简后的结果，即可求解.

【详解】 解： $\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) \div \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)$

$$= \left(\frac{x}{xy} - \frac{y}{xy}\right) \div \left(\frac{x^2}{xy} - \frac{y^2}{xy}\right)$$

$$= \frac{x-y}{xy} \div \frac{x^2-y^2}{xy}$$

$$= \frac{x-y}{xy} \times \frac{xy}{x^2-y^2}$$

$$= \frac{x-y}{xy} \times \frac{xy}{(x+y)(x-y)}$$

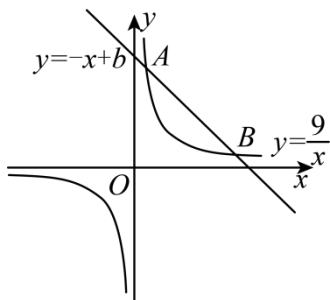
$$= \frac{1}{x+y}$$

$$\because x = 2 - y$$

$$\therefore x + y = 2$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{1}{x+y} = \frac{1}{2}.$$

19. 如图，在同一直角坐标系中，一次函数 $y = -x + b$ 和反比例函数 $y = \frac{9}{x}$ 的图象相交于点 $A(1, m)$ ， $B(n, 1)$.



(1) 求点 A ，点 B 的坐标及一次函数的解析式；

(2) 根据图象，直接写出不等式 $-x + b > \frac{9}{x}$ 的解集.

【答案】 (1) $A(1,9)$, $B(9,1)$, $y = -x + 10$

(2) $x < 0$ 或 $1 < x < 9$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数与反比例函数的交点问题:

(1) 分别把点 $A(1, m)$ ，点 $B(n, 1)$ 代入 $y = \frac{9}{x}$ ，可求出点 A ， B 的坐标，即可求解；

(2) 直接观察图象，即可求解.

【小问 1 详解】

解: 把点 $A(1, m)$ 代入 $y = \frac{9}{x}$ 中, 得: $m = \frac{9}{1} = 9$,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(1, 9)$,

把点 $B(n, 1)$ 代入 $y = \frac{9}{x}$ 中, 得: $n = \frac{9}{1} = 9$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(9, 1)$,

把 $x = 1$, $y = 9$ 代入 $y = -x + b$ 中得: $-1 + b = 9$,

$\therefore b = 10$,

$\therefore$ 一次函数的解析式为 $y = -x + 10$,

【小问 2 详解】

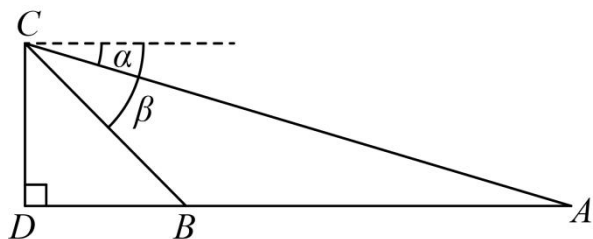
解: 根据一次函数和反比例函数图象, 得:

当 $x < 0$ 或 $1 < x < 9$ 时, 一次函数 $y = -x + b$ 的图象位于反比例函数 $y = \frac{9}{x}$ 的图象的上方,

$\therefore -x + b > \frac{9}{x}$ 的解集为 $x < 0$ 或 $1 < x < 9$.

20. 如图, 某种摄像头识别到最远点 A 的俯角 α 是 17° , 识别到最近点 B 的俯角 β 是 45° , 该摄像头安装在距地面 5m 的点 C 处, 求最远点与最近点之间的距离 AB (结果取整数, 参考数据: $\sin 17^\circ \approx 0.29$,

$\cos 17^\circ \approx 0.96$, $\tan 17^\circ \approx 0.31$).



【答案】最远点与最近点之间的距离 AB 约是 11m

【解析】

【分析】本题考查解直角三角形. 根据题意, 先在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中求 AD , 再在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中求 BD , 最后求差即可.

【详解】解: 根据题意得: $CE \parallel AD$, $CD = 5$

$$\therefore CE \parallel AD, \angle \alpha = 17^\circ, \angle \beta = 45^\circ$$

$$\therefore \angle A = \angle \alpha = 17^\circ, \angle CBD = \angle \beta = 45^\circ$$

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中

$$\therefore CD = 5$$

$$\therefore \frac{CD}{AD} = \tan 17^\circ \approx 0.31$$

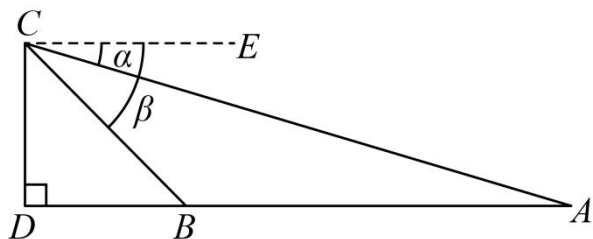
$$\therefore AD \approx 5 \div 0.31 \approx 16.1(\text{m})$$

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $CD = 5\text{m}$,

$$\therefore \frac{CD}{BD} = \tan 45^\circ = 1$$

$$\therefore BD = 5 \div 1 = 5(\text{m})$$

$$\therefore AB = AD - BD \approx 16.1 - 5 = 11.1 \approx 11(\text{m}).$$



答: 最远点与最近点之间的距离 AB 约是 11m.

21. (1) 解一元二次方程: $x^2 - 4x + 3 = 0$;

(2) 若直角三角形的两边长分别是 (1) 中方程的根, 求第三边的长.

【答案】(1) $x = 1$ 或 $x = 3$

(2) 第三边的长是 $\sqrt{10}$ 或 $2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查解一元二次方程，勾股定理.

(1) 用因式分解法解即可；

(2) 分情况讨论，一是两根都是直角边，二是两根一个是直角边，一个是斜边，再用勾股定理分别计算即可.

【详解】 解：(1) $x^2 - 4x + 3 = 0$

$$(x-1)(x-3) = 0$$

$x = 1$ 或 $x = 3$ ；

(2) 当两条直角边分别为 3 和 1 时，

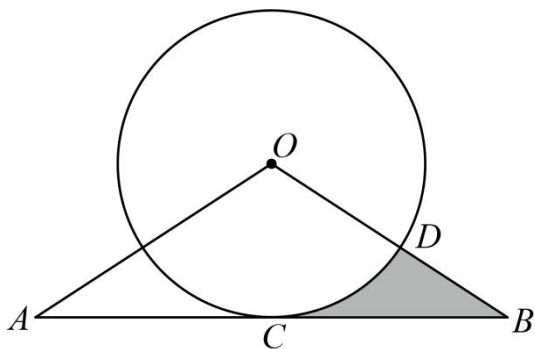
根据勾股定理得，第三边为 $\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ ；

当一条直角边为 1，斜边为 3 时，

根据勾股定理得，第三边为 $\sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$.

答：第三边的长是 $\sqrt{10}$ 或 $2\sqrt{2}$.

22. 如图，直线 AB 经过点 C ，且 $OA = OB$ ， $CA = CB$.



(1) 求证：直线 AB 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 若圆的半径为 4， $\angle B = 30^\circ$ ，求阴影部分的面积.

【答案】 (1) 详见解析

$$(2) S_{\text{阴影}} = 8\sqrt{3} - \frac{8\pi}{3}$$

【解析】

【分析】 本题考查了切线的判定和性质、直角三角形的性质和勾股定理、扇形面积的计算等知识，解题的关键是掌握切线的判定与性质.

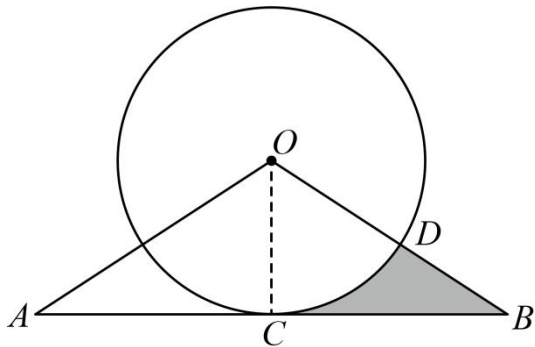
(1) 利用等腰三角形的性质证得 $OC \perp AB$ ，利用切线的判定定理即可得到答案；

(2) 在 $\text{Rt}\triangle OCB$ 中, 利用直角三角形的性质和勾股定理求得 $OB=8$, $BC=4\sqrt{3}$, 再根据

$S_{\text{阴影}} = S_{\triangle OCB} - S_{\text{扇形} OCD}$, 计算即可求解.

【小问 1 详解】

证明: 连接 OC ,



$\therefore$ 在 $\triangle OAB$ 中, $OA=OB$, $CA=CB$,

$\therefore OC \perp AB$,

又 $\because OC$ 是 $\odot O$ 的半径,

$\therefore$ 直线 AB 是 $\odot O$ 的切线;

【小问 2 详解】

解: 由 (1) 知 $\angle OCB = 90^\circ$,

$\therefore \angle B = 30^\circ$,

$\therefore \angle COB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$,

$$\therefore S_{\text{扇形} OCD} = \frac{60\pi \cdot 4^2}{360} = \frac{8\pi}{3},$$

在 $\text{Rt}\triangle OCB$ 中, $\angle B = 30^\circ$, $OC = 4$,

$\therefore OB = 8$,

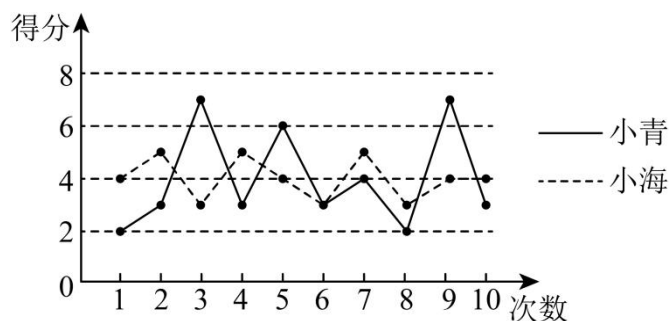
$$\therefore BC = \sqrt{OB^2 - OC^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle OCB} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot OC = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 4 = 8\sqrt{3},$$

$$S_{\text{阴影}} = S_{\triangle OCB} - S_{\text{扇形} OCD} = 8\sqrt{3} - \frac{8\pi}{3}.$$

23. 为了解学生物理实验操作情况, 随机抽取小青和小海两名同学的 10 次实验得分, 并对他们的得分情况从以下两方面整理描述如下:

①操作规范性:



②书写准确性:

小青: 1 1 2 2 2 3 1 3 2 1

小海: 1 2 2 3 3 3 2 1 2 1

操作规范性和书写准确性的得分统计表:

项目	操作规范性		书写准确性	
统计量	平均数	方差	平均数	中位数
学生				
小青	4	S_1^2	1.8	a
小海	4	S_2^2	b	2

根据以上信息, 回答下列问题:

- (1) 表格中的 $a =$ _____, 比较 S_1^2 和 S_2^2 的大小 _____;
- (2) 计算表格中 b 的值;
- (3) 综合上表的统计量, 请你对两名同学的得分进行评价并说明理由;
- (4) 为了取得更好的成绩, 你认为在实验过程中还应该注意哪些方面?

【答案】(1) 2, $S_1^2 > S_2^2$

(2) $b = 2$

(3) 详见解析 (4) 详见解析

【解析】

【分析】 本题考查了方差, 它反映了一组数据的波动大小, 方差越大, 波动性越大, 反之也成立, 也考查了平均数、中位数. 关键是能根据平均数、中位数、方差的意义对本题进行分析.

- (1) 根据中位数的求法求解即可, 根据折线图, 观察波动大小, 即可判断方差的大小;
- (2) 利用加权平均数的求法即可求解;
- (3) 从平均分和方差进行判断即可;

(4) 合理即可.

【小问 1 详解】

解：小青书写准确性从小到大重新排列为 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3,

中位数为 $a = \frac{2+2}{2} = 2$,

观察折线图, 知小青得分的比小海的波动大, 则 $S_1^2 > S_2^2$,

故答案为: 2, $S_1^2 > S_2^2$;

【小问 2 详解】

解：小海书写准确性的平均数为 $b = \frac{1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 3}{10} = \frac{3+8+9}{10} = 2$ (分);

【小问 3 详解】

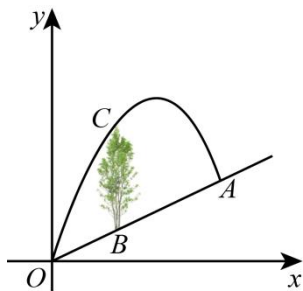
解：从操作规范性来分析, 小青和小海的平均分相同, 但小海的方差小于小青的方差,

所以小海在物理实验操作中发挥稳定;

【小问 4 详解】

解：熟悉实验方案和操作流程; 或注意仔细观察实验现象和结果; 或平衡心态, 沉着应对.

24. 在如图所示的平面直角坐标系中, 有一斜坡 OA , 从点 O 处抛出一个球, 落到点 $A\left(3, \frac{3}{2}\right)$ 处. 小球在空中所经过的路线是抛物线 $y = -x^2 + bx$ 的一部分.



(1) 求抛物线的解析式;

(2) 求抛物线最高点的坐标;

(3) 斜坡上点 B 处有一棵树, 点 B 是 OA 的三等分点, 小球恰好越过树的顶端 C , 求这棵树的高度.

【答案】(1) $y = -x^2 + \frac{7}{2}x$

(2) $\left(\frac{7}{4}, \frac{49}{16}\right)$

(3) 这棵树的高为 2

【解析】

【分析】本题考查了二次函数的应用，其中涉及到待定系数法求二次函数的解析式，二次函数顶点坐标的求解方法，相似三角形的判定和性质，难度适中利用数形结合与方程思想是解题的关键.

(1) 利用待定系数法求解即可；

(2) 配成顶点式，利用二次函数的性质即可求解；

(3) 过点 A 、 B 分别作 x 轴的垂线，证明 $\triangle OBD \sim \triangle OAE$ ，利用相似三角形的性质求得 $BD = \frac{1}{2}$ ， $OD = 1$ ，据此求解即可.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 点 $A\left(3, \frac{3}{2}\right)$ 是抛物线 $y = -x^2 + bx$ 上的一点，

把点 $A\left(3, \frac{3}{2}\right)$ 代入 $y = -x^2 + bx$ 中，得： $-3^2 + 3b = \frac{3}{2}$ ，

解得 $b = \frac{7}{2}$ ，

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -x^2 + \frac{7}{2}x$ ；

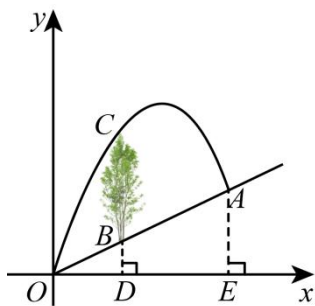
【小问 2 详解】

解：由 (1) 得： $y = -x^2 + \frac{7}{2}x = -\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{49}{16}$ ，

$\therefore$ 抛物线最高点对坐标为 $\left(\frac{7}{4}, \frac{49}{16}\right)$ ；

【小问 3 详解】

解：过点 A 、 B 分别作 x 轴的垂线，垂足分别是点 E 、 D ，



$\therefore \angle BOD = \angle AOE$ ， $\angle BDO = \angle AEO = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle OBD \sim \triangle OAE$ ，

$\therefore \frac{OD}{OE} = \frac{BD}{AE} = \frac{OB}{OA}$ ，

又 $\because$ 点 B 是 OA 的三等分点,

$$\therefore \frac{OB}{OA} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore A\left(3, \frac{3}{2}\right),$$

$$\therefore AE = \frac{3}{2}, \quad OE = 3,$$

$$\therefore \frac{BD}{AE} = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{3},$$

$$\text{解得 } BD = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{OD}{OE} = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{3},$$

$$\text{解得 } OD = 1,$$

$\therefore$ 点 C 的横坐标为 1,

$$\text{将 } x=1 \text{ 代入 } y=-x^2+\frac{7}{2}x \text{ 中, } y=-1^2+\frac{7}{2}\times 1=\frac{5}{2},$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标为 } \left(1, \frac{5}{2}\right),$$

$$\therefore CD = \frac{5}{2},$$

$$\therefore CB = CD - BD = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2,$$

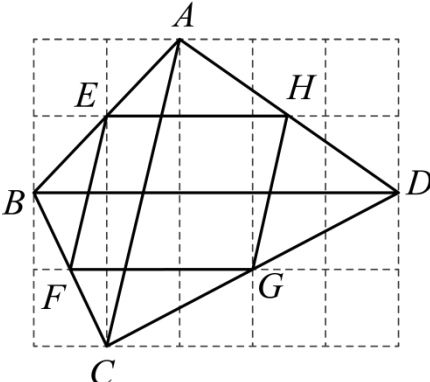
答: 这棵树的高为 2.

25. 综合与实践

顺次连接任意一个四边形的中点得到一个新四边形, 我们称这个新四边形为原四边形的中点四边形. 数学兴趣小组通过作图、测量, 猜想: 原四边形的对角线对中点四边形的形状有着决定性作用.

以下从对角线的数量关系和位置关系两个方面展开探究.

【探究一】

原四边形对角线关系	中点四边形形状	 图1
不相等、不垂直	平行四边形	

如图 1，在四边形 $ABCD$ 中， E 、 F 、 G 、 H 分别是各边的中点.

求证：中点四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

证明：∵ E 、 F 、 G 、 H 分别是 AB 、 BC 、 CD 、 DA 的中点，

∴ EF 、 GH 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 的中位线，

$$\therefore EF = \frac{1}{2}AC, \quad GH = \frac{1}{2}AC \quad (\text{____} \textcircled{1} \text{____})$$

$$\therefore EF = GH.$$

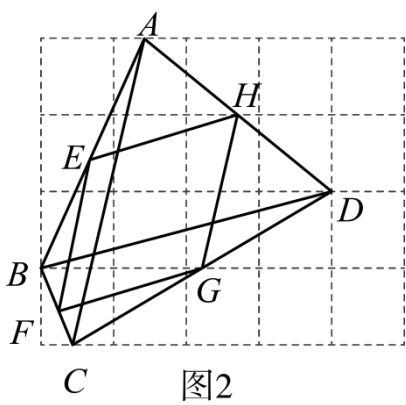
同理可得： $EH = FG$.

∴ 中点四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

结论：任意四边形的中点四边形是平行四边形.

(1) 请你补全上述过程中的证明依据①_____

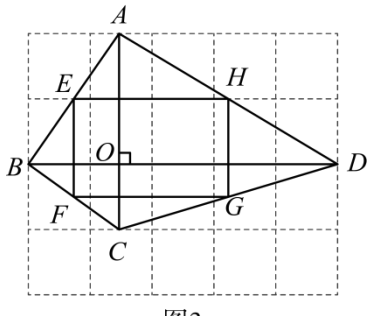
【探究二】

原四边形对角线关系	中点四边形形状	 图2
不相等、不垂直	平行四边形	
$AC = BD$	菱形	

从作图、测量结果得出猜想 I：原四边形的对角线相等时，中点四边形是菱形.

(2) 下面我们结合图 2 来证明猜想 I，请你在探究一证明结论的基础上，写出后续的证明过程.

【探究三】

原四边形对角线关系	中点四边形形状	 图3
不相等、不垂直	平行四边形	
$AC \perp BD$	②_____	

(3) 从作图、测量结果得出猜想 II：原四边形对角线垂直时，中点四边形是②_____.

(4) 下面我们结合图 3 来证明猜想 II，请你在探究一证明结论的基础上，写出后续的证明过程.

【归纳总结】

(5) 请你根据上述探究过程，补全下面的结论，并在图 4 中画出对应的图形。

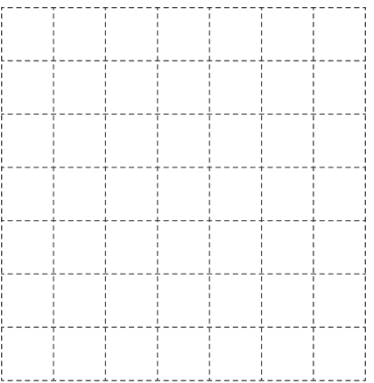
原四边形对角线关系	中点四边形形状	
③_____	④_____	

图4

结论：原四边形对角线③_____时，中点四边形是④_____。

【答案】(1) ①中位线定理

(2) 证明见解析

(3) ②矩形

(4) 证明见解析

(5) ③ $AC \perp BD$ 且 $AC = BD$ ；④正方形

【解析】

【分析】 本题考查了三角形中位线定理，平行四边形的判定和性质，菱形的判定和性质，矩形的判定和性质，等腰直角三角形的判定和性质等知识

(1) 利用三角形中位线定理即可解决问题；

(2) 根据三角形中位线定理，菱形判定定理即可解决问题；

(3) 根据三角形中位线定理，矩形判定定理即可解决问题；

(4) 根据三角形中位线定理，矩形判定定理即可解决问题；

(5) 根据三角形中位线定理，正方形判定定理即可解决问题。

【详解】(1) ①中位线定理

(2) 证明： $\because E、F、G、H$ 分别是 $AB、BC、CD、DA$ 的中点，

$\therefore EF、GH$ 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 的中位线，

$$\therefore EF = \frac{1}{2}AC, \quad GH = \frac{1}{2}AC$$

$$\therefore EF = GH.$$

同理可得： $EH = FG$.

$$\therefore AC = BD$$

$$\therefore EF = GH = EH = FG$$

$\therefore$ 中点四边形 $EFGH$ 是菱形.

(3) ②矩形

故答案为：矩形

(4) 证明 $\because E、F、G、H$ 分别是 $AB、BC、CD、DA$ 的中点,

$\therefore EF、GH$ 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 的中位线,

$$\therefore EF \parallel AC, GH \parallel AC, EF = \frac{1}{2}AC, GH = \frac{1}{2}AC$$

$$\therefore EF \parallel GH.$$

同理可得: $EH \parallel FG$.

$$\because AC \perp BD$$

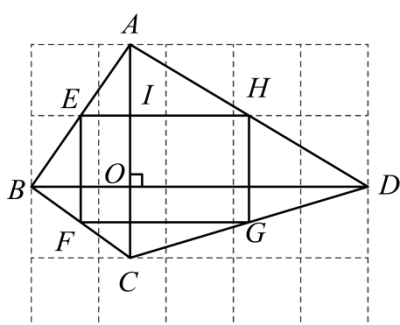


图3

$$\therefore \angle AOD = \angle AIH = 90^\circ, \angle FEH = \angle AIH$$

$$\therefore \angle AOD = \angle EFG = \angle FEH = \angle EHG = 90^\circ$$

$\therefore$ 中点四边形 $EFGH$ 是矩形.

(5) 证明: $\because E、F、G、H$ 分别是 $AB、BC、CD、DA$ 的中点,

$\therefore EF、GH$ 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 的中位线,

$$\therefore EF = \frac{1}{2}AC, GH = \frac{1}{2}AC$$

$$\therefore EF = GH.$$

同理可得: $EH = FG$.

$$\because AC = BD$$

$$\therefore EF = GH = EH = FG$$

$\therefore$ 中点四边形 $EFGH$ 是菱形.

$$\because AC \perp BD$$

由 (4) 可知 $\angle AOD = \angle EFG = \angle FEH = \angle EHG = 90^\circ$

$\therefore$ 菱形 $EFGH$ 是正方形.

故答案为: ③ $AC \perp BD$ 且 $AC = BD$; ④正方形