

重庆市 2024 年初中学业水平暨高中招生考试

数学试题 (A 卷)

(全卷共三个大题, 满分 150 分, 考试时间 120 分钟)

注意事项:

1. 试题的答案书写在答题卡上, 不得在试题卷上直接作答;
2. 作答前认真阅读答题卡上的注意事项;
3. 作图 (包括作辅助线) 请一律用黑色 2B 铅笔完成;
4. 考试结束, 由监考人员将试题卷和答题卡一并收回.

参考公式: 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$, 对称轴为 $x = -\frac{b}{2a}$.

一、选择题: (本大题 10 个小题, 每小题 4 分, 共 40 分) 在每个小题的下面, 都给出代号为 A、B、C、D 的四个答案, 其中只有一个是正确的, 请将答题卡上题号右侧确答案所对应的方框涂黑.

1. 下列四个数中, 最小的数是 ()

- A. -2 B. 0 C. 3 D. $-\frac{1}{2}$

【答案】A

【解析】

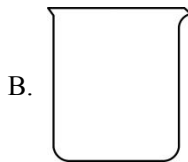
【分析】本题考查了有理数比较大小, 解题的关键是掌握比较大小的法则. 根据正数大于 0, 0 大于负数, 两个负数比较大小, 绝对值大的反而小, 即可得到答案.

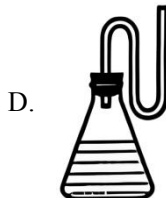
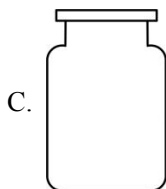
【详解】解: $\because 3 > 0 > -\frac{1}{2} > -2$,

$\therefore$ 最小的数是 -2;

故选: A.

2. 下列四种化学仪器的示意图中, 是轴对称图形的是 ()





【答案】C

【解析】

【分析】此题考查了轴对称图形的概念，根据概念逐一判断即可，如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形叫做轴对称图形，这条直线叫做对称轴，这时，我们也可以说这个图形关于这条直线(成轴)对称，熟练掌握知识点是解题的关键.

【详解】A、不是轴对称图形，故本选项不符合题意；

B、不是轴对称图形，故本选项不符合题意；

C、是轴对称图形，故本选项符合题意；

D、不是轴对称图形，故本选项不符合题意；

故选：C.

3. 已知点 $(-3, 2)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象上，则 k 的值为 ()

A. -3

B. 3

C. -6

D. 6

【答案】C

【解析】

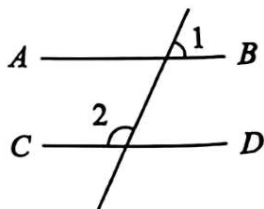
【分析】本题考查了待定系数法求反比例解析式，把 $(-3, 2)$ 代入 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 求解即可.

【详解】解：把 $(-3, 2)$ 代入 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ ，得

$$k = -3 \times 2 = -6.$$

故选 C.

4. 如图， $AB \parallel CD$ ， $\angle 1 = 65^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数是 ()



A. 105°

B. 115°

C. 125°

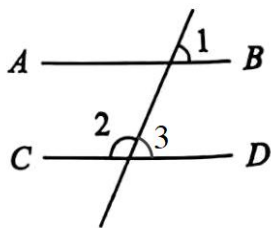
D. 135°

【答案】B

【解析】

【分析】 本题主要考查了平行线的性质，根据平行线的性质得 $\angle 3 = \angle 1 = 65^\circ$ ，由邻补角性质得 $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ ，然后求解即可，熟练掌握两直线平行，同位角相等是解题的关键.

【详解】 解：如图，



$\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle 3 = \angle 1 = 65^\circ$,

$\because \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$,

$\therefore \angle 2 = 115^\circ$,

故选：B.

5. 若两个相似三角形的相似比是1:3，则这两个相似三角形的面积比是（ ）

- A. 1:3 B. 1:4 C. 1:6 D. 1:9

【答案】 D

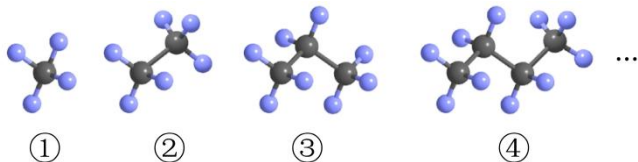
【解析】

【分析】 此题考查了相似三角形的性质，根据“相似三角形的面积比等于相似比的平方”解答即可.

【详解】 解：两个相似三角形的相似比是1:3，则这两个相似三角形的面积比是1:9，

故选：D.

6. 烷烃是一类由碳、氢元素组成的有机化合物，下图是这类物质前四种化合物的分子结构模型图，其中灰球代表碳原子，白球代表氢原子. 第1种如图①有4个氢原子，第2种如图②有6个氢原子，第3种如图③有8个氢原子，……按照这一规律，第10种化合物的分子结构模型中氢原子的个数是（ ）



- A. 20 B. 22 C. 24 D. 26

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查数字的变化类，根据图形，可归纳出规律表达式的特点，再解答即可.

【详解】 解：由图可得，

第1种如图①有4个氢原子，即 $2+2\times 1=4$

第2种如图②有6个氢原子，即 $2+2\times 2=6$

第3种如图③有8个氢原子，即 $2+2\times 3=8$

...

∴第10种化合物的分子结构模型中氢原子的个数是： $2+2\times 10=22$ ；

故选：B.

7. 已知 $m=\sqrt{27}-\sqrt{3}$ ，则实数 m 的范围是（ ）

A. $2 < m < 3$

B. $3 < m < 4$

C. $4 < m < 5$

D. $5 < m < 6$

【答案】B

【解析】

【分析】此题考查的是求无理数的取值范围，二次根式的加减运算，掌握求算术平方根的取值范围的方法是解决此题的关键. 先求出 $m=\sqrt{27}-\sqrt{3}=\sqrt{12}$ ，即可求出 m 的范围.

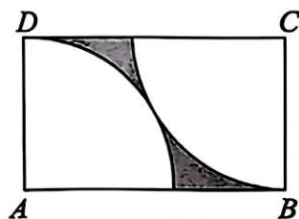
【详解】解：∵ $m=\sqrt{27}-\sqrt{3}=3\sqrt{3}-\sqrt{3}=2\sqrt{3}=\sqrt{12}$ ，

∴ $3 < \sqrt{12} < 4$ ，

∴ $3 < m < 4$ ，

故选：B.

8. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，分别以点 A 和 C 为圆心， AD 长为半径画弧，两弧有且仅有一个公共点. 若 $AD=4$ ，则图中阴影部分的面积为（ ）



A. $32-8\pi$

B. $16\sqrt{3}-4\pi$

C. $32-4\pi$

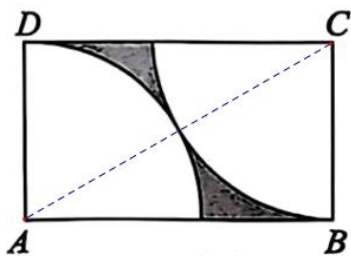
D. $16\sqrt{3}-8\pi$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查扇形面积的计算，勾股定理等知识. 根据题意可得 $AC=2AD=8$ ，由勾股定理得出 $AB=4\sqrt{3}$ ，用矩形的面积减去2个扇形的面积即可得到结论.

【详解】解：连接 AC ，



根据题意可得 $AC = 2AD = 8$ ，

$\because$ 矩形 $ABCD$ ， $\therefore AD = BC = 4$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ，

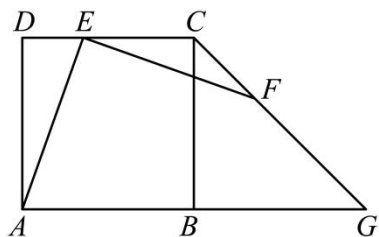
在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = 4\sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 图中阴影部分的面积 $= 4 \times 4\sqrt{3} - 2 \times \frac{90\pi \times 4^2}{360} = 16\sqrt{3} - 8\pi$ 。

故选：D。

9. 如图，在正方形 $ABCD$ 的边 CD 上有一点 E ，连接 AE ，把 AE 绕点 E 逆时针旋转 90° ，得到 FE ，连

接 CF 并延长与 AB 的延长线交于点 G 。则 $\frac{FG}{CE}$ 的值为 ()



A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

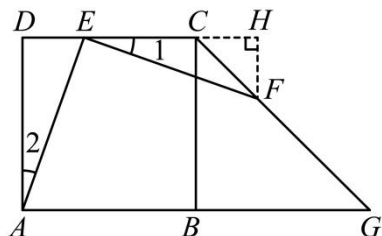
【答案】A

【解析】

【分析】过点 F 作 DC 延长线的垂线，垂足为点 H ，则 $\angle H = 90^\circ$ ，证明 $\triangle ADE \cong \triangle EHF$ ，则 $AD = EH = 1$ ，设 $DE = HF = x$ ，得到 $HF = CH = x$ ，则 $\angle HCF = 45^\circ$ ，故 $CF = \sqrt{2}x$ ，同理可求 $CG = \sqrt{2}BC = \sqrt{2}$ ，

则 $FG = CG - CF = \sqrt{2}(1-x)$ ，因此 $\frac{FG}{CE} = \frac{\sqrt{2}(1-x)}{1-x} = \sqrt{2}$ 。

【详解】解：过点 F 作 DC 延长线的垂线，垂足为点 H ，则 $\angle H = 90^\circ$ ，



由旋转得 $EA = EF$, $\angle AEF = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore \angle D = 90^\circ$, $DC \parallel AB$, $DA = DC = BC$, 设 $DA = DC = BC = 1$,

$\therefore \angle D = \angle H$,

$\therefore \angle AEH = \angle 1 + \angle AEF = \angle 2 + \angle D$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2$,

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle EHF$,

$\therefore DE = HF$, $AD = EH = 1$, 设 $DE = HF = x$,

则 $CE = DC - DE = 1 - x$,

$\therefore CH = EH - EC = 1 - (1 - x) = x$,

$\therefore HF = CH = x$, 而 $\angle H = 90^\circ$,

$\therefore \angle HCF = 45^\circ$,

$\therefore CF = \frac{HF}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}x$,

$\therefore DC \parallel AB$,

$\therefore \angle HCF = \angle G = 45^\circ$,

同理可求 $CG = \sqrt{2}BC = \sqrt{2}$,

$\therefore FG = CG - CF = \sqrt{2} - \sqrt{2}x = \sqrt{2}(1 - x)$,

$\therefore \frac{FG}{CE} = \frac{\sqrt{2}(1 - x)}{1 - x} = \sqrt{2}$,

故选: A.

【点睛】 本题考查了正方形的性质, 全等三角形的判定与性质, 解直角三角形, 旋转的性质, 正确添加辅助线, 构造“一线三等角全等”是解题的关键.

10. 已知整式 $M: a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 其中 $n, a_{n-1}, \cdots, a_0$ 为自然数, a_n 为正整数, 且

$n + a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 = 5$. 下列说法:

- ①满足条件的整式 M 中有 5 个单项式；
 ②不存在任何一个 n ，使得满足条件的整式 M 有且只有 3 个；
 ③满足条件的整式 M 共有 16 个.

其中正确的个数是 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查的是整式的规律探究，分类讨论思想的应用，由条件可得 $0 \leq n \leq 4$ ，再分类讨论得到答案即可.

【详解】解： $\because n, a_{n-1}, \dots, a_0$ 为自然数， a_n 为正整数，且 $n + a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 = 5$ ，

$$\therefore 0 \leq n \leq 4,$$

$$\text{当 } n=4 \text{ 时，则 } 4 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 5,$$

$$\therefore a_4 = 1, \quad a_3 = a_2 = a_1 = a_0 = 0,$$

满足条件的整式有 x^4 ，

$$\text{当 } n=3 \text{ 时，则 } 3 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 5,$$

$$\therefore (a_3, a_2, a_1, a_0) = (2, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1),$$

满足条件的整式有： $2x^3$ ， $x^3 + x^2$ ， $x^3 + x$ ， $x^3 + 1$ ，

$$\text{当 } n=2 \text{ 时，则 } 2 + a_2 + a_1 + a_0 = 5,$$

$$\therefore (a_2, a_1, a_0) = (3, 0, 0), (2, 1, 0), (2, 0, 1), (1, 2, 0), (1, 0, 2), (1, 1, 1),$$

满足条件的整式有： $3x^2$ ， $2x^2 + x$ ， $2x^2 + 1$ ， $x^2 + 2x$ ， $x^2 + 2$ ， $x^2 + x + 1$ ；

$$\text{当 } n=1 \text{ 时，则 } 1 + a_1 + a_0 = 5,$$

$$\therefore (a_1, a_0) = (4, 0), (3, 1), (1, 3), (2, 2),$$

满足条件的整式有： $4x$ ， $3x + 1$ ， $x + 3$ ， $2x + 2$ ；

$$\text{当 } n=0 \text{ 时，} 0 + a_0 = 5,$$

满足条件的整式有： 5 ；

$\therefore$ 满足条件的单项式有： x^4 ， $2x^3$ ， $3x^2$ ， $4x$ ， 5 ，故①符合题意；

不存在任何一个 n ，使得满足条件的整式 M 有且只有 3 个；故②符合题意；

满足条件的整式 M 共有 $1+4+6+4+1=16$ 个。故③符合题意；

故选 D

二、填空题：（本大题 8 个小题，每小题 4 分，共 32 分）请将每小题的答案直接填在答题卡中对应的横线上。

11. 计算： $(\pi-3)^0 + (\frac{1}{2})^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 3

【解析】

【分析】 根据零指数幂和负指数幂的意义计算.

【详解】 解： $(\pi-3)^0 + (\frac{1}{2})^{-1} = 1+2=3$,

故答案为： 3.

【点睛】 本题考查了整数指数幂的运算，熟练掌握零指数幂和负指数幂的意义是解题关键.

12. 如果一个多边形的每一个外角都是 40° ，那么这个多边形的边数为_____.

【答案】 9

【解析】

【分析】 本题考查了多边形的外角和定理，用外角和 360° 除以 40° 即可求解，掌握多边形的外角和等于 360° 是解题的关键.

【详解】 解： $360^\circ \div 40^\circ = 9$,

$\therefore$ 这个多边形的边数是 9,

故答案为： 9.

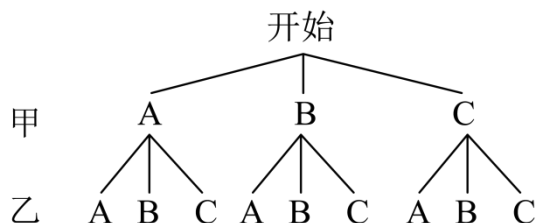
13. 重庆是一座魔幻都市，有着丰富的旅游资源. 甲、乙两人相约来到重庆旅游，两人分别从 A、B、C 三个景点中随机选择一个景点游览，甲、乙两人同时选择景点 B 的概率为_____.

【答案】 $\frac{1}{9}$

【解析】

【分析】 本题考查了画树状图法或列表法求概率，根据画树状图法求概率即可，熟练掌握画树状图法或列表法求概率是解题的关键.

【详解】 解： 画树状图如下：



由图可知，共有9种等可能的情况，其中甲、乙两人同时选择景点B的情况有1种，

∴甲、乙两人同时选择景点B的概率为 $\frac{1}{9}$ ，

故答案为： $\frac{1}{9}$.

14. 随着经济复苏，某公司近两年的总收入逐年递增. 该公司2021年缴税40万元，2023年缴税48.4万元，该公司这两年缴税的年平均增长率是_____.

【答案】 10%

【解析】

【分析】 本题主要考查一元二次方程的应用. 设平均增长率为 x ，然后根据题意可列方程进行求解.

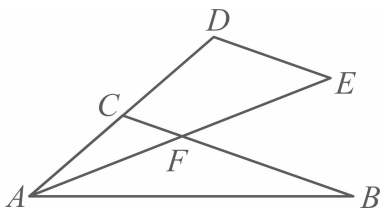
【详解】 解： 设平均增长率为 x ，由题意得：

$$40(1+x)^2 = 48.4,$$

解得： $x_1 = 0.1 = 10\%$ ， $x_2 = -2.1$ （不符合题意，舍去）；

故答案为： 10% .

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，延长 AC 至点 D ，使 $CD = CA$ ，过点 D 作 $DE \parallel CB$ ，且 $DE = DC$ ，连接 AE 交 BC 于点 F . 若 $\angle CAB = \angle CFA$ ， $CF = 1$ ，则 $BF =$ _____.



【答案】 3

【解析】

【分析】 先根据平行线分线段成比例证 $AF = EF$ ，进而得 $DE = CD = AC = 2CF = 2$ ， $AD = 4$ ，再证明 $\triangle CAB \cong \triangle DEA$ ，得 $BC = AD = 4$ ，从而即可得解.

【详解】 解： $\because CD = CA$ ，过点 D 作 $DE \parallel CB$ ， $CD = CA$ ， $DE = DC$ ，

$$\therefore \frac{FA}{FE} = \frac{CA}{CD} = 1, \quad CD = CA = DE,$$

$$\therefore AF = EF,$$

$$\therefore DE = CD = AC = 2CF = 2,$$

$$\begin{aligned}
&\therefore AD = AC + CD = 4, \\
&\because DE \parallel CB, \\
&\therefore \angle CFA = \angle E, \quad \angle ACB = \angle D, \\
&\therefore \angle CAB = \angle CFA, \\
&\therefore \angle CAB = \angle E, \\
&\therefore CD = CA, \quad DE = CD, \\
&\therefore CA = DE, \\
&\therefore \triangle CAB \cong \triangle DEA, \\
&\therefore BC = AD = 4, \\
&\therefore BF = BC - CF = 3,
\end{aligned}$$

故答案为：3，

【点睛】本题主要考查了平行线的性质，三角形的中位线定理，平行线分线段成比例以及全等三角形的判定及性质，熟练掌握三角形的中位线定理，平行线分线段成比例以及全等三角形的判定及性质是解题的关键.

16. 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} \frac{4x-1}{3} < x+1 \\ 2(x+1) \geq -x+a \end{cases}$ 至少有 2 个整数解，且关于 y 的分式方程 $\frac{a-1}{y-1} = 2 - \frac{3}{1-y}$ 的解

为非负整数，则所有满足条件的整数 a 的值之和为_____.

【答案】16

【解析】

【分析】本题考查了分式方程的解，以及解一元一次不等式组. 先解不等式组，根据关于 x 的一元一次不等式组至少有两个整数解，确定 a 的取值范围 $a \leq 8$ ，再把分式方程去分母转化为整式方程，解得 $y = \frac{a-2}{2}$ ，由分式方程的解为非负整数，确定 a 的取值范围 $a \geq 2$ 且 $a \neq 4$ ，进而得到 $2 \leq a \leq 8$ 且 $a \neq 4$ ，根据范围确定出 a 的取值，相加即可得到答案.

【详解】解： $\begin{cases} \frac{4x-1}{3} < x+1 \text{①} \\ 2(x+1) \geq -x+a \text{②} \end{cases}$,

解①得： $x < 4$,

解②得： $x \geq \frac{a-2}{3}$,

$\therefore$ 关于 x 的一元一次不等式组至少有两个整数解，

$$\therefore \frac{a-2}{3} \leq 2,$$

解得 $a \leq 8$,

$$\text{解方程 } \frac{a-1}{y-1} = 2 - \frac{3}{1-y}, \text{ 得 } y = \frac{a-2}{2},$$

$\therefore$ 关于 y 的分式方程的解为非负整数,

$$\therefore \frac{a-2}{2} \geq 0 \text{ 且 } \frac{a-2}{2} \neq 1, \quad a-2 \text{ 是偶数},$$

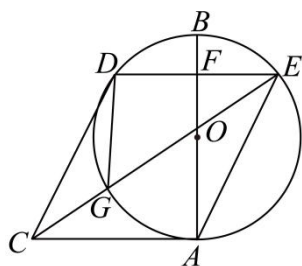
解得 $a \geq 2$ 且 $a \neq 4$, a 是偶数,

$$\therefore 2 \leq a \leq 8 \text{ 且 } a \neq 4, \quad a \text{ 是偶数},$$

则所有满足条件的整数 a 的值之和是 $2+6+8=16$,

故答案为: 16.

17. 如图, 以 AB 为直径的 $\odot O$ 与 AC 相切于点 A , 以 AC 为边作平行四边形 $ACDE$, 点 D 、 E 均在 $\odot O$ 上, DE 与 AB 交于点 F , 连接 CE , 与 $\odot O$ 交于点 G , 连接 DG . 若 $AB=10, DE=8$, 则 $AF = \underline{\hspace{2cm}}$. $DG = \underline{\hspace{2cm}}$.

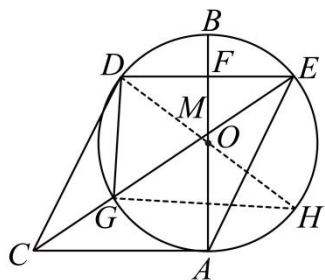


【答案】 ①. 8 ②. $\frac{20\sqrt{13}}{13}$ ## $\frac{20}{13}\sqrt{13}$

【解析】

【分析】连接 DO 并延长, 交 $\odot O$ 于点 H , 连接 GH , 设 CE 、 AB 交于点 M , 根据四边形 $ACDE$ 为平行四边形, 得出 $DE \parallel AC$, $AC = DE = 8$, 证明 $AB \perp DE$, 根据垂径定理得出 $DF = EF = \frac{1}{2}DE = 4$, 根据勾股定理得出 $OF = \sqrt{OD^2 - DF^2} = 3$, 求出 $AF = OA + OF = 5 + 3 = 8$; 证明 $\triangle EFM \sim \triangle CAM$, 得出 $\frac{EF}{AC} = \frac{FM}{AM}$, 求出 $FM = \frac{8}{3}$, 根据勾股定理得出 $EM = \sqrt{EF^2 + FM^2} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{13}}{3}$, 证明 $\triangle EFM \sim \triangle HGD$, 得出 $\frac{FM}{DG} = \frac{EM}{DH}$, 求出 $DG = \frac{20\sqrt{13}}{13}$.

【详解】解：连接 DO 并延长，交 $\odot O$ 于点 H ，连接 GH ，设 CE 、 AB 交于点 M ，如图所示：



$\because$ 以 AB 为直径的 $\odot O$ 与 AC 相切于点 A ,

$\therefore AB \perp AC$,

$\therefore \angle CAB = 90^\circ$,

$\because$ 四边形 $ACDE$ 为平行四边形,

$\therefore DE \parallel AC$, $AC = DE = 8$,

$\therefore \angle BFD = \angle CAB = 90^\circ$,

$\therefore AB \perp DE$,

$\therefore DF = EF = \frac{1}{2}DE = 4$,

$\because AB = 10$,

$\therefore DO = BO = AO = \frac{1}{2}AB = 5$,

$\therefore OF = \sqrt{OD^2 - DF^2} = 3$,

$\therefore AF = OA + OF = 5 + 3 = 8$;

$\because DE \parallel AC$,

$\therefore \triangle EFM \sim \triangle CAM$,

$\therefore \frac{EF}{AC} = \frac{FM}{AM}$,

$\therefore \frac{4}{8} = \frac{FM}{AF - FM}$,

即 $\frac{4}{8} = \frac{FM}{8 - FM}$,

解得: $FM = \frac{8}{3}$,

$$\therefore EM = \sqrt{EF^2 + FM^2} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{13}}{3},$$

$\therefore DH$ 为直径,

$$\therefore \angle DGH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DGH = \angle EFM,$$

$$\therefore \widehat{DG} = \widehat{DG},$$

$$\therefore \angle DEG = \angle DHG,$$

$$\therefore \triangle EFM \sim \triangle HGD,$$

$$\therefore \frac{FM}{DG} = \frac{EM}{DH},$$

$$\text{即 } \frac{\frac{8}{3}}{DG} = \frac{\frac{4\sqrt{13}}{3}}{10},$$

$$\text{解得: } DG = \frac{20\sqrt{13}}{13}.$$

$$\text{故答案为: } 8; \frac{20\sqrt{13}}{13}.$$

【点睛】本题主要考查了平行四边形的性质，垂径定理，圆周角定理，切线的性质，勾股定理，三角形相似的判定和性质，解题的关键是作出辅助线，熟练掌握三角形相似的判定方法。

18. 我们规定：若一个正整数 A 能写成 $m^2 - n$ ，其中 m 与 n 都是两位数，且 m 与 n 的十位数字相同，个位数字之和为 8，则称 A 为“方减数”，并把 A 分解成 $m^2 - n$ 的过程，称为“方减分解”。例如：因为 $602 = 25^2 - 23$ ，25 与 23 的十位数字相同，个位数字 5 与 3 的和为 8，所以 602 是“方减数”，602 分解成 $602 = 25^2 - 23$ 的过程就是“方减分解”。按照这个规定，最小的“方减数”是_____。把一个“方减数” A 进行“方减分解”，即 $A = m^2 - n$ ，将 m 放在 n 的左边组成一个新的四位数 B ，若 B 除以 19 余数为 1，且 $2m + n = k^2$ (k 为整数)，则满足条件的正整数 A 为_____。

【答案】 ①. 82 ②. 4564

【解析】

【分析】本题考查了新定义，设 $m = 10a + b$ ，则 $n = 10a + 8 - b$ ($1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 8$) 根据最小的“方

减数”可得 $m=10, n=18$ ，代入，即可求解；根据 B 除以 19 余数为 1，且 $2m+n=k^2$ (k 为整数)，得出 $\frac{3a+4b+7}{19}$ 为整数， $30a+b+8$ 是完全平方数，在 $1 \leq a \leq 9$ ， $0 \leq b \leq 8$ ，逐个检验计算，即可求解。

【详解】① 设 $m=10a+b$ ，则 $n=10a+8-b$ ($1 \leq a \leq 9$ ， $0 \leq b \leq 8$)

由题意得： $m^2-n=(10a+b)^2-(10a+8-b)$ ，

$\because 1 \leq a \leq 9$ ，“方减数”最小，

$\therefore a=1$ ，

则 $m=10+b$ ， $n=18-b$ ，

$\therefore m^2-n=(10+b)^2-(18-b)=100+20b+b^2-18+b=82+b^2+21b$ ，

则当 $b=0$ 时， m^2-n 最小，为 82，

故答案为：82；

② 设 $m=10a+b$ ，则 $n=10a+8-b$ ($1 \leq a \leq 9$ ， $0 \leq b \leq 8$)

$\therefore B=1000a+100b+10a+8-b=1010a+99b+8$

$\therefore B$ 除以 19 余数为 1，

$\therefore 1010a+99b+7$ 能被 19 整除

$\therefore \frac{B-1}{19}=53a+5b+\frac{3a+4b+7}{19}$ 为整数，

又 $2m+n=k^2$ (k 为整数)

$\therefore 2(10a+b)+10a+8-b=30a+b+8$ 是完全平方数，

$\because 1 \leq a \leq 9$ ， $0 \leq b \leq 8$

$\therefore 30a+b+8$ 最小为 49，最大为 256

即 $7 \leq k \leq 16$

设 $3a+4b+7=19t$ ， t 为正整数，

则 $1 \leq t \leq 3$

当 $t=1$ 时， $3a+4b=12$ ，则 $b=3-\frac{3}{4}a$ ，则 $30a+b+8=30a+3-\frac{3}{4}a+8$ 是完全平方数，又 $1 \leq a \leq 9$ ， $0 \leq b \leq 8$ ，无整数解，

当 $t=2$ 时，无整数解，

当 $t=3$ 时， $3a+4b=50$ ，则 $b=\frac{50-3a}{4}$ ，则 $30a+b+8=30a+\frac{50-3a}{4}+8$ 是完全平方数，

经检验，当 $a=6, b=8$ 时， $3a+4b+7=3\times 6+4\times 8+7=57=19\times 3$ ， $30\times 6+8+8=196=14^2$ ，

$$t=3, k=14,$$

$$\therefore m=68, n=60,$$

$$\therefore A=68^2-60=4564$$

故答案为：82，4564.

三、解答题：（本大题 8 个小题，第 19 题 8 分，其余每小题 10 分，共 78 分）解答时每小题必须给出必要的演算过程或推理步骤，画出必要的图形（包括辅助线），请将解答过程书写在答题卡中对应的位置上.

19. 计算：

$$(1) \quad x(x-2y)+(x+y)^2;$$

$$(2) \quad \left(1+\frac{1}{a}\right) \div \frac{a^2-1}{a^2+a}.$$

【答案】 (1) $2x^2+y^2$;

$$(2) \quad \frac{a+1}{a-1}.$$

【解析】

【分析】 (1) 根据单项式乘以多项式和完全平方公式法则分别计算，然后合并同类项即可；

(2) 先将括号里的异分母分式相减化为同分母分式相减，再算分式的除法运算得以化简；

本题考查了单项式乘以多项式，完全平方公式和分式的化简，熟练掌握运算法则是解题的关键.

【小问 1 详解】

$$\text{解：原式} = x^2 - 2xy + x^2 + 2xy + y^2,$$

$$= 2x^2 + y^2;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解：原式} = \frac{a+1}{a} \div \frac{(a+1)(a-1)}{a(a+1)},$$

$$= \frac{a+1}{a} \cdot \frac{a(a+1)}{(a+1)(a-1)},$$

$$= \frac{a+1}{a-1}.$$

20. 为了解学生的安全知识掌握情况，某校举办了安全知识竞赛. 现从七、八年级的学生中各随机抽取 20 名学生的竞赛成绩（百分制）进行收集、整理、描述、分析. 所有学生的成绩均高于 60 分（成绩得分用 x 表示，共分成四组：A. $60 < x \leq 70$ ；B. $70 < x \leq 80$ ；C. $80 < x \leq 90$ ；D. $90 < x \leq 100$ ），下面给出了部分信息：

七年级 20 名学生的竞赛成绩为：

66, 67, 68, 68, 75, 83, 84, 86, 86, 86,

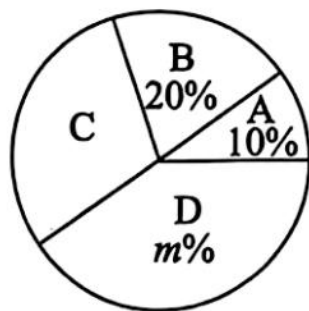
86, 87, 87, 89, 95, 95, 96, 98, 98, 100.

八年级 20 名学生的竞赛成绩在 C 组的数据是：81, 82, 84, 87, 88, 89.

七、八年级所抽学生的竞赛成绩统计表

年级	七年级	八年级
平均数	85	85
中位数	86	b
众数	a	79

八年级所抽学生的竞赛成绩统计图



根据以上信息，解答下列问题：

- (1) 上述图表中 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$, $m = \underline{\hspace{2cm}}$;
- (2) 根据以上数据分析，你认为该校七、八年级中哪个年级学生的安全知识竞赛成绩较好？请说明理由（写出一条理由即可）；
- (3) 该校七年级有 400 名学生，八年级有 500 名学生参加了此次安全知识竞赛，估计该校七、八年级参加此次安全知识竞赛成绩优秀（ $x > 90$ ）的学生人数是多少？

【答案】(1) 86, 87.5, 40;

(2) 八年级学生竞赛成绩较好，理由见解析；

(3) 该校七、八年级参加此次安全知识竞赛成绩优秀的学生人数是 320 人.

【解析】

【分析】(1) 根据表格及题意可直接进行求解；

(2) 根据平均分、中位数及众数分析即可得出结果；

(3) 由题意可得出参加此次竞赛活动成绩优秀的百分比，然后可求解；

本题主要考查扇形统计图及中位数、众数、平均数，熟练掌握扇形统计图及中位数、众数、平均数是解题的关键.

【小问 1 详解】

根据七年级学生竞赛成绩可知：86 出现次数最多，则众数为 86，

八年级竞赛成绩中 A 组： $20 \times 10\% = 2$ (人)，

B 组： $20 \times 20\% = 4$ (人)，

C 组： 6 人，所占百分比为 $\frac{6}{20} \times 100\% = 30\%$

D 组： $20 - 2 - 4 - 6 = 8$ (人) 所占百分比为 $m\% = 1 - 10\% - 20\% - 30\% = 40\%$ ，则 $m = 40$ ，

$\therefore$ 八年级的中位数为第 10、11 个同学竞赛成绩的平均数，

即 C 组第 4、5 个同学竞赛成绩的平均数 $b = \frac{87 + 88}{2} = 87.5$ ，

故答案为：86，87.5，40；

【小问 2 详解】

八年级学生竞赛成绩较好，理由：

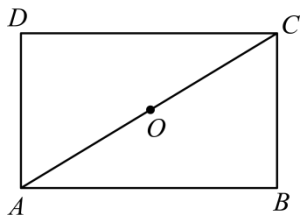
七、八年级的平均分均为 85 分，八年级的中位数高于七年级的中位数，整体上看八年级学生竞赛成绩较好；

【小问 3 详解】

$\frac{6}{20} \times 400 + 40\% \times 500 = 320$ (人)，

答：该校七、八年级参加此次安全知识竞赛成绩优秀的学生人数是 320 人.

21. 在学习了矩形与菱形的相关知识后，小明同学进行了更深入的研究，他发现，过矩形的一条对角线的中点作这条对角线的垂线，与矩形两边相交的两点和这条对角线的两个端点构成的四边形是菱形，可利用证明三角形全等得到此结论. 根据他的想法与思路，完成以下作图与填空：



(1) 如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 O 是对角线 AC 的中点。用尺规过点 O 作 AC 的垂线，分别交 AB ， CD 于点 E ， F ，连接 AF ， CE 。（不写作法，保留作图痕迹）

(2) 已知：矩形 $ABCD$ ，点 E ， F 分别在 AB ， CD 上， EF 经过对角线 AC 的中点 O ，且 $EF \perp AC$ 。求证：四边形 $AECF$ 是菱形。

证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AB \parallel CD$ 。

$\therefore$ ①， $\angle OCF = \angle OAE$ 。

$\because$ 点 O 是 AC 的中点，

$\therefore$ ②。

$\therefore \triangle CFO \cong \triangle AEO$ (AAS)。

$\therefore$ ③。

又 $\because OA = OC$ ，

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形。

$\because EF \perp AC$ ，

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是菱形。

进一步思考，如果四边形 $ABCD$ 是平行四边形呢？请你模仿题中表述，写出你猜想的结论：④。

【答案】(1) 见解析 (2) ① $\angle OFC = \angle OEA$ ；② $OA = OC$ ；③ $OF = OE$ ；④ 四边形 $AECF$ 是菱形

【解析】

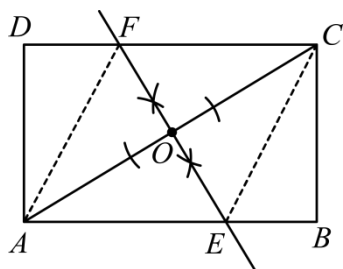
【分析】本题主要考查了矩形的性质，平行四边形的性质与判定，菱形的判定，垂线的尺规作图：

(1) 根据垂线的尺规作图方法作图即可；

(2) 根据矩形或平行四边形的对边平行得到 $\angle OFC = \angle OEA$ ， $\angle OCF = \angle OAE$ ，进而证明 $\triangle CFO \cong \triangle AEO$ (AAS)，得到 $OF = OE$ ，即可证明四边形 $AECF$ 是平行四边形。再由 $EF \perp AC$ ，即可证明四边形 $AECF$ 是菱形。

【小问 1 详解】

解：如图所示，即为所求；



【小问 2 详解】

证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore AB \parallel CD.$$

$$\therefore \angle OFC = \angle OEA, \quad \angle OCF = \angle OAE.$$

∵ 点 O 是 AC 的中点，

$$\therefore OA = OC.$$

$$\therefore \triangle CFO \cong \triangle AEO \text{ (AAS)}.$$

$$\therefore OF = OE.$$

又 ∵ $OA = OC$,

∴ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

$$\therefore EF \perp AC,$$

∴ 四边形 $AECF$ 是菱形.

猜想：过平行四边形的一条对角线的中点作这条对角线的垂线，与平行四边形两边相交的两点和这条对角线的两个端点构成的四边形是菱形；

证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB \parallel CD.$$

$$\therefore \angle OFC = \angle OEA, \quad \angle OCF = \angle OAE.$$

∵ 点 O 是 AC 的中点，

$$\therefore OA = OC.$$

$$\therefore \triangle CFO \cong \triangle AEO \text{ (AAS)}.$$

$$\therefore OF = OE.$$

又 ∵ $OA = OC$,

∴ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

$$\therefore EF \perp AC,$$

∴ 四边形 $AECF$ 是菱形.

故答案为：① $\angle OFC = \angle OEA$ ；② $OA = OC$ ；③ $OF = OE$ ；④ 四边形 $AECF$ 是菱形.

22. 为促进新质生产力的发展，某企业决定投入一笔资金对现有甲、乙两类共 30 条生产线的设备进行更新换代。

(1) 为鼓励企业进行生产线的设备更新，某市出台了相应的补贴政策。根据相关政策，更新 1 条甲类生产线的设备可获得 3 万元的补贴，更新 1 条乙类生产线的设备可获得 2 万元的补贴。这样更新完这 30 条生产线的设备，该企业可获得 70 万元的补贴。该企业甲、乙两类生产线各有多少条？

(2) 经测算，购买更新 1 条甲类生产线的设备比购买更新 1 条乙类生产线的设备需多投入 5 万元，用 200 万元购买更新甲类生产线的设备数量和用 180 万元购买更新乙类生产线的设备数量相同，那么该企业在获得 70 万元的补贴后，还需投入多少资金更新生产线的设备？

【答案】 (1) 该企业甲类生产线有 10 条，则乙类生产线各有 20 条；

(2) 需要更新设备费用为 1330 万元

【解析】

【分析】 本题考查的是一元一次方程的应用，分式方程的应用，理解题意，确定相等关系是解本题的关键。

(1) 设该企业甲类生产线有 x 条，则乙类生产线各有 $(30-x)$ 条，再利用更新完这 30 条生产线的设备，该企业可获得 70 万元的补贴，再建立方程求解即可；

(2) 设购买更新 1 条甲类生产线的设备为 m 万元，则购买更新 1 条乙类生产线的设备为 $(m-5)$ 万元，利用用 200 万元购买更新甲类生产线的设备数量和用 180 万元购买更新乙类生产线的设备数量相同，再建立分式方程，进一步求解。

【小问 1 详解】

解：设该企业甲类生产线有 x 条，则乙类生产线各有 $(30-x)$ 条，则

$$3x + 2(30-x) = 70,$$

解得： $x = 10$ ，

则 $30-x = 20$ ；

答：该企业甲类生产线有 10 条，则乙类生产线各有 20 条；

【小问 2 详解】

解：设购买更新 1 条甲类生产线的设备为 m 万元，则购买更新 1 条乙类生产线的设备为 $(m-5)$ 万元，则

$$\frac{200}{m} = \frac{180}{m-5},$$

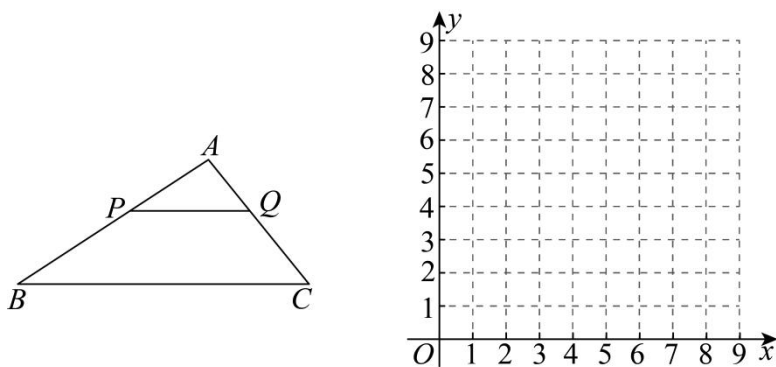
解得： $m = 50$ ，

经检验： $m = 50$ 是原方程的根，且符合题意；

则 $m-5 = 45$ ，

则还需要更新设备费用为 $10 \times 50 + 20 \times 45 - 70 = 1330$ (万元);

23. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=6$, $BC=8$, 点 P 为 AB 上一点, 过点 P 作 $PQ \parallel BC$ 交 AC 于点 Q . 设 AP 的长度为 x , 点 P , Q 的距离为 y_1 , $\triangle ABC$ 的周长与 $\triangle APQ$ 的周长之比为 y_2 .



- (1) 请直接写出 y_1 , y_2 分别关于 x 的函数表达式, 并注明自变量 x 的取值范围;
- (2) 在给定的平面直角坐标系中画出函数 y_1 , y_2 的图象; 请分别写出函数 y_1 , y_2 的一条性质;
- (3) 结合函数图象, 直接写出 $y_1 > y_2$ 时 x 的取值范围. (近似值保留一位小数, 误差不超过 0.2)

【答案】 (1) $y_1 = \frac{4}{3}x$ ($0 < x \leq 6$), $y_2 = \frac{6}{x}$ ($0 < x \leq 6$)

(2) 函数图象见解析, y_1 随 x 增大而增大, y_2 随 x 增大而减小

(3) $2.2 < x \leq 6$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数与反比例函数综合, 相似三角形的性质与判定:

- (1) 证明 $\triangle APQ \sim \triangle ABC$, 根据相似三角形的性质得到 $\frac{C_{\triangle APQ}}{C_{\triangle ABC}} = \frac{PQ}{BC} = \frac{AP}{AB}$, 据此可得答案;
- (2) 根据 (1) 所求利用描点法画出对应的函数图象并根据函数图象写出对应的函数图象的性质即可;
- (3) 找到一次函数图象在反比例函数图象上方时自变量的取值范围即可.

【小问 1 详解】

解: $\because PQ \parallel BC$,

$\therefore \triangle APQ \sim \triangle ABC$,

$$\therefore \frac{C_{\triangle APQ}}{C_{\triangle ABC}} = \frac{PQ}{BC} = \frac{AP}{AB},$$

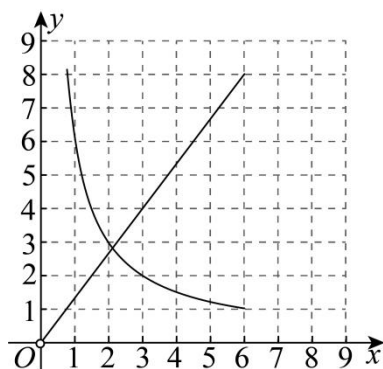
$$\therefore \frac{y_1}{8} = \frac{x}{6}, \quad y_2 = \frac{AB}{AP} = \frac{6}{x},$$

$$\therefore y_1 = \frac{4}{3}x \quad (0 < x \leq 6), \quad y_2 = \frac{6}{x} \quad (0 < x \leq 6);$$

【小问 2 详解】

解：如图所示，即为所求；

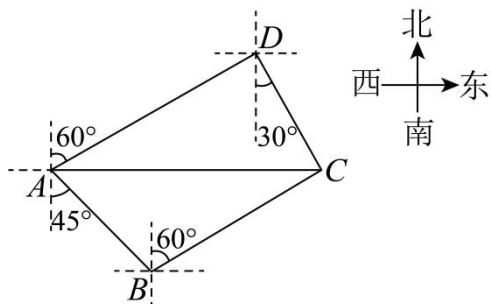
由函数图象可知， y_1 随 x 增大而增大， y_2 随 x 增大而减小；



【小问 3 详解】

解：由函数图象可知，当 $y_1 > y_2$ 时 x 的取值范围 $2.2 < x \leq 6$ 。

24. 如图，甲、乙两艘货轮同时从 A 港出发，分别向 B，D 两港运送物资，最后到达 A 港正东方向的 C 港装运新的物资。甲货轮沿 A 港的东南方向航行 40 海里后到达 B 港，再沿北偏东 60° 方向航行一定距离到达 C 港。乙货轮沿 A 港的北偏东 60° 方向航行一定距离到达 D 港，再沿南偏东 30° 方向航行一定距离到达 C 港。（参考数据： $\sqrt{2} \approx 1.41$ ， $\sqrt{3} \approx 1.73$ ， $\sqrt{6} \approx 2.45$ ）



- (1) 求 A，C 两港之间的距离（结果保留小数点后一位）；
- (2) 若甲、乙两艘货轮的速度相同（停靠 B、D 两港的时间相同），哪艘货轮先到达 C 港？请通过计算说明。

【答案】(1) A，C 两港之间的距离 77.2 海里；

(2) 甲货轮先到达 C 港。

【解析】

【分析】(1) 过 B 作 $BE \perp AC$ 于点 E，由题意可知： $\angle GAB = 45^\circ$ ， $\angle EBC = 60^\circ$ ，求出

$AE = AB \cos \angle BAE = 20\sqrt{2}$ ， $CE = BE \tan \angle EBC = 20\sqrt{6}$ 即可求解；

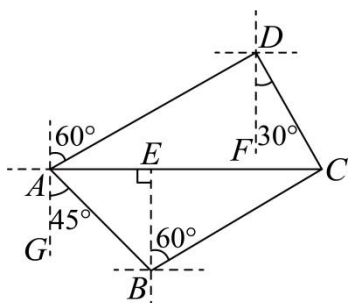
(2) 通过三角函数求出甲行驶路程为： $AB + BC = 40 + 56.4 = 96.4$ ，乙行驶路程为：

$AD + CD = 66.8 + 38.6 = 105.4$ ，然后比较即可；

本题考查了方位角视角下的解直角三角形，构造直角三角形，熟练掌握锐角三角函数是解题的关键.

【小问 1 详解】

如图，过 B 作 $BE \perp AC$ 于点 E ，



$$\therefore \angle AEB = \angle CEB = 90^\circ,$$

由题意可知: $\angle GAB = 45^\circ$, $\angle EBC = 60^\circ$,

$$\therefore \angle BAE = 45^\circ,$$

$$\therefore AE = AB \cos \angle BAE = 40 \times \cos 45^\circ = 20\sqrt{2},$$

$$\therefore CE = BE \tan \angle EBC = 20\sqrt{2} \tan 60^\circ = 20\sqrt{2} \times \sqrt{3} = 20\sqrt{6},$$

$$\therefore AC = AE + CE = 20\sqrt{2} + 20\sqrt{6} \approx 20 \times 1.41 + 20 \times 2.45 \approx 77.2 \quad (\text{海里}),$$

$\therefore A, C$ 两港之间的距离 77.2 海里;

【小问 2 详解】

由 (1) 得: $\angle BAE = 45^\circ$, $\angle EBC = 60^\circ$, $AC = 77.2$,

$$\therefore BE = AB \sin \angle BAE = 40 \times \sin 45^\circ = 20\sqrt{2},$$

$$\therefore BC = \frac{BE}{\cos \angle EBC} = \frac{20\sqrt{2}}{\cos 60^\circ} = \frac{20\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = 40\sqrt{2} \approx 56.4,$$

由题意得: $\angle ADF = 60^\circ$, $\angle CDF = 30^\circ$,

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore CD = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 77.2 = 38.6, \quad AD = AC \cos 30^\circ = 77.2 \times \frac{1.73}{2} \approx 66.8 \quad (\text{海里}),$$

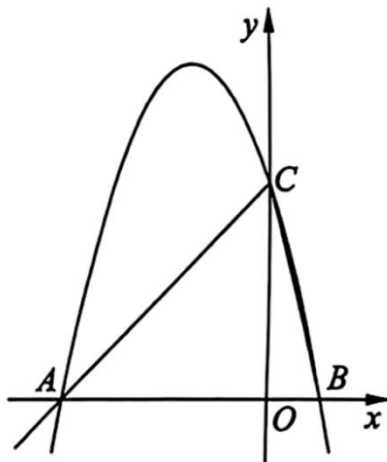
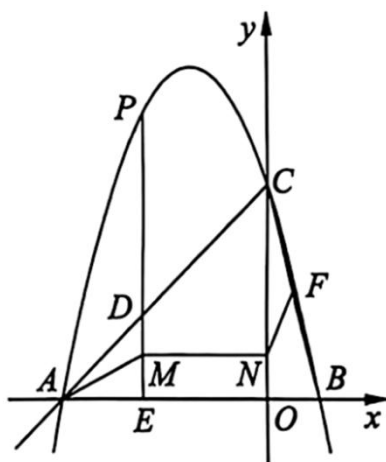
$\therefore$ 甲行驶路程为: $AB + BC = 40 + 56.4 = 96.4$ (海里), 乙行驶路程为: $AD + CD = 66.8 + 38.6 = 105.4$ (海里),

$\therefore 96.4 < 105.4$, 且甲、乙速度相同,

$\therefore$ 甲货轮先到达 C 港.

25. 如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y = ax^2 + bx + 4 (a \neq 0)$ 经过点 $(-1, 6)$ ，与 y 轴交于点 C ，与 x 轴

交于 A, B 两点 (A 在 B 的左侧), 连接 AC, BC , $\tan \angle CBA = 4$.



备用图

- (1) 求抛物线的表达式;
- (2) 点 P 是射线 CA 上方抛物线上的一动点, 过点 P 作 $PE \perp x$ 轴, 垂足为 E , 交 AC 于点 D . 点 M 是线段 DE 上一动点, $MN \perp y$ 轴, 垂足为 N , 点 F 为线段 BC 的中点, 连接 AM, NF . 当线段 PD 长度取得最大值时, 求 $AM + MN + NF$ 的最小值;
- (3) 将该抛物线沿射线 CA 方向平移, 使得新抛物线经过 (2) 中线段 PD 长度取得最大值时的点 D , 且与直线 AC 相交于另一点 K . 点 Q 为新抛物线上的一个动点, 当 $\angle QDK = \angle ACB$ 时, 直接写出所有符合条件的点 Q 的坐标.

【答案】(1) $y = -x^2 - 3x + 4$;

(2) $AM + MN + NF$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{41}}{2} + 2$;

(3) 符合条件的点 Q 的坐标为 $(-1, -2)$ 或 $(-\frac{19}{4}, \frac{43}{16})$.

【解析】

【分析】(1) 利用正切函数求得 $OB = 1$, 得到 $B(1, 0)$, 再利用待定系数法即可求解;

(2) 求得 $A(-4, 0)$, 利用待定系数法求得直线 AC 的解析式, 设 $P(p, -p^2 - 3p + 4)$, 求得 PD 最大, 点 $P(-2, 6)$, 再证明四边形 $AMNE$ 是平行四边形, 得到 $AM = EN$, 推出当 E, N, F 共线时, EF 取最小值, 即 $AM + MN + NF$ 取最小值, 据此求解即可;

(3) 求得 $D(-2, 2)$, 再利用平移的性质得到新抛物线的解析式 $y' = -x^2 - 7x - 8$, 再分两种情况讨论, 计算即可求解.

【小问 1 详解】

解：令 $x=0$ ，则 $y=4$ ，

$$\therefore C(0,4),$$

$$\therefore OC=4,$$

$$\because \tan \angle CBA=4,$$

$$\therefore \frac{OC}{OB}=4,$$

$$\therefore OB=1,$$

$$\therefore B(1,0),$$

将 $B(1,0)$ 和 $(-1,6)$ 代入 $y=ax^2+bx+4$ 得 $\begin{cases} 6=a-b+4 \\ 0=a+b+4 \end{cases}$,

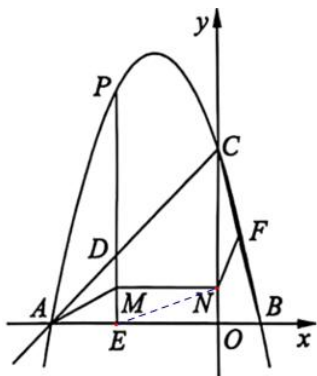
$$\text{解得} \begin{cases} a=-1 \\ b=-3 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=-x^2-3x+4$;

【小问 2 详解】

解：令 $y=0$ ，则 $0=-x^2-3x+4$ ，

解得 $x=-4$ 或 $x=1$ ，



$$\therefore A(-4,0),$$

设直线 AC 的解析式为 $y=mx+4$ ，

代入 $A(-4,0)$ ，得 $0=-4m+4$ ，

解得 $m=1$ ，

$\therefore$ 直线 AC 的解析式为 $y=x+4$ ，

设 $P(p, -p^2 - 3p + 4)$ ($-4 < p < 0$), 则 $D(p, p + 4)$,

$$\therefore PD = -p^2 - 3p + 4 - (p + 4) = -(p + 2)^2 + 4,$$

$$\because -1 < 0,$$

$\therefore$ 当 $p = -2$ 时, PD 最大, 此时 $P(-2, 6)$,

$$\therefore AE = 2, \quad MN = OE = 2, \quad E(-2, 0),$$

$$\therefore AE = MN, \quad AE \parallel MN,$$

连接 EN ,

$\therefore$ 四边形 $AMNE$ 是平行四边形,

$$\therefore AM = EN,$$

$$\therefore AM + MN + NF = EN + MN + NF \geq MN + EF,$$

$\therefore$ 当 E, N, F 共线时, EF 取最小值, 即 $AM + MN + NF$ 取最小值,

$\because$ 点 F 为线段 BC 的中点,

$$\therefore F\left(\frac{1}{2}, 2\right),$$

$$\therefore EF = \sqrt{\left(-2 - \frac{1}{2}\right)^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{41}}{2},$$

$$\therefore AM + MN + NF \text{ 的最小值为 } \frac{\sqrt{41}}{2} + 2;$$

【小问 3 详解】

解: 由 (2) 得点 D 的横坐标为 -2 , 代入 $y = x + 4$, 得 $y = 2$,

$$\therefore D(-2, 2),$$

$\therefore$ 新抛物线由 $y = -x^2 - 3x + 4$ 向左平移 2 个单位, 向下平移 2 个单位得到,

$$\therefore y' = -(x + 2)^2 - 3(x + 2) + 4 - 2 = -x^2 - 7x - 8,$$

过点 D 作 $DQ_1 \parallel BC$ 交抛物线 y' 于点 Q_1 ,

$$\therefore \angle Q_1DK = \angle BCA,$$

同理求得直线 BC 的解析式为 $y = -4x + 4$,

$$\because DQ_1 \parallel BC,$$

∴ 直线 DQ_1 的解析式为 $y = -4x - 6$,

联立得 $-4x - 6 = -x^2 - 7x - 8$,

解得 $x_1 = -1$, $x_2 = -2$,

当 $x = -1$ 时, $y = -2$,

∴ $Q_1(-1, -2)$,

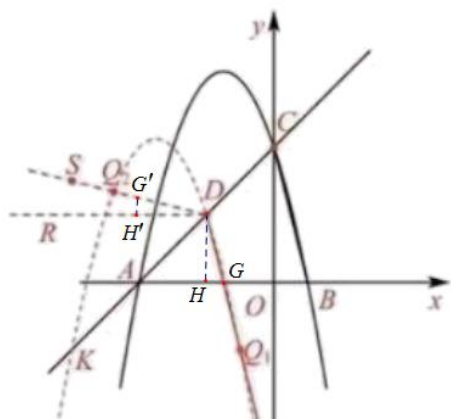
作 DQ_1 关于直线 AC 的对称线得 DQ_2 交抛物线 y' 于点 Q_2 ,

∴ $\angle Q_2DK = \angle Q_1DK = \angle BCA$,

设 DQ_1 交 x 轴于点 G ,

由旋转的性质得到 $DG = DG'$,

过点 D 作 $DR \parallel x$ 轴, 作 $DH \perp x$ 轴于点 H , 作 $G'H' \perp DR$ 于点 H' ,



当 $y = 0$ 时, $0 = -4x - 6$,

解得 $x = -\frac{3}{2}$,

∴ $G\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

∵ $A(-4, 0)$, $C(0, 4)$,

∴ $OA = OC$,

∴ $\angle OAC = \angle OCA = 45^\circ$,

∵ $DR \parallel x$ 轴,

∴ $\angle RDA = \angle DAH = \angle ADH = 45^\circ$,

∴ $\angle G'DH' = \angle GDH$,

$$\because \angle G'H'D = \angle GHD = 90^\circ, \quad DG' = DG$$

$$\therefore \triangle GD'H' \cong \triangle GDH,$$

$$\therefore G'H' = GH = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}, \quad DH' = DH = 2,$$

$$\therefore G' \left(-4, \frac{5}{2} \right),$$

$$\text{同理直线 } DQ_2 \text{ 的解析式为 } y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2},$$

$$\text{联立 } -x^2 - 7x - 8 = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2},$$

$$\text{解得 } x = -2 \text{ 或 } x = -\frac{19}{4},$$

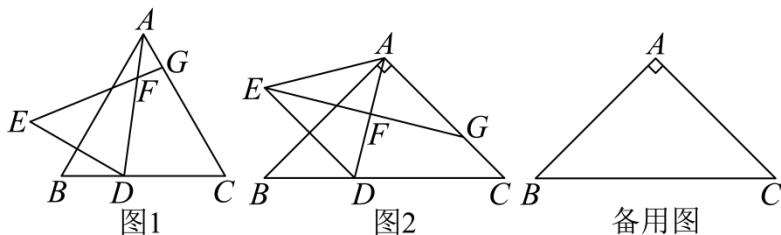
$$\text{当 } x = -\frac{19}{4} \text{ 时, } y = -\frac{1}{4} \times \left(-\frac{19}{4} \right) + \frac{3}{2} = \frac{43}{16},$$

$$\therefore Q_2 \left(-\frac{19}{4}, \frac{43}{16} \right),$$

综上, 符合条件的点 Q 的坐标为 $(-1, -2)$ 或 $\left(-\frac{19}{4}, \frac{43}{16} \right)$.

【点睛】本题是二次函数综合问题, 考查二次函数的图象及性质, 待定系数法确定函数关系式, 熟练掌握二次函数的图象及性质, 轴对称的性质, 直角三角形的性质, 数形结合是解题的关键.

26. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 点 D 是 BC 边上一点 (点 D 不与端点重合). 点 D 关于直线 AB 的对称点为点 E , 连接 AD, DE . 在直线 AD 上取一点 F , 使 $\angle EFD = \angle BAC$, 直线 EF 与直线 AC 交于点 G .



(1) 如图 1, 若 $\angle BAC = 60^\circ, BD < CD, \angle BAD = \alpha$, 求 $\angle AGE$ 的度数 (用含 α 的代数式表示);

(2) 如图 1, 若 $\angle BAC = 60^\circ, BD < CD$, 用等式表示线段 CG 与 DE 之间的数量关系, 并证明;

(3) 如图 2, 若 $\angle BAC = 90^\circ$, 点 D 从点 B 移动到点 C 的过程中, 连接 AE , 当 $\triangle AEG$ 为等腰三角形时,

请直接写出此时 $\frac{CG}{AG}$ 的值.

【答案】(1) $60^\circ + \alpha$

$$(2) \quad CG = \frac{2}{3}\sqrt{3}DE$$

$$(3) \quad \frac{\sqrt{3}-1}{2} \text{ 或 } \frac{\sqrt{3}+5}{2}$$

【解析】

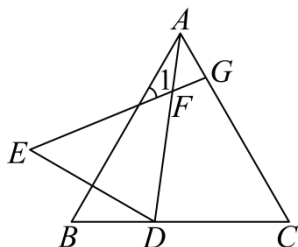
【分析】(1) 由三角形内角和定理及外角定理结合 $\angle EFD = \angle BAC$ 即可求解；

(2) 在 CG 上截取 $CM = BD$ ，连接 BM, BE ， BM 交 AD 于点 H ，连接 BE, AE ，先证明，再证明四边形 $EBMG$ 是平行四边形，可得 $CG = 2BD$ ，记 AB 与 DE 的交点为点 N ，则由轴对称可知： $DE \perp AB$ ， $NE = ND$ ，再解 $\text{Rt}\triangle BND$ 即可；

(3) 连接 BE ，记 AB 与 DE 的交点为点 N ，由轴对称知 $\angle EAB = \angle DAB$ ， $DE \perp AB$ ， $NE = ND$ ， $\angle EBA = \angle DBA = 45^\circ$ ，当点 G 在边 AC 上时，由于 $\angle EAG > 90^\circ$ ，当 $\triangle AEG$ 为等腰三角形时，只能是 $AE = AG$ ，由 (1) 得 $\angle BAD = \alpha$ ， $\angle AGE = 60^\circ + \alpha$ ， $\text{Rt}\triangle AFG$ 中， $\alpha + 2\alpha = 90^\circ$ ，解得 $\alpha = 30^\circ$ ，然后 $AF = x$ ，解直角三角形，表示出 $AG = 2x$ ， $CG = (\sqrt{3}-1)x$ ，即可求解；当点 G 在 CA 延长线上时，只能是 $GE = GA$ ，设 $\angle BAD = \angle BAE = \beta$ ，在 $\text{Rt}\triangle AFE$ 中， $90^\circ - \beta + 180^\circ - 2\beta = 90^\circ$ ，解得 $\beta = 60^\circ$ ，设 $GF = x$ ，解直角三角形求出 $CG = (5 + \sqrt{3})x$ ，即可求解。

【小问 1 详解】

解：如图，



$$\because \angle EFD = \angle BAC, \quad \angle BAC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EFD = 60^\circ$$

$$\because \angle EFD = \angle 1 + \angle BAD = \angle 1 + \alpha,$$

$$\therefore \angle 1 = 60^\circ - \alpha,$$

$$\because \angle AGE + \angle 1 + \angle BAC = 180^\circ,$$

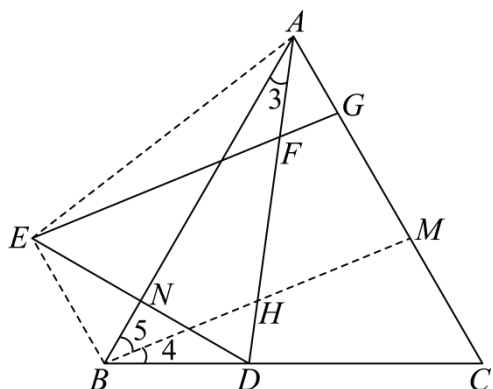
$$\therefore \angle AGE = 180^\circ - 60^\circ - \angle 1 = 120^\circ - \angle 1,$$

$$\therefore \angle AGE = 120^\circ - (60^\circ - \alpha) = 60^\circ + \alpha;$$

【小问 2 详解】

解： $CG = \frac{2}{3}\sqrt{3}DE$,

在 CG 上截取 $CM = BD$, 连接 BM, BE, AE , BM 交 AD 于点 H ,



$$\because AB = AC, \angle BAC = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle BCA$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle ABC = \angle C = 60^\circ, BC = AB,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle BCM,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 4,$$

$$\because \angle AHM = \angle 3 + \angle 5,$$

$$\therefore \angle AHM = \angle 4 + \angle 5 = 60^\circ,$$

$$\because \angle EFD = \angle BAC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AHM = \angle EFD,$$

$$\therefore EG \parallel BM,$$

$\because$ 点 D 关于直线 AB 的对称点为点 E ,

$$\therefore AE = AD, BE = BD, \angle ABE = \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EBC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle EBC + \angle C = 180^\circ,$$

$$\therefore EB \parallel AC,$$

$\therefore$ 四边形 $EBMG$ 是平行四边形,

$$\therefore BE = GM,$$

$$\therefore BE = GM = BD = CM,$$

$$\therefore CG = 2BD,$$

记 AB 与 DE 的交点为点 N ,

则由轴对称可知： $DE \perp AB$ ， $NE = ND$ ，

$$\therefore \text{Rt}\triangle DNB \text{ 中, } DN = BD \cdot \sin \angle ABC = \frac{\sqrt{3}}{2}BD,$$

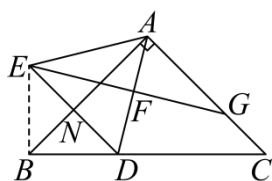
$$\therefore DE = 2DN = \sqrt{3}BD,$$

$$\therefore \frac{CG}{DE} = \frac{2BD}{\sqrt{3}BD} = \frac{2}{3}\sqrt{3},$$

$$\therefore CG = \frac{2}{3}\sqrt{3}DE;$$

【小问 3 详解】

解：连接 BE ，记 AB 与 DE 的交点为点 N ，



$$\therefore AB = AC, \angle EFD = \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 45^\circ,$$

由轴对称知 $\angle EAB = \angle DAB$, $\angle EBA = \angle DBA = 45^\circ$, $DE \perp AB$, $NE = ND$,

当点 G 在边 AC 上时，由于 $\angle EAG > 90^\circ$ ，

$\therefore$ 当 $\triangle AEG$ 为等腰三角形时，只能是 $AE = AG$ ，

由 (1) 得 $\angle BAD = \alpha$ ， $\angle AGE = 60^\circ + \alpha$ ，

$$\therefore \angle EAB = \alpha,$$

$$\therefore \angle EAD = 2\alpha,$$

$$\therefore AE = AG, EG \perp AD,$$

$$\therefore \angle FAG = \angle EAD = 2\alpha,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle AFG \text{ 中, } \alpha + 2\alpha = 90^\circ, \text{ 解得 } \alpha = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle EAD = 60^\circ, \text{ 而 } AE = AD,$$

$\therefore \triangle AED$ 为等边三角形，

$$\therefore AE = ED,$$

设 $AF = x$ ，

$$\therefore \angle EAD = 60^\circ,$$

$$\therefore AG = AE = ED = \frac{AF}{\cos 60^\circ} = 2x,$$

$$\therefore DN = x,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle DAN \text{ 中, } AN = \frac{DN}{\tan \angle DAB} = \sqrt{3}DN = \sqrt{3}x,$$

$$\therefore DE \perp AB, \angle ABC = 45^\circ,$$

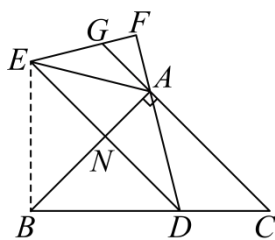
$$\therefore BN = \frac{DN}{\tan 45^\circ} = DN = x,$$

$$\therefore AC = AB = \sqrt{3}x + x,$$

$$\therefore CG = AC - AG = \sqrt{3}x + x - 2x = (\sqrt{3} - 1)x,$$

$$\therefore \frac{CG}{AG} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2};$$

当点 G 在 CA 延长线上时，只能是 $GE = GA$ ，如图：



设 $\angle BAD = \angle BAE = \beta$,

$$\therefore \angle DAC = \angle GAF = 90^\circ - \beta, \quad \angle EAF = 180^\circ - 2\beta,$$

$$\therefore \angle GAE = \angle EAF - \angle GAF = 90^\circ - \beta,$$

$$\therefore GE = GA,$$

$$\therefore \angle GAE = \angle GEA = 90^\circ - \beta,$$

$$\therefore \angle EFD = \angle BAC = 90^\circ$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle AFE \text{ 中, } 90^\circ - \beta + 180^\circ - 2\beta = 90^\circ,$$

解得 $\beta = 60^\circ$,

$$\therefore \angle DAC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ = \angle GAF,$$

设 $GF = x$ ，则 $AG = GE = 2x$ ， $AF = \sqrt{3}x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle EFA$ 中， $EF = 2x + x = 3x$ ，由勾股定理求得 $AE = 2\sqrt{3}x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle EAN$ 中, $AN = AE \cdot \cos 60^\circ = \sqrt{3}x$, $EN = DN = BN = AE \cdot \sin 60^\circ = 3x$,

$$\therefore AB = AC = 3x + \sqrt{3}x,$$

$$\therefore CG = AG + AC = (5 + \sqrt{3})x,$$

$$\therefore \frac{CG}{AG} = \frac{\sqrt{3} + 5}{2},$$

综上所述: $\frac{CG}{AG} = \frac{\sqrt{3} + 5}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$.

【点睛】 本题考查了三角形的内角和, 外角定理, 全等三角形的判定与性质, 平行四边形的判定与性质, 解直角三角形, 等腰三角形的分类讨论, 等边三角形的判定与性质, 熟练掌握知识点, 正确添加辅助线是解题的关键.