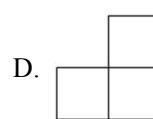
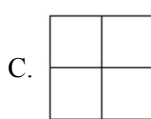
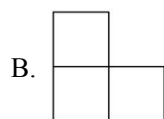
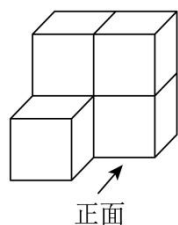


辽宁省中考数学试卷

第一部分 选择题 (共 30 分)

一、选择题 (本题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分. 在每小题给出的四个选项中, 有一项是符合题目要求的)

1. 如图是由 5 个相同的小立方块搭成的几何体, 这个几何体的俯视图是 ()



【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了三视图的知识, 俯视图是从物体的上面看得到的视图. 找到从上面看所得到的图形即可, 注意所有的看到的棱都应表现在俯视图中.

【详解】从上面看易得上面一层有 2 个正方形, 下面左边有 1 个正方形.

故选: A.

2. 亚洲、欧洲、非洲和南美洲的最低海拔如下表:

大洲	亚洲	欧洲	非洲	南美洲
最低海拔 /m	-415	-28	-156	-40

其中最低海拔最小的大洲是 ()

A. 亚洲

B. 欧洲

C. 非洲

D. 南美洲

【答案】A

【解析】

【分析】此题主要考查了负数的大小比较, 掌握负数比较大小, 绝对值大的反而小是解题关键. 比较各负数的绝对值, 绝对值最大的, 海拔就最低, 故可得出答案.

【详解】 $|-415| = 415$, $|-28| = 28$, $|-156| = 156$, $|-40| = 40$

$\therefore 415 > 156 > 40 > 28$,

$\therefore -415 < -156 < -40 < -28$,

∴海拔最低的是亚洲.

故选: A.

3. 越山向海, 一路花开. 在 5 月 24 日举行的 2024 辽宁省高品质文体旅融合发展大型产业招商推介活动中, 全省 30 个重大文体旅项目进行集中签约, 总金额达 532 亿元. 将 53200000000 用科学记数法表示为 ()

- A. 532×10^8 B. 53.2×10^9 C. 5.32×10^{10} D. 5.32×10^{11}

【答案】C

【解析】

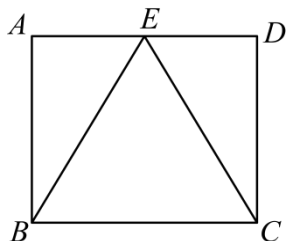
【分析】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 ≥ 10 时, n 是正整数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负整数.

【详解】解: $53200000000 = 5.32 \times 10^{10}$,

故选: C.

4. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 点 E 在 AD 上, 当 $\triangle EBC$ 是等边三角形时, $\angle AEB$ 为 ()



- A. 30° B. 45° C. 60° D. 120°

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了矩形的性质, 等边三角形的性质, 熟练掌握等边三角形的性质是解题的关键.

由矩形 $ABCD$ 得到 $AD \parallel BC$, 继而得到 $\angle AEB = \angle EBC$, 而 $\triangle EBC$ 是等边三角形, 因此得到 $\angle AEB = \angle EBC = 60^\circ$.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore \angle AEB = \angle EBC$,

$\because \triangle EBC$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle EBC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB = 60^\circ,$$

故选：C.

5. 下列计算正确的是 ()

A. $a^2 + a^3 = 2a^5$

B. $a^2 \cdot a^3 = a^6$

C. $(a^2)^3 = a^5$

D. $a(a+1) = a^2 + a$

【答案】D

【解析】

【分析】根据合并同类项、同底数幂的乘法、幂的乘方、单项式乘以多项式等知识点进行判定即可.

【详解】A. $a^3 + a^3 = 2a^3$, 故本选项原说法不符合题意;

B. $a^2 \cdot a^3 = a^5$, 故本选项原说法不合题意;

C. $(a^2)^3 = a^6$, 故本选项原说法不合题意;

D. $a(a+1) = a^2 + a$, 故本选项符合题意.

故选：D.

【点睛】此题考查了整式的运算，涉及的知识有：合并同类项、同底数幂的乘法、幂的乘方、单项式乘以多项式的运算，熟练掌握运算是解本题的关键.

6. 一个不透明袋子中装有 4 个白球，3 个红球，2 个绿球，1 个黑球，每个球除颜色外都相同. 从中随机摸出一个球，则下列事件发生的概率为 $\frac{3}{10}$ 的是 ()

A. 摸出白球

B. 摸出红球

C. 摸出绿球

D. 摸出黑球

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了概率，熟练掌握概率公式是解题关键. 分别求出摸出四种颜色球的概率，即可得到答案.

【详解】解：A、摸出白球的概率为 $\frac{4}{4+3+2+1} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, 不符合题意;

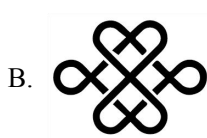
B、摸出红球 $\frac{3}{4+3+2+1} = \frac{3}{10}$, 符合题意;

C、摸出绿球 $\frac{2}{4+3+2+1} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, 不符合题意;

D、摸出黑球 $\frac{1}{4+3+2+1} = \frac{1}{10}$, 不符合题意;

故选：B.

7. 纹样是我国古代艺术中的瑰宝. 下列四幅纹样图形既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了中心对称图形与轴对称图形的概念，轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合，中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180 度后与原图重合.

根据轴对称图形和中心对称图形的概念，对各选项分析判断即可得解. 把一个图形绕某一点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形就叫做中心对称图形；如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形叫做轴对称图形.

【详解】解：A、既不是轴对称图形也不是中心对称图形，故本选项不符合题意；

B、既是轴对称图形又是中心对称图形，故本选项符合题意；

C、是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项不符合题意；

D、不是轴对称图形，是中心对称图形，故本选项不符合题意.

故选：B.

8. 我国古代数学著作《孙子算经》中有“雉兔同笼”问题：“今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问雉兔各几何？”其大意是：鸡兔同笼，共有 35 个头，94 条腿，问鸡兔各多少只？设鸡有 x 只，兔有 y 只，根据题意可列方程组为 ()

A.
$$\begin{cases} x + y = 94 \\ 4x + 2y = 35 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x + y = 94 \\ 2x + 4y = 35 \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x + y = 35 \\ 4x + 2y = 94 \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x + y = 35 \\ 2x + 4y = 94 \end{cases}$$

【答案】D

【解析】

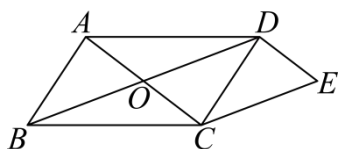
【分析】本题考查了二元一次方程组的应用，找出等量关系是解题关键. 设鸡有 x 只，兔有 y 只，根据“鸡兔同笼，共有 35 个头，94 条腿”列二元一次方程组即可.

【详解】解：设鸡有 x 只，兔有 y 只，

由题意得：
$$\begin{cases} x + y = 35 \\ 2x + 4y = 94 \end{cases}$$

故选：D.

9. 如图， $ABCD$ 的对角线 AC ， BD 相交于点 O ， $DE \parallel AC$ ， $CE \parallel BD$ ，若 $AC = 3$ ， $BD = 5$ ，则四边形 $OCED$ 的周长为 ()



A. 4

B. 6

C. 8

D. 16

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的判定与性质，熟练掌握知识点是解题的关键.

由四边形 $ABCD$ 是平行四边形得到 $DO = 2.5$, $OC = 1.5$, 再证明四边形 $OCED$ 是平行四边形, 则 $DE = OC = 1.5, CE = OD = 2.5$, 即可求解周长.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore DO = \frac{1}{2}DB = 2.5, \quad OC = \frac{1}{2}AC = 1.5,$$

$$\therefore DE \parallel AC, \quad CE \parallel BD,$$

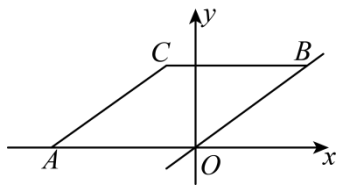
$\therefore$ 四边形 $OCED$ 是平行四边形,

$$\therefore DE = OC = 1.5, CE = OD = 2.5,$$

$$\therefore \text{周长为: } 2 \times (1.5 + 2.5) = 8,$$

故选: C.

10. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 菱形 $AOBC$ 的顶点 A 在 x 轴负半轴上, 顶点 B 在直线 $y = \frac{3}{4}x$ 上, 若点 B 的横坐标是 8, 为点 C 的坐标为 ()

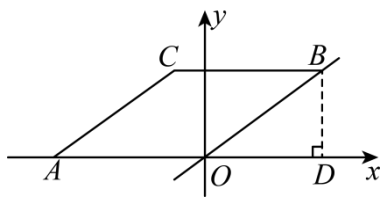
A. $(-1, 6)$ B. $(-2, 6)$ C. $(-3, 6)$ D. $(-4, 6)$

【答案】B

【解析】

【分析】过点 B 作 $BD \perp x$ 轴, 垂足为点 D , 先求出 $B(8, 6)$, 由勾股定理求得 $BO = 10$, 再由菱形的性质得到 $BC = BO = 10, BC \parallel x$ 轴, 最后由平移即可求解.

【详解】解：过点 B 作 $BD \perp x$ 轴，垂足为点 D ，



$\therefore$ 顶点 B 在直线 $y = \frac{3}{4}x$ 上，点 B 的横坐标是 8，

$\therefore y_B = 8 \times \frac{3}{4} = 6$ ，即 $BD = 6$ ，

$\therefore B(8, 6)$ ，

$\therefore BD \perp x$ 轴，

$\therefore$ 由勾股定理得： $BO = \sqrt{BD^2 + DO^2} = 10$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore BC = BO = 10, BC \parallel x$ 轴，

$\therefore$ 将点 B 向左平移 10 个单位得到点 C ，

$\therefore$ 点 $C(-2, 6)$ ，

故选：B.

【点睛】本题考查了一次函数的图像，勾股定理，菱形的性质，点的坐标平移，熟练掌握知识点，正确添加辅助线是解题的关键.

第二部分 非选择题 (共 90 分)

二、填空题 (本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分)

11. 方程 $\frac{5}{x+2} = 1$ 的解为_____.

【答案】 $x = 3$

【解析】

【分析】本题考查了解分式方程，熟练掌握解分式方程的步骤是解题的关键.

先去分母，再解一元一次方程，最后再检验.

【详解】解： $\frac{5}{x+2} = 1$ ，

$x + 2 = 5$ ，

解得： $x = 3$ ，

经检验： $x = 3$ 是原方程的解，

∴原方程的解为： $x=3$ ，

故答案为： $x=3$ 。

12. 在平面直角坐标系中，线段 AB 的端点坐标分别为 $A(2,-1)$ ， $B(1,0)$ ，将线段 AB 平移后，点 A 的对应点 A' 的坐标为 $(2,1)$ ，则点 B 的对应点 B' 的坐标为_____。

【答案】 $(1,2)$

【解析】

【分析】 本题考查了平面直角坐标系中点的平移，熟练掌握知识点是解题的关键。

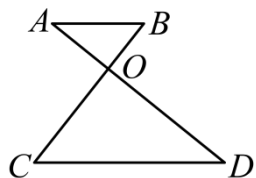
先由点 A 和点 A' 确定平移方式，即可求出点 B' 的坐标。

【详解】 解：由点 $A(2,-1)$ 平移至点 $A'(2,1)$ 得，点 A 向上平移了 2 个单位得到点 A' ，

∴ $B(1,0)$ 向上平移 2 个单位后得到点 $B'(1,2)$ ，

故答案为： $(1,2)$ 。

13. 如图， $AB \parallel CD$ ， AD 与 BC 相交于点 O ，且 $\triangle AOB$ 与 $\triangle DOC$ 的面积比是 $1:4$ ，若 $AB=6$ ，则 CD 的长为_____。



【答案】 12

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的判定与性质，把握相似三角形面积比等于相似比的平方是解题的关键。

可得 $\triangle AOB \sim \triangle DOC$ ，再根据相似三角形面积比等于相似比的平方即可求解。

【详解】 解：∵ $AB \parallel CD$ ，

∴ $\triangle AOB \sim \triangle DOC$ ，

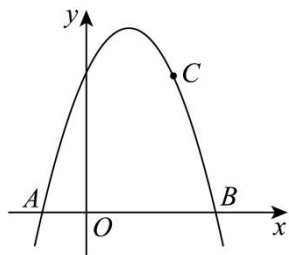
$$\therefore \frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle DOC}} = \left(\frac{AB}{CD}\right)^2,$$

$$\therefore \frac{1}{4} = \left(\frac{6}{CD}\right)^2,$$

∴ $CD=12$ ，

故答案为： 12。

14. 如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 与 x 轴相交于点 A ， B ，点 B 的坐标为 $(3, 0)$ ，若点 $C(2, 3)$ 在抛物线上，则 AB 的长为_____.



【答案】 4

【解析】

【分析】 本题主要考查了待定系数求二次函数的解析式，二次函数的性质，熟练求解二次函数的解析式是解题的关键. 先利用待定系数法求得抛物线 $y = -x^2 + 2x + 3$ ，再令 $y = 0$ ，得 $0 = -x^2 + 2x + 3$ ，解得 $x = -1$ 或 $x = 3$ ，从而即可得解.

【详解】 解：把点 $B(3, 0)$ ，点 $C(2, 3)$ 代入抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 得，

$$\begin{cases} 0 = 9a + 3b + 3 \\ 3 = 4a + 2b + 3 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线 } y = -x^2 + 2x + 3,$$

$$\text{令 } y = 0, \text{ 得 } 0 = -x^2 + 2x + 3,$$

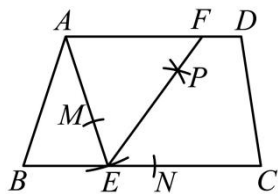
$$\text{解得 } x = -1 \text{ 或 } x = 3,$$

$$\therefore A(-1, 0),$$

$$\therefore AB = 3 - (-1) = 4;$$

故答案为：4.

15. 如图，四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AD > AB$ ， $AD = a$ ， $AB = 10$. 以点 A 为圆心，以 AB 长为半径作图，与 BC 相交于点 E ，连接 AE . 以点 E 为圆心，适当长为半径作弧，分别与 EA ， EC 相交于点 M ， N ，再分别以点 M ， N 为圆心，大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径作弧，两弧在 $\angle AEC$ 的内部相交于点 P ，作射线 EP ，与 AD 相交于点 F ，则 FD 的长为_____ (用含 a 的代数式表示).



【答案】 $a-10$

【解析】

【分析】 本题考查了作图 - 作角平分线，平行线的性质，等腰三角形的判定，熟练掌握知识点是解题的关键.

利用基本作图得到 $AE = AB = 10$ ， EF 平分 $\angle AEC$ ，接着证明 $\angle AEF = \angle AFE$ 得到 $AF = AE = 10$ ，然后利用 $FD = AD - AF$ 求解.

【详解】 解：由作法得 $AE = AB = 10$ ， EF 平分 $\angle AEC$ ，

$$\therefore \angle AEF = \angle CEF,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle CEF,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle AFE,$$

$$\therefore AF = AE = 10,$$

$$\therefore FD = AD - AF = a - 10.$$

故答案为： $a-10$.

三、解答题（本题共 8 小题，共 75 分. 解答应写出文字说明、演算步骤或推理过程）

16. (1) 计算： $4^2 + 10 \div (-1) + \sqrt{8} + |3 - \sqrt{2}|$ ；

(2) 计算： $\frac{a}{a+1} \cdot \frac{a^2-1}{a^2} + \frac{1}{a}$.

【答案】 (1) $9 + \sqrt{2}$ ； (2) 1

【解析】

【分析】 本题考查了实数的运算，分式的化简，熟练掌握知识点是解题的关键.

(1) 先化简二次根式，去绝对值，再进行加减运算；

(2) 先计算乘法，再计算加法即可.

【详解】 解：(1) 原式 $= 16 - 10 + 2\sqrt{2} + 3 - \sqrt{2}$
 $= 9 + \sqrt{2}$ ；

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ 原式} &= \frac{a}{a+1} \cdot \frac{(a+1)(a-1)}{a^2} + \frac{1}{a} \\
 &= \frac{a-1}{a} + \frac{1}{a} \\
 &= \frac{a-1+1}{a} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

17. 甲、乙两个水池注满水，蓄水量均为 36m^3 、工作期间需同时排水，乙池的排水速度是 $8\text{m}^3/\text{h}$ 。若排水 3h，则甲池剩余水量是乙池剩余水量的 2 倍。

(1) 求甲池的排水速度。

(2) 工作期间，如果这两个水池剩余水量的和不少于 24m^3 ，那么最多可以排水几小时？

【答案】(1) $4\text{m}^3/\text{h}$

(2) 4 小时

【解析】

【分析】本题考查了列一元一次方程解应用题，一元一次不等式的应用，熟练掌握知识点，正确理解题意是解题的关键。

(1) 设甲池的排水速度为 $x\text{m}^3/\text{h}$ ，由题意得， $36-3x=2(36-8\times 3)$ ，解方程即可；

(2) 设排水 a 小时，则 $36\times 2-(4+8)a\geq 24$ ，再解不等式即可。

【小问 1 详解】

解：设甲池的排水速度为 $x\text{m}^3/\text{h}$ ，

由题意得， $36-3x=2(36-8\times 3)$ ，

解得： $x=4$ ，

答：甲池的排水速度为 $4\text{m}^3/\text{h}$ ；

【小问 2 详解】

解：设排水 a 小时，

则 $36\times 2-(4+8)a\geq 24$ ，

解得： $a\leq 4$ ，

答：最多可以排 4 小时。

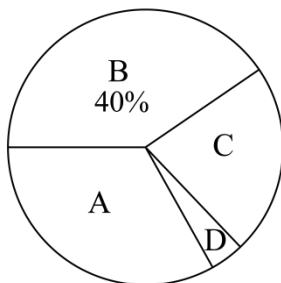
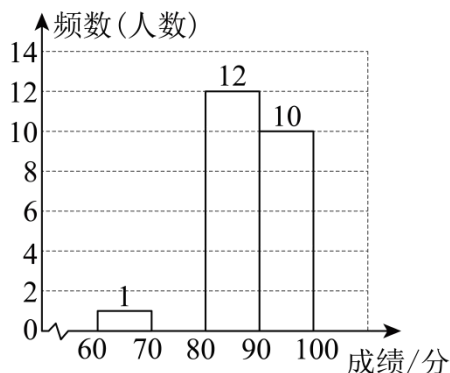
18. 某校为了解七年级学生对消防安全知识掌握的情况，随机抽取该校七年级部分学生进行测试，并对测试

成绩进行收集、整理、描述和分析（测试满分为 100 分，学生测试成绩 x 均为不小于 60 的整数，分为四个等级： $D: 60 \leq x < 70$ ， $C: 70 \leq x < 80$ ， $B: 80 \leq x < 90$ ， $A: 90 \leq x \leq 100$ ），部分信息如下：

信息一：

学生成绩频数分布直方图

学生成绩扇形统计图



信息二：学生成绩在 B 等级的数据（单位：分）如下：

80, 81, 82, 83, 84, 84, 84, 86, 86, 86, 88, 89

请根据以上信息，解答下列问题：

- (1) 求所抽取的学生成绩为 C 等级的人数；
- (2) 求所抽取的学生成绩的中位数；
- (3) 该校七年级共有 360 名学生，若全年级学生都参加本次测试，请估计成绩为 A 等级的人数。

【答案】(1) 7 人 (2) 85

(3) 120 人

【解析】

【分析】本题考查了扇形统计图和频数分布直方图，中位数，用样本估计总体，正确理解题意是解题的关键。

- (1) 先根据 B 的人数以及所占百分比求得总人数，再拿总人数减去 A 、 B 、 D 的人数即可；
- (2) 总人数为 30 人，因此中位数是第 15 和第 16 名同学的成绩的平均数，由于 C 中 1 人， D 中 7 人， B 中 12 人，故中位数是 B 中第 7 和第 8 名同学的成绩的平均数，因此中位数为： $(84 + 86) \div 2 = 85$ ；
- (3) 拿 360 乘以 A 等级的人数所占百分比即可。

【小问 1 详解】

解：总人数为： $12 \div 40\% = 30$ （人），

$\therefore$ 抽取的学生成绩为 C 等级的人数为： $30 - 1 - 12 - 10 = 7$ （人）；

【小问 2 详解】

解：总人数为 30 人，因此中位数是第 15 和第 16 名同学的成绩的平均数，

$\because C$ 中 1 人， D 中 7 人， B 中 12 人，故中位数是 B 中第 7 和第 8 名同学的成绩的平均数，

$\therefore$ 中位数为： $(84+86) \div 2 = 85$ ；

【小问 3 详解】

解：成绩为 A 等级的人数为： $360 \times \frac{10}{30} = 120$ （人），

答：成绩为 A 等级的人数为 120.

19. 某商场出售一种商品，经市场调查发现，日销售量 y （件）与每件售价 x （元）满足一次函数关系，部分数据如下表所示：

每件售价 x /元	...	45	55	65	...
日销售量 y /件	...	55	45	35	...

(1) 求 y 与 x 之间的函数关系式（不要求写出自变量 x 的取值范围）；

(2) 该商品日销售额能否达到 2600 元？如果能，求出每件售价；如果不能，请说明理由.

【答案】(1) $y = -x + 100$ ；

(2) 该商品日销售额不能达到 2600 元，理由见解析。

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的应用以及一元二次方程的应用，解题的关键是：(1) 利用待定系数法求出 y 与 x 之间的函数表达式；(2) 找准等量关系，正确列出一元二次方程.

(1) 根据表格中的数据，利用待定系数法即可求出 y 与 x 之间的函数表达式；

(2) 利用销售额 = 每件售价 $\times$ 销售量，即可得出关于 x 的一元二次方程，利用根与系数的关系求解即可.

【小问 1 详解】

解：设 y 与 x 之间的函数表达式为 $y = kx + b (k \neq 0)$ ，

将 $(45, 55)$ ， $(55, 45)$ 代入 $y = kx + b$ 得

$$\begin{cases} 45k + b = 55 \\ 55k + b = 45 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -1 \\ b = 100 \end{cases}$$

$\therefore y$ 与 x 之间的函数表达式为 $y = -x + 100$ ；

【小问 2 详解】

解：该商品日销售额不能达到 2600 元，理由如下：

$$\text{依题意得 } x(-x+100)=2600,$$

$$\text{整理得 } x^2-100x+2600=0,$$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-100)^2 - 4 \times 1 \times 2600 = -400 < 0,$$

$\therefore$ 该商品日销售额不能达到 2600 元.

20. 如图 1，在水平地面上，一辆小车用一根绕过定滑轮的绳子将物体竖直向上提起. 起始位置示意图如图 2，此时测得点 A 到 BC 所在直线的距离 $AC = 3\text{m}$ ， $\angle CAB = 60^\circ$ ；停止位置示意图如图 3，此时测得 $\angle CDB = 37^\circ$ （点 C，A，D 在同一直线上，且直线 CD 与平面平行，图 3 中所有点在同一平面内. 定滑轮半径忽略不计，运动过程中绳子总长不变.（参考数据： $\sin 37^\circ \approx 0.60$ ， $\cos 37^\circ \approx 0.80$ ， $\tan 37^\circ \approx 0.75$ ， $\sqrt{3} \approx 1.73$ ）

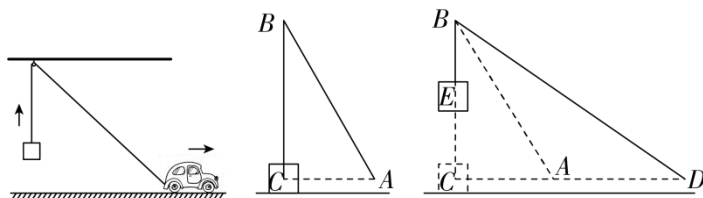


图1

图2

图3

- (1) 求 AB 的长；
- (2) 求物体上升的高度 CE （结果精确到 0.1m ）.

【答案】(1) 6m

(2) 2.7m

【解析】

【分析】本题考查了解直角三角形的应用，勾股定理，熟练掌握知识点是解题的关键.

(1) 解 $\text{Rt}\triangle ABC$ 即可求解；

(2) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，由勾股定理得， $BC = 3\sqrt{3}$ ，解 $\text{Rt}\triangle BCD$ 求得 $BD = 5\sqrt{3}$ ，由题意得，

$$BC + AB = BE + BD, \text{ 故 } BE = BC + AB - BD = 6 - 2\sqrt{3}, \text{ 则 } CE = BC - BE \approx 2.7\text{m}.$$

【小问 1 详解】

解：由题意得， $\angle BCA = 90^\circ$ ，

$$\because AC = 3\text{m}, \angle CAB = 60^\circ,$$

$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle ABC \text{ 中, 由 } \cos \angle A = \frac{AC}{AB},$$

$$\text{得: } \frac{3}{AB} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AB = 6\text{m},$$

$$\text{答: } AB = 6\text{m};$$

【小问2 详解】

$$\text{解: 在 Rt}\triangle ABC \text{ 中, 由勾股定理得, } BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 3\sqrt{3},$$

$$\text{在 Rt}\triangle BCD \text{ 中, } \sin \angle CDB = \frac{BC}{BD},$$

$$\therefore \sin 37^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{BD} = 0.6,$$

$$\therefore BD = 5\sqrt{3},$$

$$\text{由题意得, } BC + AB = BE + BD,$$

$$\therefore BE = BC + AB - BD = 3\sqrt{3} + 6 - 5\sqrt{3} = 6 - 2\sqrt{3},$$

$$\therefore CE = BC - BE = 3\sqrt{3} - (6 - 2\sqrt{3}) = 5\sqrt{3} - 6 \approx 2.7\text{m},$$

答: 物体上升的高度约为 2.7m.

21. 如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 D 在 $\widehat{BC}$ 上, $\widehat{AC} = \widehat{BD}$, E 在 BA 的延长线上, $\angle CEA = \angle CAD$.

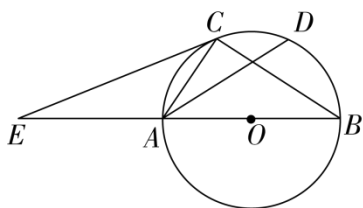


图1

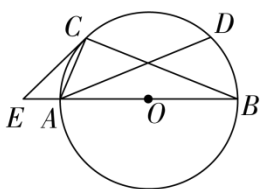


图2

(1) 如图 1, 求证: CE 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 如图 2, 若 $\angle CEA = 2\angle DAB$, $OA = 8$, 求 $\widehat{BD}$ 的长.

【答案】(1) 见详解 (2) 2π

【解析】

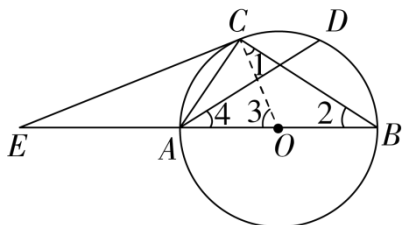
【分析】(1) 连接 CO , 则 $\angle 1 = \angle 2$, 故 $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2 = 2\angle 2$, 由 $\widehat{AC} = \widehat{BD}$, 得到 $\angle 4 = \angle 2$, 而 $\angle ACB = 90^\circ$, 则 $\angle CAD + 2\angle 2 = 90^\circ$, 由 $\angle CEA = \angle CAD$, 得 $\angle CEA + 2\angle 2 = 90^\circ$, 因此 $\angle CEA + \angle 3 = 90^\circ$, 故 $\angle ECO = 90^\circ$, 则 CE 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 连接 CO, DO , 可得 $\angle 3 = 2\angle 2 = 2\angle 4 = \angle CEA$, 则 $\angle 3 = \angle CEA = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$, 故 $\angle 4 = 22.5^\circ$, 由

$\widehat{BD} = \widehat{BD}$, 得 $\angle DOB = 2\angle 4 = 45^\circ$, 那么 $\widehat{BD}$ 长为 $\frac{45 \times \pi \times 8}{180} = 2\pi$.

【小问 1 详解】

证明：连接 CO,


$$\because OC = OB,$$
$$\therefore \angle 1 = \angle 2,$$
$$\therefore \angle 3 = \angle 1 + \angle 2 = 2\angle 2,$$
$$\therefore \widehat{AC} = \widehat{BD},$$
$$\therefore \angle 4 = \angle 2,$$

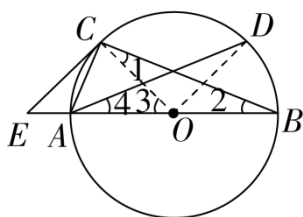
$\therefore AB$ 为直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$
$$\therefore \angle CAD + \angle 4 + \angle 2 = 90^\circ, \text{ 即 } \angle CAD + 2\angle 2 = 90^\circ,$$
$$\therefore \angle CEA = \angle CAD,$$
$$\therefore \angle CEA + 2\angle 2 = 90^\circ,$$
$$\therefore \angle CEA + \angle 3 = 90^\circ,$$
$$\therefore \angle ECO = 90^\circ,$$
$$\therefore OC \perp CE,$$

$\therefore CE$ 是 $\odot O$ 的切线;

【小问 2 详解】

解: 连接 CO, DO ,



由 (1) 得 $\angle 3 = 2\angle 2 = 2\angle 4$,

$\therefore \angle CEA = 2\angle DAB$,

$\therefore \angle CEA = \angle 3$,

$\therefore \angle ECO = 90^\circ$,

$\therefore \angle 3 = \angle CEA = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$,

$\therefore \angle 4 = 22.5^\circ$,

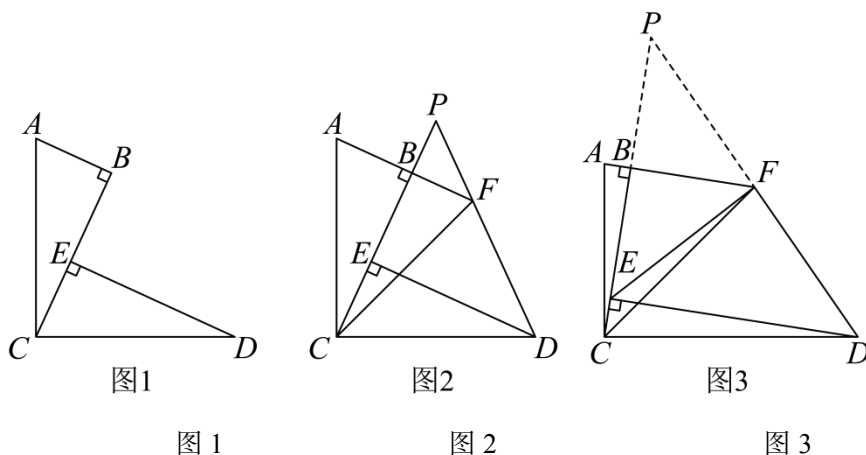
$\therefore \widehat{BD} = \widehat{BD}$,

$\therefore \angle DOB = 2\angle 4 = 45^\circ$,

$\therefore \widehat{BD}$ 长为: $\frac{45 \times \pi \times 8}{180} = 2\pi$.

【点睛】 本题考查了圆周角定理，切线的判定，直角三角形的性质，三角形的外角性质，弧长公式等，正确添加辅助线是解决本题的关键.

22. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle ACB = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 45^\circ$). 将线段 CA 绕点 C 顺时针旋转 90° 得到线段 CD ，过点 D 作 $DE \perp BC$ ，垂足为 E .



(1) 如图 1，求证: $\triangle ABC \cong \triangle CED$;

(2) 如图 2， $\angle ACD$ 的平分线与 AB 的延长线相交于点 F ，连接 DF ， DF 的延长线与 CB 的延长线相交于点 P ，猜想 PC 与 PD 的数量关系，并加以证明;

(3) 如图 3，在 (2) 的条件下，将 $\triangle BFP$ 沿 AF 折叠，在 α 变化过程中，当点 P 落在点 E 的位置时，连接 EF .

①求证: 点 F 是 PD 的中点;

②若 $CD = 20$ ，求 $\triangle CEF$ 的面积.

【答案】(1) 见详解 (2) $PC = PD$

(3) 30

【解析】

【分析】(1) 利用“AAS”即可证明；

(2) 可知 $\angle A = 90^\circ - \alpha$ ，证明 $\triangle ACF \cong \triangle DCF$ ，则 $\angle CDF = \angle A = 90^\circ - \alpha$ ，可得 $\angle BCD = 90^\circ - \alpha$ ，则 $\angle BCD = \angle CDF$ ，故 $PC = PD$ ；

(3) ①翻折得 $FP = FE$ ，根据等角的余角相等得到 $\angle FED = \angle FDE$ ，故 $FE = FD$ ，则 $FP = FD$ ，即点 F 是 PD 中点；

②过点 F 作 $FM \parallel CP$ 交 CD 于点 M ，连接 EM ，设 $CE = m$ ， $DE = CB = n$ ，则 $BE = CB - CE = n - m$ ，由翻折得 $PB = BE = n - m$ ，故 $PE = 2n - 2m$ ，因此 $PC = 2n - m = PD$ ，在 $\text{Rt}\triangle PDE$ 中，由勾股定理得：

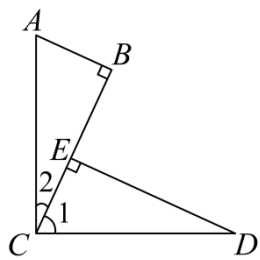
$(2n - m)^2 = (2n - 2m)^2 + n^2$ ，解得： $n = 3m$ 或 $n = m$ （舍，此时 $\alpha = 45^\circ$ ），在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中，由勾股

定理得： $m^2 + (3m)^2 = 20^2$ ，解得： $m^2 = 40$ ，则 $S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2}CE \cdot DE = \frac{3}{2}m^2 = 60$ ，由 $FM \parallel BC$ ，得到

$\frac{DF}{PF} = \frac{DM}{CM} = 1$ ， $S_{\triangle CEM} = S_{\triangle CEF}$ ，因此 $S_{\triangle CEM} = \frac{1}{2}S_{\triangle CED} = 30$ ，故 $S_{\triangle CEF} = 30$ 。

【小问 1 详解】

证明：如图，



由题意得， $CA = CD$ ， $\angle ACD = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$

$\because DE \perp BC$ ，

$\therefore \angle DEC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle 1 + \angle D = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle 2 = \angle D$ ，

$\because \angle ABC = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle B = \angle DEC,$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CED (\text{AAS});$$

【小问 2 详解】

猜想: $PC = PD$

证明: $\because \angle ABC = 90^\circ, \angle ACB = \alpha$

$$\therefore \angle A = 90^\circ - \alpha,$$

$\because CF$ 平分 $\angle ACD$,

$$\therefore \angle ACF = \angle DCF,$$

$$\because CA = CD, CF = CF,$$

$$\therefore \triangle ACF \cong \triangle DCF,$$

$$\therefore \angle CDF = \angle A = 90^\circ - \alpha,$$

$$\because \angle ACD = 90^\circ, \angle ACB = \alpha,$$

$$\therefore \angle BCD = 90^\circ - \alpha,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle CDF,$$

$$\therefore PC = PD;$$

【小问 3 详解】

解: ①由题意得 $FP = FE$,

$$\therefore \angle P = \angle FEP,$$

$$\because \angle DEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PED = 90^\circ,$$

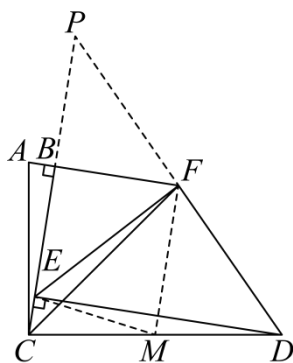
$$\therefore \angle P + \angle FDE = 90^\circ, \angle FEP + \angle FED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FED = \angle FDE,$$

$$\therefore FE = FD,$$

$\therefore FP = FD$, 即点 F 是 PD 中点;

②过点 F 作 $FM \parallel CP$ 交 CD 于点 M , 连接 EM ,



$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CED,$$

$$\therefore DE = CB,$$

设 $CE = m$, $DE = CB = n$,

$$\therefore BE = CB - CE = n - m,$$

由翻折得 $PB = BE = n - m$,

$$\therefore PE = 2n - 2m.$$

$$\therefore PC = PE + CE = 2n - m = PD.$$

在 $\text{Rt}\triangle PDE$ 中, 由勾股定理得: $(2n-m)^2 = (2n-2m)^2 + n^2$,

整理得, $3m^2 - 4mn + n^2 = 0$,

解得: $n = 3m$ 或 $n = m$ (舍, 此时 $\alpha = 45^\circ$),

在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中, 由勾股定理得: $m^2 + (3m)^2 = 20^2$,

解得: $m^2 = 40$,

$$\therefore S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} CE \cdot DE = \frac{1}{2} m \times 3m = \frac{3}{2} m^2 = 60,$$

$$\therefore FM \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{DF}{PF} = \frac{DM}{CM} = 1, \quad S_{\triangle CEM} = S_{\triangle CEF},$$

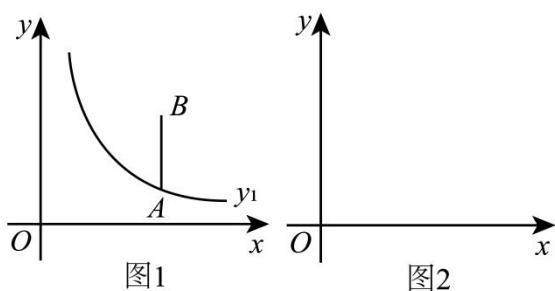
$\therefore$ 点 M 为 CD 中点,

$$\therefore S_{\Delta CEM} = \frac{1}{2} S_{\Delta CED} = 30,$$

$$\therefore S_{\Delta CEF} = 30.$$

【点睛】本题考查了全等三角形的判定与性质，等腰三角形的判定，翻折的性质，勾股定理解三角形，平行线分线段成比例定理，正确添加辅助线是解题的关键.

23. 已知 y_1 是自变量 x 的函数, 当 $y_2 = xy_1$ 时, 称函数 y_2 为函数 y_1 的“升幂函数”. 在平面直角坐标系中, 对于函数 y_1 图象上任意一点 $A(m, n)$, 称点 $B(m, mn)$ 为点 A “关于 y_1 的升幂点”, 点 B 在函数 y_1 的“升幂函数” y_2 的图象上. 例如: 函数 $y_1 = 2x$, 当 $y_2 = xy_1 = x \cdot 2x = 2x^2$ 时, 则函数 $y_2 = 2x^2$ 是函数 $y_1 = 2x$ 的“升幂函数”. 在平面直角坐标系中, 函数 $y_1 = 2x$ 的图象上任意一点 $A(m, 2m)$, 点 $B(m, 2m^2)$ 为点 A “关于 y_1 的升幂点”, 点 B 在函数 $y_1 = 2x$ 的“升幂函数” $y_2 = 2x^2$ 的图象上.



(1) 求函数 $y_1 = \frac{1}{2}x$ 的“升幂函数” y_2 的函数表达式;

(2) 如图 1, 点 A 在函数 $y_1 = \frac{3}{x} (x > 0)$ 的图象上, 点 A “关于 y_1 的升幂点” B 在点 A 上方, 当 $AB = 2$ 时, 求点 A 的坐标;

(3) 点 A 在函数 $y_1 = -x + 4$ 的图象上, 点 A “关于 y_1 的升幂点” 为点 B, 设点 A 的横坐标为 m .

①若点 B 与点 A 重合, 求 m 的值;

②若点 B 在点 A 的上方, 过点 B 作 x 轴的平行线, 与函数 y_1 的“升幂函数” y_2 的图象相交于点 C, 以 AB, BC 为邻边构造矩形 ABCD, 设矩形 ABCD 的周长为 y , 求 y 关于 m 的函数表达式;

③在②的条件下, 当直线 $y = t_1$ 与函数 y 的图象的交点有 3 个时, 从左到右依次记为 E, F, G, 当直线 $y = t_2$ 与函数 y 的图象的交点有 2 个时, 从左到右依次记为 M, N, 若 $EF = MN$, 请直接写出 $t_2 - t_1$ 的值.

【答案】(1) $y_2 = \frac{1}{2}x^2$

(2) $A(3, 1)$

(3) ① $m = 1$ 或 $m = 4$; ② $y_2 = \begin{cases} -2m^2 + 6m & (1 < m \leq 2) \\ -2m^2 + 14m - 16 & (2 < m < 4) \end{cases}$; ③ $t_2 - t_1 = 4$ 或 $t_2 - t_1 = 3 - 2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】(1) 根据“升幂函数”的定义, 可得 $y_2 = xy_1 = x \cdot \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x^2$, 即可求解,

(2) 设 $A\left(a, \frac{3}{a}\right)$, 根据“升幂点”的定义得到 $B(a, 3)$, 由 $AB = 2$, B 在点 A 上方, 得到 $AB = 3 - \frac{3}{a} = 2$,

即可求解,

(3) ①由 $A(m, -m+4)$, $B(m, -m^2+4m)$, 点 B 与点 A 重合, 得到 $-m+4 = -m^2+4m$, 即可求解, ②

由 $y_2 = -x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4$, 得到 y_2 对称轴为 $x=2$, B 、 C 关于对称轴对称, 结合 $A(m, -m+4)$,

则 $B(m, -m^2+4m)$, 得到 $\frac{y_c+m}{2} = 2$, 进而得到 $C(4-m, -m^2+4m)$, $D(4-m, -m+4)$, 由点 B 在点 A

的上方, 得到点 B 在点 A 的上方, $-m^2+4m - (-m+4) = -m^2+5m-4 > 0$, 解得: $1 < m < 4$,

$AB = -m^2+4m - (-m+4) = -m^2+5m-4$, 当 $2 < m < 4$, $BC = m - (4-m) = 2m-4$,

$y = 2(AB+BC) = 2(-m^2+5m-4+2m-4) = -2m^2+14m-16$, 当 $1 < m \leq 2$,

$BC = 4-m-m = 4-2m$, $y = 2(AB+BC) = 2(-m^2+5m-4+4-2m) = -2m^2+6m$, 即可求解, ③根

据②中结论得到, $H\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$, $I\left(\frac{7}{2}, \frac{17}{2}\right)$, 将 $m=1$, $m=2$, $m=4$ 代入, 得到 $R(1, 4)$, $P(2, 4)$, $Q(4, 8)$,

结合图像可得, 当 $4 < t_1 < \frac{9}{2}$ 时, 直线 $y=t_1$ 与函数 y 的图象有 3 个交点, 当 $8 < t_2 < \frac{17}{2}$ 时, 直线 $y=t_2$ 与函

数 y 的图象有 2 个交点, 将直线 $y=t_1$ 与函数 y 联立, 由根与系数关系得到 $x_1+x_2 = -\frac{6}{-2} = 3$, $x_1x_2 = \frac{t_1}{2}$,

$EF = \sqrt{9-2t_1}$, 将直线 $y=t_2$ 与函数 y 联立, 由根与系数关系得到 $x_3+x_4 = -\frac{-14}{2} = 7$, $x_3x_4 = 8 + \frac{t_2}{2}$,

$MN = \sqrt{17-2t_2}$, 结合 $EF = MN$, 可得 $t_2 - t_1 = 4$, 当 $t_2 = \frac{9}{2}$ 时, $-2m^2+14m-16 = \frac{9}{2}$, 解得: $m = \frac{7}{2} - \sqrt{2}$,

由 $EF = MN = \frac{7}{2} - \sqrt{2} - \frac{3}{2} = 2 - \sqrt{2}$, 得到 $EF = \sqrt{9-2t_1} = 2 - \sqrt{2}$, 解得: $t_1 = \frac{3}{2} + 2\sqrt{2}$, 即可求解,

【点睛】本题考查了, 求二次函数解析式, 二次函数的性质, 二次函数综合, 根据系数关系, 解题的关键是: 熟练掌握二次函数的性质, 将题目所给条件进行转化.

【小问 1 详解】

解: 根据题意得: $y_2 = xy_1 = x \cdot \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x^2$,

故答案为: $y_2 = \frac{1}{2}x^2$,

【小问 2 详解】

解: 设点 $A\left(a, \frac{3}{a}\right)$, 则 $B(a, 3)$,

$\therefore AB = 2$, B 在点 A 上方,

$$\therefore AB = 3 - \frac{3}{a} = 2, \quad \text{解得: } a = 3,$$

$$\therefore A(3, 1);$$

【小问3详解】

解：①根据题意得： $A(m, -m+4)$ ，则 $B(m, -m^2+4m)$ ，

$\therefore$ 点 B 与点 A 重合，

$$\therefore -m+4 = -m^2+4m, \quad \text{解得: } m=1 \text{ 或 } m=4,$$

$$\textcircled{2} \text{根据题意得: } y_2 = -x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4,$$

$\therefore y_2$ 对称轴为 $x=2$ ， B 、 C 关于对称轴对称，

$$\therefore A(m, -m+4), \quad \text{则 } B(m, -m^2+4m),$$

$$\therefore \frac{y_c + m}{2} = 2, \quad \text{解得: } y_c = 4 - m,$$

$$\therefore C(4-m, -m^2+4m), \quad D(4-m, -m+4),$$

$\therefore$ 点 B 在点 A 的上方，

$$\therefore -m^2+4m - (-m+4) = -m^2+5m-4 > 0, \quad \text{解得: } 1 < m < 4,$$

$$\therefore AB = -m^2+4m - (-m+4) = -m^2+5m-4,$$

$$\text{当 } 2 < m < 4, \text{ 点 } B \text{ 在点 } C \text{ 右侧时, } BC = m - (4-m) = 2m-4,$$

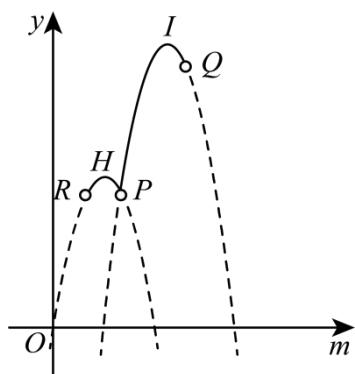
$$y = 2(AB + BC) = 2(-m^2+5m-4+2m-4) = -2m^2+14m-16,$$

$$\text{当 } 1 < m \leq 2, \text{ 点 } B \text{ 在点 } C \text{ 左侧时, } BC = 4-m-m = 4-2m,$$

$$y = 2(AB + BC) = 2(-m^2+5m-4+4-2m) = -2m^2+6m,$$

$$\therefore y = \begin{cases} -2m^2+6m & (1 < m \leq 2) \\ -2m^2+14m-16 & (2 < m < 4) \end{cases},$$

$$\textcircled{3} \therefore y = \begin{cases} -2m^2+6m = -2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} & (1 < m \leq 2) \\ -2m^2+14m-16 = -2\left(x-\frac{7}{2}\right)^2 + \frac{17}{2} & (2 < m < 4) \end{cases},$$



$$\therefore H\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right), I\left(\frac{7}{2}, \frac{17}{2}\right),$$

$$\text{当 } m=1 \text{ 时, } y = -2 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 = 4,$$

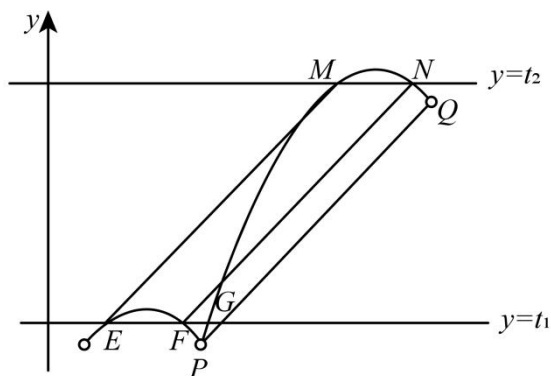
$$\text{当 } m=2 \text{ 时, } y = -2 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 = 4,$$

$$\text{当 } m=4 \text{ 时, } y = -2 \cdot 4^2 + 6 \cdot 4 = 8,$$

$$\therefore R(1, 4), P(2, 4), Q(4, 8),$$

当 $4 < t_1 < \frac{9}{2}$ 时, 直线 $y = t_1$ 与函数 y 的图象有 3 个交点,

当 $8 < t_2 < \frac{17}{2}$ 时, 直线 $y = t_2$ 与函数 y 的图象有 2 个交点,



直线 $y = t_1$ 与函数 y 交于 E 、 F 两点, $-2m^2 + 6m = t_1$, 即: $2m^2 - 6m + t_1 = 0$,

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{6}{-2} = 3, \quad x_1 x_2 = \frac{t_1}{2}, \quad EF = x_1 - x_2 = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{3^2 - 4 \times \frac{t_1}{2}} = \sqrt{9 - 2t_1},$$

直线 $y = t_2$ 与函数 y 交于 M 、 N 两点, $-2m^2 + 6m = t_2$, 即: $2m^2 - 14m + 16 + t_2 = 0$,

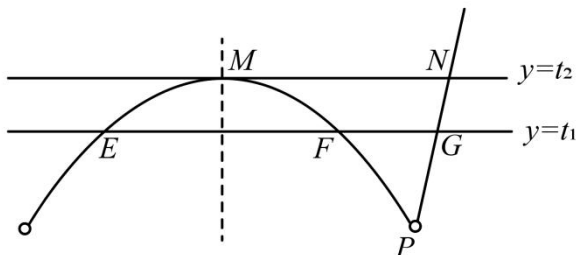
$$\therefore x_3 + x_4 = -\frac{-14}{2} = 7, \quad x_3 x_4 = 8 + \frac{t_2}{2},$$

$$MN = x_3 - x_4 = \sqrt{(x_3 + x_4)^2 - 4x_3 x_4} = \sqrt{7^2 - 4 \times \left(8 + \frac{t_2}{2}\right)} = \sqrt{17 - 2t_2},$$

$$\therefore EF = MN,$$

$$\therefore \sqrt{9-2t_1} = \sqrt{17-2t_2}, \text{ 整理得: } t_2 - t_1 = 4,$$

$$\text{当 } t_2 = \frac{9}{2} \text{ 时,}$$



$$-2m^2 + 14m - 16 = \frac{9}{2}, \text{ 解得: } m = \frac{7}{2} - \sqrt{2} \text{ 或 } m = \frac{7}{2} + \sqrt{2} \text{ (舍),}$$

$$\therefore EF = MN = \frac{7}{2} - \sqrt{2} - \frac{3}{2} = 2 - \sqrt{2},$$

$$\therefore EF = \sqrt{9-2t_1} = 2 - \sqrt{2}, \text{ 解得: } t_1 = \frac{3}{2} + 2\sqrt{2},$$

$$\therefore t_2 - t_1 = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} - 2\sqrt{2} = 3 - 2\sqrt{2},$$

$$t_2 - t_1 = 4 \text{ 或 } t_2 - t_1 = 3 - 2\sqrt{2}.$$