

贵州省 2024 年初中学业水平考试（中考）试题卷

数 学

同学你好！答题前请认真阅读以下内容：

1. 全卷共 6 页，三个大题，共 25 小题，满分 150 分。考试时长 120 分钟。考试形式为闭卷。
2. 请在答题卡相应位置作答，在试题卷上答题无效。
3. 不能使用计算器。

一、选择题（本大题共 12 题，每题 3 分，共 36 分。每小题均有 A、B、C、D 四个选项，其中只有一个选项正确，请用 2B 铅笔在答题卡相应位置填涂）

1. 下列有理数中最小的数是（ ）

A. -2 B. 0 C. 2 D. 4

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查有理数的大小比较，解题的关键是掌握比较有理数大小的方法。根据有理数的大小比较选出最小的数。

【详解】解：∵ $-2 < 0 < 2 < 4$,

∴ 最小的数是 -2，

故选：A.

2. “黔山秀水”写成下列字体，可以看作是轴对称图形的是（ ）

A. 黔 B. 山 C. 秀 D. 水

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了轴对称图形概念，一个图形沿着某条直线折叠后直线两旁的部分能够完全重合，这个图形就叫轴对称图形。根据轴对称图形概念，结合所给图形即可得出答案。

【详解】解：A. 不是轴对称图形，不符合题意；

B. 是轴对称图形，符合题意；

C. 不是轴对称图形，不符合题意；

D. 不是轴对称图形，不符合题意；

故选：B.

3. 计算 $2a + 3a$ 的结果正确的是（ ）

A. $5a$ B. $6a$ C. $5a^2$ D. $6a^2$

【答案】A

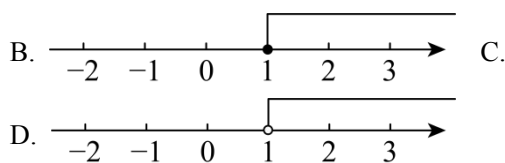
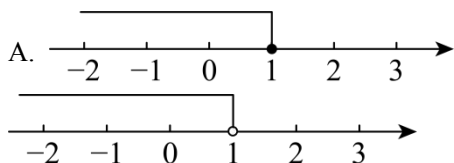
【解析】

【分析】本题主要考查合并同类项，根据合并同类项的法则：把同类项的系数相加，所得结果作为系数，字母和字母的指数不变即可得.

【详解】解： $2a + 3a = 5a$ ，

故选：A.

4. 不等式 $x < 1$ 的解集在数轴上的表示，正确的是（ ）



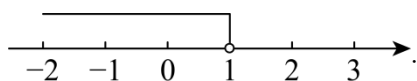
【答案】C

【解析】

【分析】根据小于向左，无等号为空心圆圈，即可得出答案.

本题考查在数轴上表示不等式的解集，熟知“小于向左，大于向右”是解题的关键.

【详解】不等式 $x < 1$ 的解集在数轴上的表示如下：



故选：C.

5. 一元二次方程 $x^2 - 2x = 0$ 的解是（ ）

A. $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ B. $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ C. $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ D. $x_1 = -2$, $x_2 = -1$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了解一元二次方程，利用因式分解法求解即可.

【详解】解： $x^2 - 2x = 0$ ，

$$\therefore x(x-2) = 0,$$

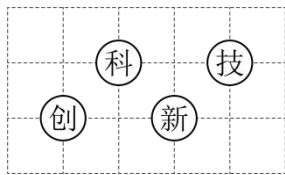
$$\therefore x = 0 \text{ 或 } x - 2 = 0,$$

$$\therefore x_1 = 2, x_2 = 0,$$

故选：B.

6. 为培养青少年的科学态度和科学思维，某校创建了“科技创新”社团. 小红将“科”“技”“创”“新”

写在如图所示的方格纸中,若建立平面直角坐标系,使“创”“新”的坐标分别为 $(-2,0)$, $(0,0)$,则“技”所在的象限为()



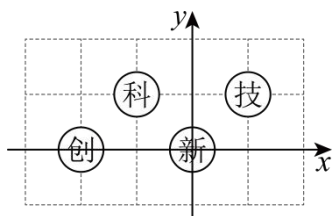
- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查坐标与图形,先根据题意确定平面直角坐标系,然后确定点的位置.

【详解】解:如图建立直角坐标系,则“技”在第一象限,



故选 A.

7. 为了解学生的阅读情况,某校在4月23日世界读书日,随机抽取100名学生进行阅读情况调查,每月阅读两本以上经典作品的有20名学生,估计该校800名学生中每月阅读经典作品两本以上的人数为()

- A. 100人 B. 120人 C. 150人 D. 160人

【答案】D

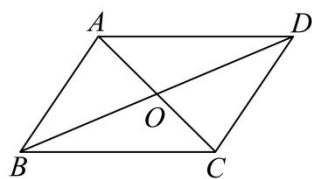
【解析】

【分析】本题考查用样本反映总体,利用样本百分比乘以总人数计算即可解题.

【详解】解: $800 \times \frac{20}{100} = 160$ (人),

故选 D.

8. 如图, $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O , 则下列结论一定正确的是()



- A. $AB = BC$ B. $AD = BC$ C. $OA = OB$ D. $AC \perp BD$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查平行四边形的性质，掌握平行四边形的对边平行且相等，对角线互相平分是解题的关键.

【详解】解：∵ $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB = CD, AD = BC, AO = OC, BO = OD,$$

故选 B.

9. 小星同学通过大量重复的定点投篮练习，用频率估计他投中的概率为 0.4，下列说法正确的是（ ）

A. 小星定点投篮 1 次，不一定能投中

B. 小星定点投篮 1 次，一定可以投中

C. 小星定点投篮 10 次，一定投中 4 次

D. 小星定点投篮 4 次，一定投中 1 次

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了概率的意义，概率是反映事件发生机会的大小的概念，只是表示发生的机会的大小，机会大也不一定发生，据此求解即可.

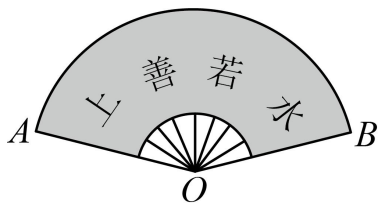
【详解】解：小星同学通过大量重复的定点投篮练习，用频率估计他投中的概率为 0.4，则由概率的意义可知，小星定点投篮 1 次，不一定能投中，故选项 A 正确，选项 B 错误；

小星定点投篮 10 次，不一定投中 4 次，故选项 C 错误；

小星定点投篮 4 次，不一定投中 1 次，故选项 D 错误

故选：A.

10. 如图，在扇形纸扇中，若 $\angle AOB = 150^\circ$ ， $OA = 24$ ，则 $\widehat{AB}$ 的长为（ ）



A. 30π

B. 25π

C. 20π

D. 10π

【答案】C

【解析】

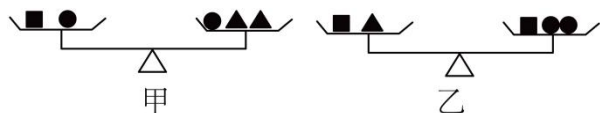
【分析】本题考查了弧长，根据弧长公式： $l = \frac{n\pi r}{180}$ 求解即可.

【详解】解：∵ $\angle AOB = 150^\circ$ ， $OA = 24$ ，

$$\therefore \widehat{AB} \text{ 的长为 } \frac{150\pi \times 24}{180} = 20\pi,$$

故选：C.

11. 小红学习了等式的性质后，在甲、乙两台天平的左右两边分别放入“■”“●”“▲”三种物体，如图所示，天平都保持平衡。若设“■”与“●”的质量分别为 x , y ，则下列关系式正确的是（ ）



- A. $x = y$ B. $x = 2y$ C. $x = 4y$ D. $x = 5y$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查等式的性质，设“▲”的质量为 a ，根据题意列出等式 $x + y = y + 2a$ ， $x + a = x + 2y$ ，然后化简代入即可解题。

【详解】解：设“▲”的质量为 a ，

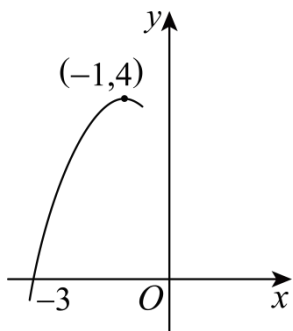
由甲图可得 $x + y = y + 2a$ ，即 $x = 2a$ ，

由乙图可得 $x + a = x + 2y$ ，即 $a = 2y$ ，

$\therefore x = 4y$ ，

故选 C。

12. 如图，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的部分图象与 x 轴的一个交点的横坐标是 -3 ，顶点坐标为 $(-1, 4)$ ，则下列说法正确的是（ ）



- A. 二次函数图象的对称轴是直线 $x = 1$
 B. 二次函数图象与 x 轴的另一个交点的横坐标是 2
 C. 当 $x < -1$ 时， y 随 x 的增大而减小
 D. 二次函数图象与 y 轴的交点的纵坐标是 3

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了二次函数的性质，待定系数法求二次函数解析式，利用二次函数的性质，对称性，增减性判断选项 A、B、C，利用待定系数法求出二次函数的解析式，再求出与 y 轴的交点坐标即可判定选项 D.

【详解】解： $\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点坐标为 $(-1, 4)$,

$\therefore$ 二次函数图象的对称轴是直线 $x = -1$ ，故选项 A 错误；

$\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴的一个交点的横坐标是 -3 ，对称轴是直线 $x = -1$ ，

$\therefore$ 二次函数图象与 x 轴的另一个交点的横坐标是 1 ，故选项 B 错误；

$\because$ 抛物线开口向下，对称轴是直线 $x = -1$ ，

$\therefore$ 当 $x < -1$ 时， y 随 x 的增大而增大，故选项 C 错误；

设二次函数解析式为 $y = a(x+1)^2 + 4$ ，

把 $(-3, 0)$ 代入，得 $0 = a(-3+1)^2 + 4$ ，

解得 $a = -1$ ，

$\therefore y = -(x+1)^2 + 4$ ，

当 $x = 0$ 时， $y = -(0+1)^2 + 4 = 3$ ，

$\therefore$ 二次函数图象与 y 轴的交点的纵坐标是 3 ，故选项 D 正确，

故选 D.

二、填空题 (本大题共 4 题，每题 4 分，共 16 分)

13. 计算 $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ 的结果是_____.

【答案】 $\sqrt{6}$

【解析】

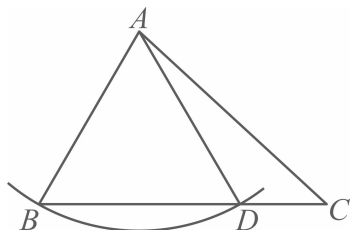
【分析】利用二次根式的乘法运算法则进行计算.

【详解】解：原式 $= \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}$ ，

故答案为： $\sqrt{6}$.

【点睛】本题考查二次根式的乘法运算，掌握二次根式乘法的运算法则 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ($a \geq 0, b > 0$) 是解题关键.

14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，以点 A 为圆心，线段 AB 的长为半径画弧，交 BC 于点 D ，连接 AD . 若 $AB = 5$ ，则 AD 的长为_____.



【答案】5

【解析】

【分析】本题考查了尺规作图，根据作一条线段等于已知线段的作法可得出 $AD = AB$ ，即可求解。

【详解】解：由作图可知： $AD = AB$ ，

$$\therefore AB = 5,$$

$$\therefore AD = 5,$$

故答案为：5.

15. 在元朝朱世杰所著的《算术启蒙》中，记载了一道题，大意是：快马每天行 240 里，慢马每天行 150 里，慢马先行 12 天，则快马追上慢马需要的天数是_____.

【答案】20

【解析】

【分析】本题考查了一元一次方程的应用，设快马追上慢马需要 x 天，根据快马走的路程等于慢马走的总路程，列方程求解即可。

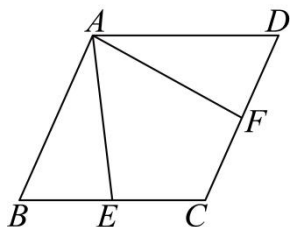
【详解】解：设快马追上慢马需要 x 天，

$$\text{根据题意，得 } 240x = 150(x + 12),$$

$$\text{解得 } x = 20,$$

故答案为：20.

16. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，点 E, F 分别是 BC, CD 的中点，连接 AE, AF . 若 $\sin \angle EAF = \frac{4}{5}$ ， $AE = 5$ ，则 AB 的长为_____.

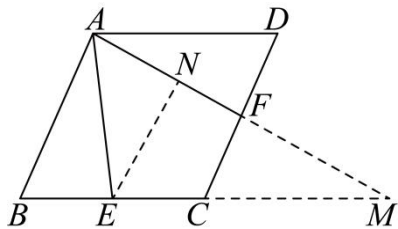


【答案】 $\frac{2}{3}\sqrt{65}$ 或 $\frac{2\sqrt{65}}{3}$

【解析】

【分析】延长 BC ， AF 交于点 M ，根据菱形的性质和中点性质证明 $\triangle ABE \cong \triangle ADF$ ， $\triangle ADF \cong \triangle MCF$ ，过 E 点作 $EN \perp AF$ 交 N 点，根据三角函数求出 EN ， AN ， NF ， MN ，在 $\text{Rt}\triangle ENM$ 中利用勾股定理求出 EM ，根据菱形的性质即可得出答案.

【详解】延长 BC ， AF 交于点 M ，



在菱形 $ABCD$ 中，点 E ， F 分别是 BC ， CD 的中点，

$$\therefore AB = BC = CD = AD, \quad BE = EC = CF = DF, \quad AD \parallel BC, \quad \angle D = \angle FCM, \quad \angle B = \angle D$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADF$ 中

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle B = \angle D, \\ BE = DF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADF (\text{SAS}),$$

$$\therefore AE = AF,$$

在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle MCF$ 中

$$\begin{cases} \angle D = \angle FCM \\ DF = CF \\ \angle AFD = \angle MFC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ADF \cong \triangle MCF (\text{ASA}),$$

$$\therefore CM = AD, \quad AF = MF,$$

$$\because AE = 5,$$

$$\therefore AE = AF = MF = 5,$$

过 E 点作 $EN \perp AF$ 于 N 点，

$$\therefore \angle ANE = 90^\circ$$

$$\because \sin \angle EAF = \frac{4}{5}, \quad AE = 5,$$

$$\therefore EN = 4, \quad AN = 3,$$

$$\therefore NF = AF - AN = 2,$$

$$\therefore MN = 5 + 2 = 7,$$

在 $\text{Rt}\triangle ENM$ 中

$$EM = \sqrt{EN^2 + MN^2} = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65},$$

$$\text{即 } EM = EC + CM = \frac{1}{2}BC + BC = \sqrt{65},$$

$$\therefore AB = BC = CD = AD,$$

$$\therefore AB = BC = \frac{2}{3}\sqrt{65},$$

$$\text{故答案为: } \frac{2}{3}\sqrt{65}.$$

【点睛】 本题考查了菱形的性质，全等三角形的判定和性质，运用三角函数解直角三角形，勾股定理等，正确添加辅助线构造直角三角形是解本题的关键.

三、解答题（本大题共 9 题，共 98 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17. (1) 在① 2^2 ，② $|-2|$ ，③ $(-1)^0$ ，④ $\frac{1}{2} \times 2$ 中任选 3 个代数式求和；

(2) 先化简，再求值： $(x^2 - 1) \cdot \frac{1}{2x + 2}$ ，其中 $x = 3$ ．

【答案】 (1) 见解析 (2) $\frac{x-1}{2}$ ，1

【解析】

【分析】 本题考查分式的化简求值和实数的混合运算，掌握运算法则是解题的关键．

(1) 利用实数的混合运算的法则和运算顺序解题即可；

(2) 先把分式的分子、分母分解因式，然后约分化为最简分式，最后代入数值解题即可．

【详解】 (1) 解： 选择①，②，③，

$$2^2 + |-2| + (-1)^0$$

$$= 4 + 2 + 1$$

$$= 7;$$

选择①，②，④，

$$2^2 + |-2| + \frac{1}{2} \times 2$$

$$= 4 + 2 + 1$$

$$= 7;$$

选择①，③，④，

$$2^2 + (-1)^0 + \frac{1}{2} \times 2$$

$$= 4 + 1 + 1$$

$$= 6;$$

选择②，③，④，

$$|-2| + (-1)^0 + \frac{1}{2} \times 2$$

$$= 2 + 1 + 1$$

$$= 4;$$

$$(2) \text{ 解: } (x^2 - 1) \cdot \frac{1}{2x + 2}$$

$$= (x - 1)(x + 1) \cdot \frac{1}{2(x + 1)}$$

$$= \frac{x - 1}{2};$$

$$\text{当 } x = 3 \text{ 时, 原式} = \frac{3 - 1}{2} = 1.$$

18. 已知点 $(1, 3)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上.

(1) 求反比例函数的表达式;

(2) 点 $(-3, a)$, $(1, b)$, $(3, c)$ 都在反比例函数的图象上, 比较 a , b , c 的大小, 并说明理由.

【答案】 (1) $y = \frac{3}{x}$

(2) $a < c < b$, 理由见解析

【解析】

【分析】 本题主要考查了反比例函数的性质, 以及函数图象上点的坐标特点, 待定系数法求反比例函数解析式, 关键是掌握凡是函数图象经过的点必能满足解析式.

(1) 把点 $(1, 3)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ 可得 k 的值, 进而可得函数的解析式;

(2) 根据反比例函数表达式可得函数图象位于第一、三象限, 再根据点 A 、点 B 和点 C 的横坐标即可比较大小.

【小问 1 详解】

解: 把 $(1, 3)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$, 得 $3 = \frac{k}{1}$,

$$\therefore k = 3,$$

$$\therefore \text{反比例函数的表达式为 } y = \frac{3}{x};$$

【小问 2 详解】

解: $\because k = 3 > 0$,

$\therefore$ 函数图象位于第一、三象限,

$\therefore$ 点 $(-3, a)$, $(1, b)$, $(3, c)$ 都在反比例函数的图象上, $-3 < 0 < 1 < 3$,

$\therefore a < 0 < c < b$,

$\therefore a < c < b$.

19. 根据《国家体质健康标准》规定, 七年级男生、女生 50 米短跑时间分别不超过 7.7 秒、8.3 秒为优秀等次. 某校在七年级学生中挑选男生、女生各 5 人进行集训, 经多次测试得到 10 名学生的平均成绩 (单位: 秒) 记录如下:

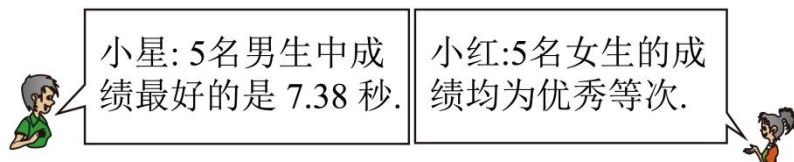
男生成绩: 7.61, 7.38, 7.65, 7.38, 7.38

女生成绩: 8.23, 8.27, 8.16, 8.26, 8.32

根据以上信息, 解答下列问题:

(1) 男生成绩的众数为_____, 女生成绩的中位数为_____;

(2) 判断下列两位同学的说法是否正确.



(3) 教练从成绩最好的 3 名男生 (设为甲, 乙, 丙) 中, 随机抽取 2 名学生代表学校参加比赛, 请用画树状图或列表的方法求甲被抽中的概率.

【答案】 (1) 7.38, 8.26

(2) 小星的说法正确, 小红的说法错误

(3) $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查用树状图或列表法求概率, 众数和中位数的定义, 掌握列表法或树状图求概率是解题的关键.

(1) 利用中位数和众数的定义解题即可;

(2) 根据优秀等次的要求进行比较解题即可;

(3) 列表格得到所有可能的结果数 n , 找出符合要求的数量 m , 根据概率公式计算即可.

【小问 1 详解】

解: 男生成绩 7.38 出现的次数最多, 即众数为 7.38,

女生成绩排列为: 8.16, 8.23, 8.26, 8.27, 8.32, 居于中间的数为 8.26, 故中位数为 8.26,

故答案为：7.38，8.26；

【小问 2 详解】

解：∵用时越少，成绩越好，

∴7.38 是男生中成绩最好的，故小星的说法正确；

∴女生 8.3 秒为优秀成绩， $8.32 > 8.3$ ，

∴有一人成绩达不到优秀，故小红的说法错误；

【小问 3 详解】

列表为：

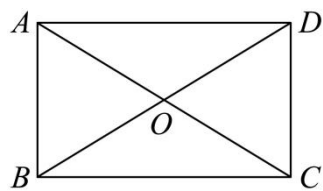
	甲	乙	丙
甲		甲, 乙	甲, 丙
乙	乙, 甲		乙, 丙
丙	丙, 甲	丙, 乙	

由表格可知共有 6 种等可能结果，其中抽中甲的有 4 种，

故甲被抽中的概率为 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ 。

20. 如图，四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， $AD \parallel BC$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ，有下列条件：

① $AB \parallel CD$ ，② $AD = BC$ 。



(1) 请从以上①②中任选 1 个作为条件，求证：四边形 $ABCD$ 是矩形；

(2) 在 (1) 的条件下，若 $AB = 3$ ， $AC = 5$ ，求四边形 $ABCD$ 的面积。

【答案】(1) 见解析 (2) 12

【解析】

【分析】本题考查矩形的判定，勾股定理，掌握矩形的判定定理是解题的关键。

(1) 先根据条件利用两组对边平行或一组对边平行且相等证明 $ABCD$ 是平行四边形，然后根据矩形的定

义得到结论即可；

(2) 利用勾股定理得到 BC 长，然后利用矩形的面积公式计算即可.

【小问 1 详解】

选择①,

证明: $\because AB \parallel CD, AD \parallel BC,$

$\therefore ABCD$ 是平行四边形,

又 $\because \angle ABC = 90^\circ,$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形;

选择②,

证明: $\because AD = BC, AD \parallel BC,$

$\therefore ABCD$ 是平行四边形,

又 $\because \angle ABC = 90^\circ,$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形;

【小问 2 详解】

解: $\because \angle ABC = 90^\circ,$

$$\therefore BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

$\therefore$ 矩形 $ABCD$ 的面积为 $3 \times 4 = 12$.

21. 为增强学生的劳动意识, 养成劳动的习惯和品质, 某校组织学生参加劳动实践. 经学校与劳动基地联系, 计划组织学生参加种植甲、乙两种作物. 如果种植 3 亩甲作物和 2 亩乙作物需要 27 名学生, 种植 2 亩甲作物和 2 亩乙作物需要 22 名学生.

根据以上信息, 解答下列问题:

(1) 种植 1 亩甲作物和 1 亩乙作物分别需要多少名学生?

(2) 种植甲、乙两种作物共 10 亩, 所需学生人数不超过 55 人, 至少种植甲作物多少亩?

【答案】(1) 种植 1 亩甲作物和 1 亩乙作物分别需要 5、6 名学生

(2) 至少种植甲作物 5 亩

【解析】

【分析】本题考查了二元一次方程组的应用, 一元一次不等式的应用,

(1) 设种植 1 亩甲作物和 1 亩乙作物分别需要 x 、 y 名学生, 根据“种植 3 亩甲作物和 2 亩乙作物需要 27 名学生, 种植 2 亩甲作物和 2 亩乙作物需要 22 名”列方程组求解即可;

(2) 设种植甲作物 a 亩, 则种植乙作物 $(10-a)$ 亩, 根据“所需学生人数不超过 55 人”列不等式求解即可.

【小问 1 详解】

解：设种植 1 亩甲作物和 1 亩乙作物分别需要 x 、 y 名学生，

根据题意，得
$$\begin{cases} 3x + 2y = 27 \\ 2x + 2y = 22 \end{cases},$$

解得
$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \end{cases},$$

答：种植 1 亩甲作物和 1 亩乙作物分别需要 5、6 名学生；

【小问 2 详解】

解：设种植甲作物 a 亩，则种植乙作物 $(10-a)$ 亩，

根据题意，得： $5a + 6(10-a) \leq 55$ ，

解得 $a \geq 5$ ，

答：至少种植甲作物 5 亩.

22. 综合与实践：小星学习解直角三角形知识后，结合光的折射规律进行了如下综合性学习.

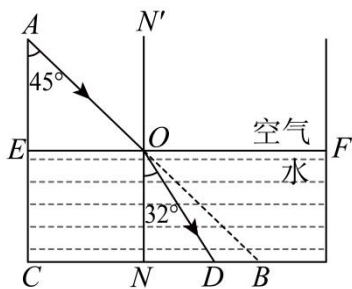
【实验操作】

第一步：将长方体空水槽放置在水平桌面上，一束光线从水槽边沿 A 处投射到底部 B 处，入射光线与水槽内壁 AC 的夹角为 $\angle A$ ；

第二步：向水槽注水，水面上升到 AC 的中点 E 处时，停止注水. (直线 NN' 为法线， AO 为入射光线， OD 为折射光线.)

【测量数据】

如图，点 $A, B, C, D, E, F, O, N, N'$ 在同一平面内，测得 $AC = 20\text{cm}$ ， $\angle A = 45^\circ$ ，折射角 $\angle DON = 32^\circ$.



【问题解决】

根据以上实验操作和测量的数据，解答下列问题：

(1) 求 BC 的长；

(2) 求 B, D 之间的距离 (结果精确到 0.1cm).

(参考数据： $\sin 32^\circ \approx 0.52$ ， $\cos 32^\circ \approx 0.84$ ， $\tan 32^\circ \approx 0.62$)

【答案】(1) 20cm

(2) 3.8cm

【解析】

【分析】本题考查解直角三角形的应用，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答.

(1) 根据等腰三角形的性质计算出的值；

(2) 利用锐角三角函数求出 DN 长，然后根据 $BD = BN - DN$ 计算即可.

【小问 1 详解】

解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle A = 45^\circ$,

$$\therefore \angle B = 45^\circ,$$

$$\therefore BC = AC = 20\text{cm},$$

【小问 2 详解】

解：由题可知 $ON = EC = \frac{1}{2}AC = 10\text{cm}$,

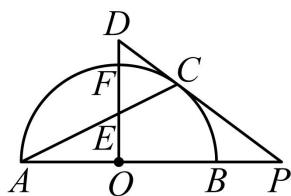
$$\therefore NB = ON = 10\text{cm},$$

$$\text{又} \because \angle DON = 32^\circ,$$

$$\therefore DN = ON \cdot \tan \angle DON = 10 \times \tan 32^\circ \approx 10 \times 0.62 = 6.2\text{cm},$$

$$\therefore BD = BN - DN = 10 - 6.2 = 3.8\text{cm}.$$

23. 如图， AB 为半圆 O 的直径，点 F 在半圆上，点 P 在 AB 的延长线上， PC 与半圆相切于点 C ，与 OF 的延长线相交于点 D ， AC 与 OF 相交于点 E ， $DC = DE$.



(1) 写出图中一个与 $\angle DEC$ 相等的角：_____；

(2) 求证： $OD \perp AB$ ；

(3) 若 $OA = 2OE$ ， $DF = 2$ ，求 PB 的长.

【答案】(1) $\angle DCE$ (答案不唯一)

$$(2) \frac{16}{3}$$

$$(3) \frac{16}{3}$$

【解析】

【分析】(1) 利用等边对等角可得出 $\angle DCE = \angle DEC$ ，即可求解；

(2) 连接 OC ，利用切线的性质可得出 $\angle DCE + \angle ACO = 90^\circ$ ，利用等边对等角和对顶角的性质可得出 $\angle AOE = \angle DCE$ ，等量代换得出 $\angle AEO + \angle CAO = 90^\circ$ ，然后利用三角形内角和定理求出 $\angle AOE = 90^\circ$ ，即可得证；

(3) 设 $OE = 2$ ，则可求 $AO = OF = BO = 2x$ ， $EF = x$ ， $OD = 2x + 2$ ， $DC = DE = 2 + x$ ，在 $\text{Rt}\triangle ODC$ 中，利用勾股定理得出 $(2 + 2x)^2 = (x + 2)^2 + (2x)^2$ ，求出 x 的值，利用 $\tan D = \frac{OP}{OD} = \frac{OC}{CD}$ 可求出 OP ，即可求解。

【小问 1 详解】

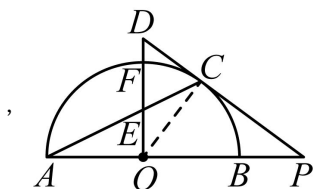
解： $\because DC = DE$ ，

$\therefore \angle DCE = \angle DEC$ ，

故答案为： $\angle DCE$ （答案不唯一）；

【小问 2 详解】

证明：连接 OC ，



$\because PC$ 是切线，

$\therefore OC \perp CD$ ，即 $\angle DCE + \angle ACO = 90^\circ$ ，

$\because OA = OC$ ，

$\therefore \angle OAC = \angle ACO$ ，

$\because \angle DCE = \angle DEC$ ， $\angle AEO = \angle DEC$ ，

$\therefore \angle AEO + \angle CAO = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AOE = 90^\circ$ ，

$\therefore OD \perp AB$ ；

【小问 3 详解】

解：设 $OE = x$ ，则 $AO = OF = BO = 2x$ ，

$\therefore EF = OF - OE = x$ ， $OD = OF + DF = 2x + 2$ ，

$\therefore DC = DE = DF + EF = 2 + x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ODC$ 中， $OD^2 = CD^2 + OC^2$ ，

$\therefore (2 + 2x)^2 = (x + 2)^2 + (2x)^2$ ，

解得 $x_1 = 4$, $x_2 = 0$ (舍去)

$$\therefore OD = 10, CD = 6, OC = 8,$$

$$\therefore \tan D = \frac{OP}{OD} = \frac{OC}{CD},$$

$$\therefore \frac{OP}{10} = \frac{8}{6},$$

$$\text{解得 } OP = \frac{40}{3},$$

$$\therefore BP = OP - OB = \frac{16}{3}.$$

【点睛】本题考查了等腰三角形的性质，切线的性质，勾股定理，解直角三角形的应用等知识，灵活运用以上知识是解题的关键.

24. 某超市购入一批进价为 10 元/盒的糖果进行销售，经市场调查发现：销售单价不低于进价时，日销售量 y (盒) 与销售单价 x (元) 是一次函数关系，下表是 y 与 x 的几组对应值.

销售单价 x /元	...	12	14	16	18	20	...
销售量 y /盒	...	56	52	48	44	40	...

(1) 求 y 与 x 的函数表达式;

(2) 糖果销售单价定为多少元时，所获日销售利润最大，最大利润是多少?

(3) 若超市决定每销售一盒糖果向儿童福利院赠送一件价值为 m 元的礼品，赠送礼品后，为确保该种糖果日销售获得的最大利润为 392 元，求 m 的值.

【答案】(1) $y = -2x + 80$

(2) 糖果销售单价定为 25 元时，所获日销售利润最大，最大利润是 450 元

(3) 2

【解析】

【分析】本题考查了二次函数的应用，解题的关键是：

(1) 利用待定系数法求解即可；

(2) 设日销售利润为 w 元，根据利润=单件利润×销售量求出 w 关于 x 的函数表达式，然后利用二次函数的性质求解即可；

(3) 设日销售利润为 w 元，根据利润=单件利润×销售量- m ×销售量求出 w 关于 x 的函数表达式，然后利用二次函数的性质求解即可.

【小问 1 详解】

解：设 y 与 x 的函数表达式为 $y = kx + b$,

把 $x = 12$, $y = 56$; $x = 20$, $y = 40$ 代入, 得
$$\begin{cases} 12k + b = 56 \\ 20k + b = 40 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} k = -2 \\ b = 80 \end{cases}$$
,

$\therefore y$ 与 x 的函数表达式为 $y = -2x + 80$;

【小问 2 详解】

解：设日销售利润为 w 元,

根据题意, 得 $w = (x - 10) \cdot y$

$$= (x - 10)(-2x + 80)$$

$$= -2x^2 + 100x - 800$$

$$= -2(x - 25)^2 + 450,$$

$\therefore$ 当 $x = 25$ 时, w 有最大值为 450,

$\therefore$ 糖果销售单价定为 25 元时, 所获日销售利润最大, 最大利润是 450 元;

【小问 3 详解】

解：设日销售利润为 w 元,

根据题意, 得 $w = (x - 10 - m) \cdot y$

$$= (x - 10 - m)(-2x + 80)$$

$$= -2x^2 + (100 + 2m)x - 800 - 80m,$$

$\therefore$ 当 $x = -\frac{100 + 2m}{2 \times (-2)} = \frac{50 + m}{2}$ 时, w 有最大值为 $-2\left(\frac{50 + m}{2}\right)^2 + (100 + 2m)\left(\frac{50 + m}{2}\right) - 800 - 80m$,

$\therefore$ 糖果日销售获得的最大利润为 392 元,

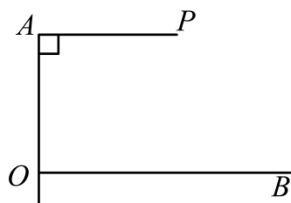
$$\therefore -2\left(\frac{50 + m}{2}\right)^2 + (100 + 2m)\left(\frac{50 + m}{2}\right) - 800 - 80m = 392,$$

化简得 $m^2 - 60m + 116 = 0$

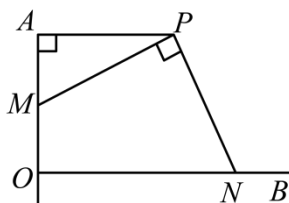
解得 $m_1 = 2$, $m_2 = 58$ (舍去)

$\therefore m$ 的值为 2.

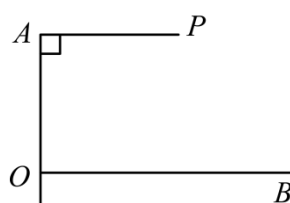
25. 综合与探究: 如图, $\angle AOB = 90^\circ$, 点 P 在 $\angle AOB$ 的平分线上, $PA \perp OA$ 于点 A .



图①



图②



备用图

(1) 【操作判断】

如图①，过点 P 作 $PC \perp OB$ 于点 C ，根据题意在图①中画出 PC ，图中 $\angle APC$ 的度数为_____度；

(2) 【问题探究】

如图②，点 M 在线段 AO 上，连接 PM ，过点 P 作 $PN \perp PM$ 交射线 OB 于点 N ，求证： $OM + ON = 2PA$ ；

(3) 【拓展延伸】

点 M 在射线 AO 上，连接 PM ，过点 P 作 $PN \perp PM$ 交射线 OB 于点 N ，射线 NM 与射线 PO 相交于点 F ，

若 $ON = 3OM$ ，求 $\frac{OP}{OF}$ 的值.

【答案】(1) 画图见解析，90

(2) 见解析 (3) $\frac{2}{3}$ 或 $\frac{8}{3}$

【解析】

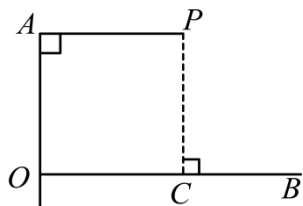
【分析】(1) 依题意画出图形即可，证明四边形 $OAPC$ 是矩形，即可求解；

(2) 过 P 作 $PC \perp OB$ 于 C ，证明矩形 $OAPC$ 是正方形，得出 $OA = AP = PC = OC$ ，利用 ASA 证明 $\triangle APM \cong \triangle CPN$ ，得出 $AM = CN$ ，然后利用线段的和差关系以及等量代换即可得证；

(3) 分 M 在线段 AO ，线段 AO 的延长线讨论，利用相似三角形的判定与性质求解即可；

【小问 1 详解】

解：如图， PC 即为所求，



$\therefore \angle AOB = 90^\circ$ ， $PA \perp OA$ ， $PC \perp OB$ ，

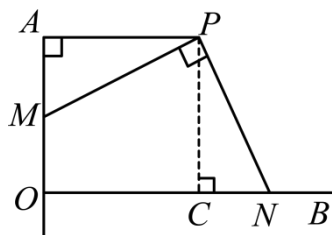
$\therefore$ 四边形 $OAPC$ 是矩形，

$\therefore \angle APC = 90^\circ$ ，

故答案为：90；

【小问 2 详解】

证明：过 P 作 $PC \perp OB$ 于 C ，



由 (1) 知：四边形 $OAPC$ 是矩形，

$\because$ 点 P 在 $\angle AOB$ 的平分线上， $PA \perp OA$ ， $PC \perp OB$ ，

$\therefore PA = PC$ ，

$\therefore$ 矩形 $OAPC$ 是正方形，

$\therefore OA = AP = PC = OC$ ， $\angle APC = 90^\circ$ ，

$\because PN \perp PM$ ，

$\therefore \angle APM = \angle CPN = 90^\circ - \angle MPC$ ，

又 $\angle A = \angle PCN = 90^\circ$ ， $AP = CP$ ，

$\therefore \triangle APM \cong \triangle CPN$ ，

$\therefore AM = CN$ ，

$\therefore OM + ON = OM + CN + OC$

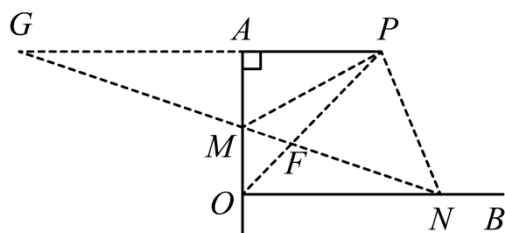
$= OM + AM + AP$

$= OA + AP$

$= 2AP$ ；

【小问 3 详解】

解：①当 M 在线段 AO 上时，如图，延长 NM 、 PA 相交于点 G ，



由 (2) 知 $OM + ON = 2PA$ ，

设 $OM = x$ ，则 $ON = 3x$ ， $AO = PA = 2x$ ，

$\therefore AM = AO - OM = x = OM$ ，

$\because \angle AOB = \angle MAG = 90^\circ$ ， $\angle AMG = \angle OMN$ ，

$\therefore \triangle AMG \cong \triangle OMN$ (ASA)，

$$\therefore AG = ON = 3x,$$

$$\because \angle AOB = 90^\circ, \quad PA \perp OA,$$

$$\therefore AP \parallel OB,$$

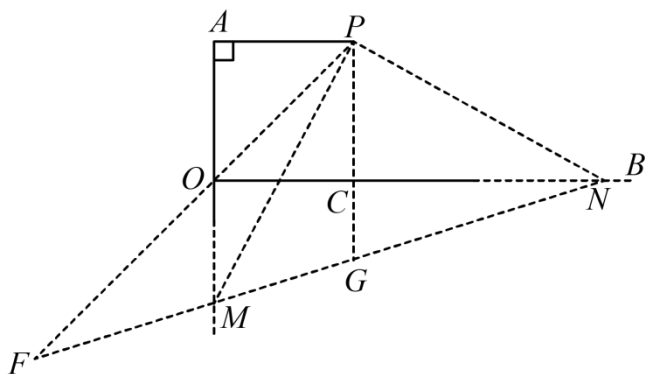
$$\therefore \Delta ONF \sim \Delta PGF,$$

$$\therefore \frac{OF}{PF} = \frac{ON}{PG} = \frac{3x}{3x + 2x} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \frac{PF}{OF} = \frac{5}{3},$$

$$\therefore \frac{OP}{OF} = \frac{5+3}{3} = \frac{8}{3};$$

②当 M 在 AO 的延长线上时, 如图, 过 P 作 $PC \perp OB$ 于 C , 并延长交 MN 于 G



由 (2) 知: 四边形 $OAPC$ 是正方形,

$$\therefore OA = AP = PC = OC, \quad \angle APC = 90^\circ, \quad PC \parallel AO,$$

$$\therefore PN \perp PM,$$

$$\therefore \angle APM = \angle CPN = 90^\circ - \angle MPC,$$

又 $\angle A = \angle PCN = 90^\circ$, $AP = CP$,

$$\therefore \triangle APM \cong \triangle CPN,$$

$$\therefore AM = CN,$$

$$\therefore ON - OM$$

$$= OC + CN - OM$$

$$= AO + AM - OM$$

$$= AO + AO$$

$$= 2AO,$$

$$\therefore ON = 3OM = 3x$$

$$\therefore AO = x, \quad CN = AM = 2x,$$

$$\therefore PC \parallel AO,$$

$$\therefore \triangle CGN \sim \triangle OMN,$$

$$\therefore \frac{CG}{OM} = \frac{CN}{ON}, \text{ 即 } \frac{CG}{x} = \frac{2x}{3x},$$

$$\therefore CG = \frac{2}{3}x,$$

$$\therefore PC \parallel AO,$$

$$\therefore \triangle OMF \sim \triangle PGF,$$

$$\therefore \frac{OF}{PF} = \frac{OM}{PG} = \frac{x}{x + \frac{2}{3}x} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \frac{PF}{OF} = \frac{5}{3},$$

$$\therefore \frac{OP}{OF} = \frac{5-3}{3} = \frac{2}{3};$$

综上, $\frac{OP}{OF}$ 的值为 $\frac{2}{3}$ 或 $\frac{8}{3}$.

【点睛】 本题考查了矩形的判定与性质, 正方形的判定与性质, 角平分线的性质, 全等三角形的判断与性质, 相似三角形的判断与性质等知识, 明确题意, 添加合适辅助线, 构造全等三角形、相似三角形, 合理分类讨论是解题的关键.