

数学试题

一、选择题：本题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的。

1. 下列实数中，无理数是 ()

- A. -3 B. 0 C. $\frac{2}{3}$ D. $\sqrt{5}$

【答案】D

【解析】

【分析】无理数就是无限不循环小数，理解无理数的概念，一定要同时理解有理数的概念，有理数是整数与分数的统称。即有限小数和无限循环小数是有理数，而无限不循环小数是无理数，由此即可判定选择项。

本题主要考查了无理数的定义，其中初中范围内学习的无理数有： π ， 2π 等；开方开不尽的数；以及像 $0.1010010001\dots$ ，等数。

【详解】根据无理数的定义可得：无理数是 $\sqrt{5}$
故选：D.

2. 据《人民日报》3月12日电，世界知识产权组织近日公布数据显示，2023年，全球PCT（《专利合作条约》）国际专利申请总量为 27.26 万件，中国申请量为 69610 件，是申请量最大的来源国。数据 69610 用科学记数法表示为 ()

- A. 6961×10 B. 696.1×10^2 C. 6.961×10^4 D. 0.6961×10^5

【答案】C

【解析】

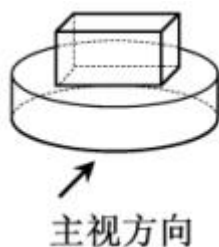
【分析】根据科学记数法的定义解答，科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同。当原数绝对值 > 1 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数。

本题考查了科学记数法，熟悉科学记数法概念是解题的关键。

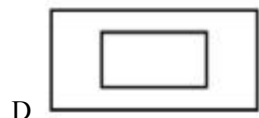
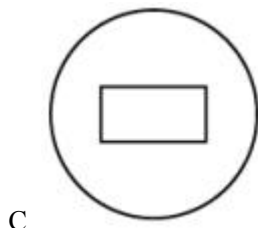
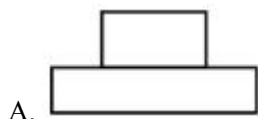
【详解】 $69610 = 6.961 \times 10^4$

故选：C.

3. 如图是由长方体和圆柱组成的几何体，其俯视图是 ()



【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】



【答案】C

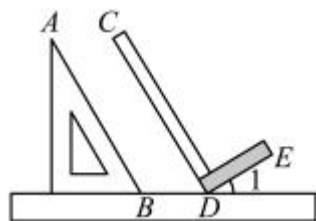
【解析】

【分析】本题考查了简单组合体的三视图，根据从上边看得到的图形是俯视图，可得答案.

【详解】解：这个立体图形的俯视图是一个圆形，圆形内部中间是一个矩形.

故选：C.

4. 在同一平面内，将直尺、含 30° 角的三角尺和木工角尺 ($CD \perp DE$) 按如图方式摆放，若 $AB \parallel CD$ ，则 $\angle 1$ 的大小为 ()



A. 30°

B. 45°

C. 60°

D. 75°

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了平行线的性质，由 $AB \parallel CD$ ，可得 $\angle CDB = 60^\circ$ ，即可求解.

【详解】 $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle CDB = 60^\circ,$$

$$\because CD \perp DE, \text{ 则 } \angle CDE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = 180^\circ - \angle CDB - \angle CDE = 30^\circ,$$

故选：A.

5. 下列运算正确的是 ()

A. $a^3 \cdot a^3 = a^9$

B. $a^4 \div a^2 = a^2$

C. $(a^3)^2 = a^5$

D. $2a^2 - a^2 = 2$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了同底数幂的乘法，同底数幂的除法，幂的乘方，合并同类项，解题的关键是掌握同底数幂的乘法，同底数幂的除法，幂的乘方，合并同类项运算法则.

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

利用同底数幂的乘法，同底数幂的除法，幂的乘方，合并同类项计算后判断正误.

【详解】解： $a^3 \cdot a^3 = a^6$ ，A 选项错误；

$a^4 \div a^2 = a^2$ ，B 选项正确；

$(a^3)^2 = a^6$ ，C 选项错误；

$2a^2 - a^2 = a^2$ ，D 选项错误；

故选：B.

6. 哥德巴赫提出“每个大于 2 的偶数都可以表示为两个质数之和”的猜想，我国数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界领先的成果. 在质数 2, 3, 5 中，随机选取两个不同的数，其和是偶数的概率是 ()

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

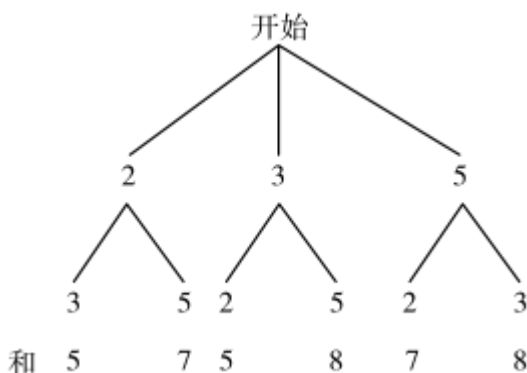
D. $\frac{2}{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】此题考查了树状图或列表法求概率，根据题意画出树状图，求和后利用概率公式计算即可.

【详解】解：画树状图如下：

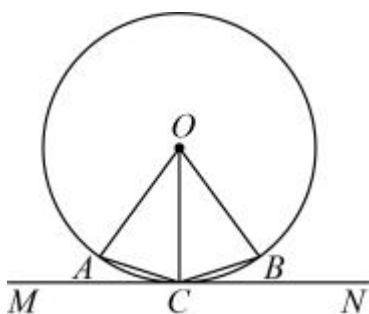


由树状图可知，共有 6 种不同情况，和是偶数的共有 2 种情况，故和是偶数的概率是

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

故选：B

7. 如图，已知点 A, B 在 $\odot O$ 上， $\angle AOB = 72^\circ$ ，直线 MN 与 $\odot O$ 相切，切点为 C ，且 C 为 $\widehat{AB}$ 的中点，则 $\angle ACM$ 等于 ()



【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

- A. 18° B. 30° C. 36° D. 72°

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了切线的性质，三角形内角和以及等腰三角形的性质，根据 C 为 $\overset{\cdot}{A}B$ 的中点，三角形

内角和可求出 $\angle OCA = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 36^\circ) = 72^\circ$ ，再根据切线的性质即可求解。

【详解】 $\because \angle AOB = 72^\circ$ ， C 为 $\overset{\cdot}{A}B$ 的中点，

$$\therefore \angle AOC = 36^\circ$$

$$\therefore OA = OC$$

$$\therefore \angle OCA = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 36^\circ) = 72^\circ$$

$\therefore$ 直线 MN 与 $\odot O$ 相切，

$$\therefore \angle OCM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACM = \angle OCM - \angle OCA = 18^\circ$$

故选：A.

8. 今年我国国民经济开局良好，市场销售稳定增长，社会消费增长较快，第一季度社会消费品零售总额 120327 亿元，比去年第一季度增长 4.7% ，求去年第一季度社会消费品零售总额. 若将去年第一季度社会消费品零售总额设为 x 亿元，则符合题意的方程是 ()

A. $(1+4.7\%)x = 120327$

B. $(1-4.7\%)x = 120327$

C. $\frac{x}{1+4.7\%} = 120327$

D. $\frac{x}{1-4.7\%} = 120327$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了列一元一次方程，解题的关键是理解题意，找出等量关系，根据今年第一季度社会消费品零售总额 120327 亿元，比去年第一季度增长 4.7% ，列出方程即可.

【详解】解：将去年第一季度社会消费品零售总额设为 x 亿元，根据题意得：

$$(1+4.7\%)x = 120327,$$

故选：A.

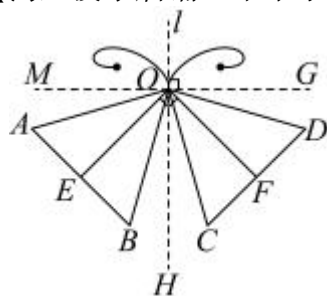
9. 小明用两个全等的等腰三角形设计了一个“蝴蝶”的平面图案. 如图，其中 $\triangle OAB$ 与 $\triangle ODC$ 都是等腰三角形，且它们关于直线 l 对称，点 E ， F 分别是底边 AB ， CD 的中点， $OE \perp OF$. 下列推断错误的是 ()

- 【答案】 B

【分析】 本题考查了对称的性质，等腰三角形的性质等；

掌握性质是解题的关键.

$\therefore OE = OF$, 结论正确, 故不符合题意;



D.

过O作 $GM \perp OH$,

$$\therefore \angle GOD + \angle DOH = 90^\circ,$$

$$\because \angle BOH + \angle DOH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GOD = \angle BOH, \text{ 由对称得 } \angle BOH = \angle COH,$$

$$\therefore \angle GOD = \angle COH,$$

同理可证 $\angle AOM = \angle AOH$,

$$\therefore \angle AOD + \angle BOC = \angle AOD + \angle AOM + \angle DOG = 180^\circ, \text{ 结论正确, 故不符合题意;}$$

故选: B.

10. 已知二次函数 $y = x^2 - 2ax + a (a \neq 0)$ 的图象经过 $A\left(\frac{a}{2}, y_1\right)$, $B(3a, y_2)$ 两点, 则下列判断正确的是 ()

A. 可以找到一个实数 a , 使得 $y_1 > a$

B. 无论实数 a 取什么值, 都有 $y_1 > a$

C. 可以找到一个实数 a , 使得 $y_2 < 0$

D. 无论实数 a 取什么值, 都有 $y_2 < 0$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查二次函数的图象和性质, 根据题意得到二次函数开口向上, 且对称轴为

$x = -\frac{-2a}{2} = a$, 顶点坐标为 $(a, a - a^2)$, 再分情况讨论, 当 $a > 0$ 时, 当 $a < 0$ 时, y_1 , y_2 的大小情况, 即可解题.

【详解】解: $\because$ 二次函数解析式为 $y = x^2 - 2ax + a (a \neq 0)$,

$\therefore$ 二次函数开口向上, 且对称轴为 $x = -\frac{-2a}{2} = a$, 顶点坐标为 $(a, a - a^2)$,

当 $a > 0$ 时, $0 < \frac{a}{2} < a$,

$$\therefore a > y_1 > a - a^2,$$

当 $a < 0$ 时, $a < \frac{a}{2} < 0$,

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$$\therefore a - a^2 < y_1 < a,$$

故 A、B 错误，不符合题意；

$$\therefore \text{当 } a > 0 \text{ 时, } 0 < a < 2a < 3a,$$

由二次函数对称性可知, $y_2 > a > 0$,

当 $a < 0$ 时, $3a < 2a < a < 0$, 由二次函数对称性可知, $y_2 > a$, 不一定大于 0,

故 C 正确符合题意；D 错误，不符合题意；

故选：C.

二、填空题：本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分.

11. 因式分解： $x^2+x=$ _____.

【答案】 $x(x+1)$

【解析】

【分析】要将一个多项式分解因式的一般步骤是首先看各项有没有公因式，若有公因式，则把它提取出来，之后再观察是否是完全平方公式或平方差公式，若是就考虑用公式法继续分解因式. 因此，直接提取公因式 x 即可.

【详解】解： $x^2+x=x(x+1)$

12. 不等式 $3x-2 < 1$ 的解集是_____.

【答案】 $x < 1$

【解析】

【分析】本题考查的是解一元一次不等式，通过移项，未知数系数化为 1，求解即可解.

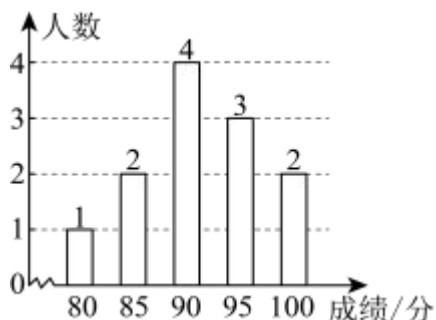
【详解】解： $3x-2 < 1$,

$$3x < 3,$$

$$x < 1,$$

故答案为： $x < 1$.

13. 学校为了解学生的安全防范意识，随机抽取了 12 名学生进行相关知识测试，将测试成绩整理得到如图所示的条形统计图，则这 12 名学生测试成绩的中位数是_____。（单位：分）



【答案】 90

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

【解析】

【分析】本题考查了中位数的知识，解题的关键是了解中位数的求法，难度不大。

根据中位数的定义（排序后，位于中间位置的数为中位数），结合图中的数据进行计算即可；

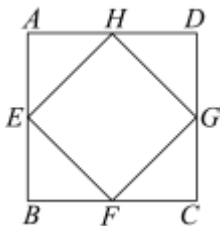
【详解】解：∵共有 12 个数，

∴中位数是第 6 和 7 个数的平均数，

∴中位数是 $(90 + 90) \div 2 = 90$ ；

故答案为：90.

14. 如图，正方形 $ABCD$ 的面积为 4，点 E ， F ， G ， H 分别为边 AB ， BC ， CD ， AD 的中点，则四边形 $EFGH$ 的面积为_____.



【答案】2

【解析】

【分析】本题考查正方形性质，线段中点的性质，根据正方形性质和线段中点的性质得到

$HD = DG = 1$ ，进而得到 $S_{\triangle DGH}$ ，同理可得 $S_{\triangle AHE} = S_{\triangle FFB} = S_{\triangle CGF} = \frac{1}{2}$ ，最后利用四边形 $EFGH$ 的面积 = 正方形 $ABCD$ 的面积 - 4 个小三角形面积求解，即可解题.

【详解】解：∵正方形 $ABCD$ 的面积为 4，

∴ $AB = BC = CD = AD = 2$ ， $\angle D = 90^\circ$ ，

∵点 E ， F ， G ， H 分别为边 AB ， BC ， CD ， AD 的中点，

∴ $HD = DG = 1$ ，

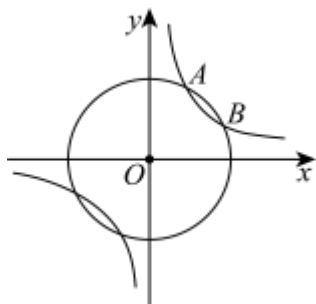
∴ $S_{\triangle DGH} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$ ，

同理可得 $S_{\triangle AHE} = S_{\triangle FFB} = S_{\triangle CGF} = \frac{1}{2}$ ，

∴ 四边形 $EFGH$ 的面积为 $4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 2$.

故答案为：2.

15. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象与 $\odot O$ 交于 A, B 两点，且点 A, B 都在第一象限. 若 $A(1, 2)$ ，则点 B 的坐标为_____.

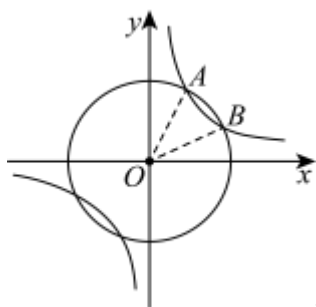


【答案】 (2,1)

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数的性质以及勾股定理，完全平方公式的应用，先根据 $A(1,2)$ 得出 $k=2$ ，设 $B(n, m)$ ，则 $nm=k=2$ ，结合完全平方公式的变形与应用得出 $m+\frac{2}{m}=3$ ， $m^2-3m+2=(m-1)(m-2)=0$ ，结合 $A(1,2)$ ，则 $B(2,1)$ ，即可作答.

【详解】 解：如图：连接 OA ， OB



$\therefore$ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象与 $\odot O$ 交于 A, B 两点，且 $A(1,2)$

$$\therefore 2=\frac{k}{1}, k=2$$

设 $B(n, m)$ ，则 $nm=k=2$

$$\therefore OB=OA=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

$$\therefore m^2+n^2=(\sqrt{5})^2=5$$

$$\text{则 } (m+n)^2=m^2+n^2+2mn=5+4=9$$

$\therefore$ 点 B 在第一象限

$$\therefore m+n=3$$

把 $nm=k=2$ 代入得 $m+\frac{2}{m}=3$ ， $m^2-3m+2=(m-1)(m-2)=0$

$$\therefore m_1=1, m_2=2$$

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

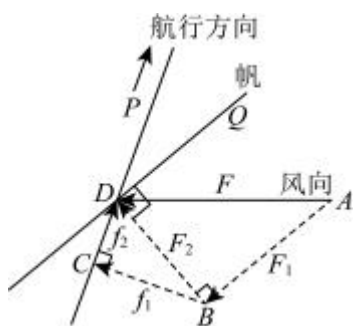
经检验： $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ 都是原方程的解

$$\therefore A(1, 2)$$

$$\therefore B(2, 1)$$

故答案为：(2, 1)

16. 无动力帆船是借助风力前行的. 下图是帆船借助风力航行的平面示意图, 已知帆船航行方向与风向所在直线的夹角 $\angle PDA$ 为 70° , 帆与航行方向的夹角 $\angle PDQ$ 为 30° , 风对帆的作用力 F 为 400N . 根据物理知识, F 可以分解为两个力 F_1 与 F_2 , 其中与帆平行的力 F_1 不起作用, 与帆垂直的力 F_2 仅可以分解为两个力 f_1 与 f_2 , f_1 与航行方向垂直, 被舵的阻力抵消; f_2 与航行方向一致, 是真正推动帆船前行的动力. 在物理学上常用线段的长度表示力的大小, 据此, 建立数学模型: $F = AD = 400$, 则 $f_2 = CD =$ _____. (单位: N) (参考数据: $\sin 40^\circ = 0.64, \cos 40^\circ = 0.77$)

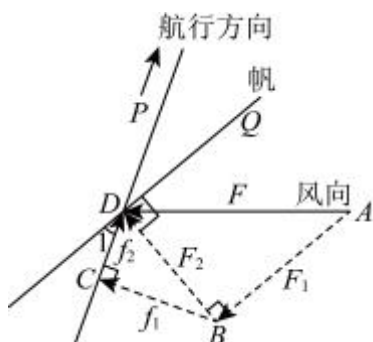


【答案】128

【解析】

【分析】此题考查了解直角三角形的应用, 求出 $\angle ADQ = 40^\circ$, $\angle 1 = \angle PDQ = 30^\circ$, 由 $AB \parallel QD$ 得到 $\angle BAD = \angle ADQ = 40^\circ$, 求出 $F_2 = BD = AD \cdot \sin \angle BAD = 256$, 求出 $\angle BDC = 90^\circ - \angle 1 = 60^\circ$ 在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, 根据 $f_2 = CD = BD \cdot \cos \angle BDC$ 即可求出答案.

【详解】解: 如图,



$\therefore$ 帆船航行方向与风向所在直线的夹角 $\angle PDA$ 为 70° , 帆与航行方向的夹角 $\angle PDQ$ 为 30° ,
 $\therefore \angle ADQ = \angle PDA - \angle PDQ = 70^\circ - 30^\circ = 40^\circ$, $\angle 1 = \angle PDQ = 30^\circ$,

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$$\therefore AB \parallel QD,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle ADQ = 40^\circ,$$

在 $Rt\triangle ABD$ 中, $F = AD = 400$, $\angle ABD = 90^\circ$,

$$\therefore F_2 = BD = AD \cdot \sin \angle BAD = 400 \times \sin 40^\circ = 400 \times 0.64 = 256,$$

由题意可知, $BD \perp DQ$,

$$\therefore \angle BDC + \angle 1 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = 90^\circ - \angle 1 = 60^\circ$$

在 $Rt\triangle BCD$ 中, $BD = 256$, $\angle BCD = 90^\circ$,

$$f_2 = CD = BD \cdot \cos \angle BDC = 256 \times \cos 60^\circ = 256 \times \frac{1}{2} = 128,$$

故答案为: 128

三、解答题: 本题共 9 小题, 共 86 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 计算: $(-1)^0 + |-5| - \sqrt{4}$.

【答案】4

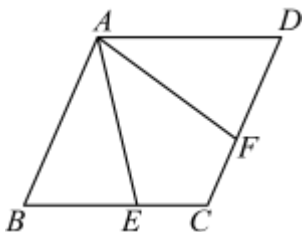
【解析】

【分析】本小题考查零指数幂、绝对值、算术平方根等基础知识, 考查运算能力.

根据零指数幂、绝对值、算术平方根分别计算即可;

【详解】解: 原式 $= 1 + 5 - 2 = 4$.

18. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, 点 E 、 F 分别在 BC 、 CD 边上, $\angle AEB = \angle AFD$, 求证: $BE = DF$.



【答案】见解析

【解析】

【分析】本题考查菱形的性质、全等三角形的判定与性质, 熟练掌握全等三角形的判定与性质是解答的关键. 根据菱形的性质得 $AB = AD$, $\angle B = \angle D$, 再根据全等三角形的判定证明

$\triangle ABE \cong \triangle ADF$ (AAS) 即可.

【详解】证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AB = AD, \angle B = \angle D,$$

$$\because \angle AEB = \angle AFD,$$

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADF (AAS),$$

$$\therefore BE = DF.$$

19. 解方程: $\frac{3}{x+2} + 1 = \frac{x}{x-2}$.

【答案】 $x = 10$.

【解析】

【分析】 本题考查解分式方程,掌握解分式方程的步骤和方法,将分式方程化为整式方程求解,即可解题.

【详解】 解: $\frac{3}{x+2} + 1 = \frac{x}{x-2}$,

方程两边都乘 $(x+2)(x-2)$, 得 $3(x-2) + (x+2)(x-2) = x(x+2)$.

去括号得: $3x - 6 + x^2 - 4 = x^2 + 2x$,

解得 $x = 10$.

经检验, $x = 10$ 是原方程的根.

20. 已知 A、B 两地都只有甲、乙两类普通高中学校. 在一次普通高中学业水平考试中, A 地甲类学校有考生 3000 人, 数学平均分为 90 分; 乙类学校有考生 2000 人, 数学平均分为 80 分.

(1) 求 A 地考生的数学平均分;

(2) 若 B 地甲类学校数学平均分为 94 分, 乙类学校数学平均分为 82 分, 据此, 能否判断 B 地考生数学平均分一定比 A 地考生数学平均分高? 若能, 请给予证明; 若不能, 请举例说明.

【答案】 (1) 86; (2) 不能, 举例见解析.

【解析】

【分析】 本小题考查加权平均数等基础知识,

(1) 根据平均数的概念求解即可;

(2) 根据平均数的意义求解即可.

【小问 1 详解】

由题意, 得 A 地考生的数学平均分为 $\frac{1}{5000} \times (90 \times 3000 + 80 \times 2000) = 86$.

【小问 2 详解】

不能.

举例如下: 如 B 地甲类学校有考生 1000 人, 乙类学校有考生 3000 人, 则 B 地考生的数学平均分为

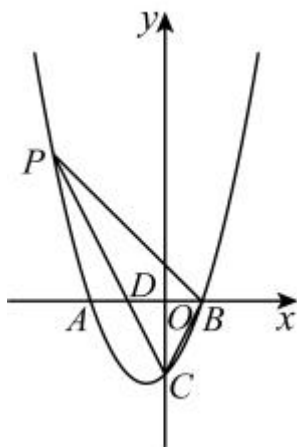
$$\frac{1}{4000} \times (94 \times 1000 + 82 \times 3000) = 85.$$

因为 $85 < 86$,

所以不能判断 B 地考生数学平均分一定比 A 地考生数学平均分高.

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

21. 如图，已知二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交于 A, B 两点，与 y 轴交于点 C ，其中 $A(-2, 0), C(0, -2)$ 。



(1) 求二次函数的表达式；

(2) 若 P 是二次函数图象上的一点，且点 P 在第二象限，线段 PC 交 x 轴于点 D ， $\triangle PDB$ 的面积是 $\triangle CDB$ 的面积 2 倍，求点 P 的坐标。

【答案】 (1) $y = x^2 + x - 2$

(2) $(-3, 4)$

【解析】

【分析】 本小题考查二次函数表达式、二次函数的图象与性质二元一次方程组、一元二次方程、三角形面积等基础知识，考查运算能力、推理能力、几何直观等，考查数形结合思想、函数与方程思想、化归与转化思想等。

(1) 根据待定系数法求解即可；

(2) 设 $P(m, n)$ ，因为点 P 在第二象限，所以 $m < 0, n > 0$ 。依题意，得 $\frac{S_{\triangle PDB}}{S_{\triangle CDB}} = 2$ ，
 $\frac{n}{CO} = 2$ ，求出 $n = 2CO = 4$ ，由 $m^2 + m - 2 = 4$ ，求出 m ，即可求出点 P 的坐标。

【小问 1 详解】

解：将 $A(-2, 0), C(0, -2)$ 代入 $y = x^2 + bx + c$ ，

$$\text{得} \begin{cases} 4 - 2b + c = 0 \\ c = -2 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} b = 1 \\ c = -2 \end{cases},$$

所以，二次函数的表达式为 $y = x^2 + x - 2$ 。

【小问 2 详解】

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

设 $P(m, n)$ ，因为点 P 在第二象限，所以 $m < 0, n > 0$ 。

依题意，得 $\frac{S_{\triangle PDB}}{S_{\triangle CDB}} = 2$ ，即 $\frac{\frac{1}{2}BD \cdot n}{\frac{1}{2}BD \cdot CO} = 2$ ，所以 $\frac{n}{CO} = 2$ 。

由已知，得 $CO = 2$ ，

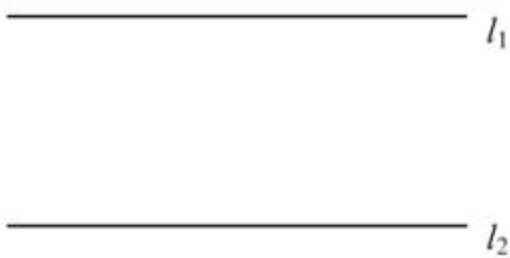
所以 $n = 2CO = 4$ 。

由 $m^2 + m - 2 = 4$ ，

解得 $m_1 = -3, m_2 = 2$ （舍去），

所以点 P 坐标为 $(-3, 4)$ 。

22. 如图，已知直线 $l_1 \parallel l_2$ 。



(1) 在 l_1, l_2 所在的平面内求作直线 l ，使得 $l \parallel l_1 \parallel l_2$ ，且 l 与 l_1 间的距离恰好等于 l 与 l_2 间的距离；（要求：尺规作图，不写作法，保留作图痕迹）

(2) 在 (1) 的条件下，若 l_1 与 l_2 间的距离为 2，点 A, B, C 分别在 l, l_1, l_2 上，且 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，求 $\triangle ABC$ 的面积。

【答案】 (1) 见解析；

(2) $\triangle ABC$ 的面积为 1 或 $\frac{5}{2}$ 。

【解析】

【分析】 本题主要考查基本作图，平行线的性质，全等三角形的判定以及分类讨论思想：

(1) 先作出与 l_1, l_2 垂直的垂线，再作出夹在 l_1, l_2 间垂线段的垂直平分线即可；

(2) 分 $\angle BAC = 90^\circ, AB = AC$ ； $\angle ABC = 90^\circ, BA = BC$ ； $\angle ACB = 90^\circ, CA = CB$ 三种情况，结合三角形面积公式求解即可

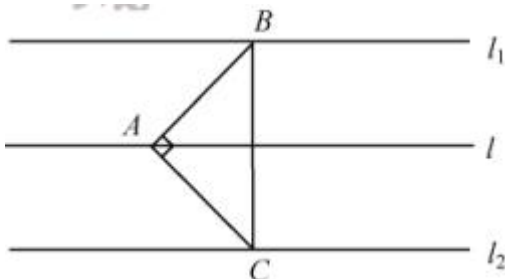
【小问 1 详解】

解：如图，

【小问 2 详解】

$\because l \parallel l_1 \parallel l_2$, 直线 l_1 与 l_2 间的距离为 2, 且 l 与 l_1 间的距离等于 l 与 l_2 间的距离, 根据图形的对称性可知: $BC = 2$.

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = 1$$



分别过点 A, C 作直线 l_1 的垂线, 垂足为 M, N ,

$\therefore l \parallel l_1 \parallel l_2$, 直线 l_1 与 l_2 间的距离为 2, 且 l 与 l_1 间的距离等于 l 与 l_2 间的距离,

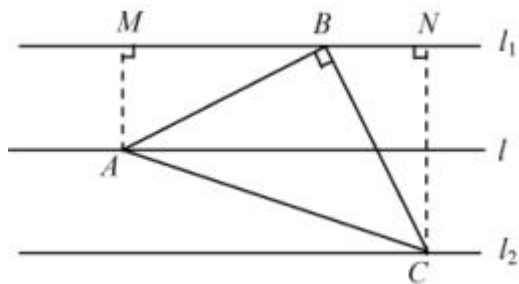
$$\therefore \angle MAB + \angle ABM = 90^\circ, \quad \angle NBC + \angle ABM = 90^\circ$$

$$\therefore BM = CN = 2$$

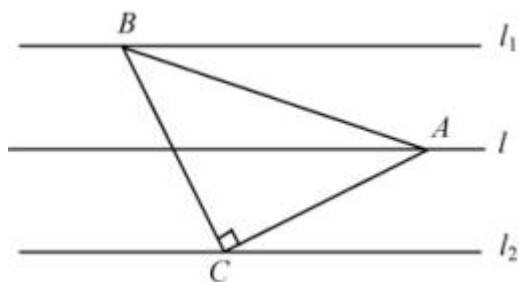
$$\therefore AB = \sqrt{5}$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{5}{2}$$

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】



③当 $\angle ACB = 90^\circ, CA = CB$ 时, 同理可得, $S_{\triangle ABC} = \frac{5}{2}$.



综上所述, $\triangle ABC$ 的面积为 1 或 $\frac{5}{2}$.

23. 已知实数 a, b, c, m, n 满足 $3m+n = \frac{b}{a}, mn = \frac{c}{a}$.

(1) 求证: $b^2 - 12ac$ 为非负数;

(2) 若 a, b, c 均为奇数, m, n 是否可以都为整数? 说明你的理由.

【答案】 (1) 证明见解析;

(2) m, n 不可能都为整数, 理由见解析.

【解析】

【分析】 (1) 根据题意得出 $b = a(3m+n), c = amn$, 进而计算 $b^2 - 12ac$, 根据非负数的性质, 即可求解;

(2) 分情况讨论, ① m, n 都为奇数; ② m, n 为整数, 且其中至少有一个为偶数.

【小问 1 详解】

解: 因为 $3m+n = \frac{b}{a}, mn = \frac{c}{a}$,

所以 $b = a(3m+n), c = amn$.

则 $b^2 - 12ac = [a(3m+n)]^2 - 12a^2mn$

$= a^2(9m^2 + 6mn + n^2) - 12a^2mn$

$= a^2(9m^2 - 6mn + n^2)$

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$$= a^2(3m-n)^2$$

因为 a, m, n 是实数，所以 $a^2(3m-n)^2 \geq 0$ ，

所以 $b^2 - 12ac$ 为非负数.

【小问 2 详解】

m, n 不可能都为整数.

理由如下：若 m, n 都为整数，其可能情况有：① m, n 都为奇数；② m, n 为整数，且其中至少有一个为偶数.

①当 m, n 都为奇数时，则 $3m+n$ 必为偶数.

$$\text{又 } 3m+n = \frac{b}{a}, \text{ 所以 } b = a(3m+n).$$

因为 a 为奇数，所以 $a(3m+n)$ 必为偶数，这与 b 为奇数矛盾.

②当 m, n 为整数，且其中至少有一个为偶数时，则 mn 必为偶数.

$$\text{又因为 } mn = \frac{c}{a}, \text{ 所以 } c = amn.$$

因为 a 为奇数，所以 amn 必为偶数，这与 c 为奇数矛盾.

综上所述， m, n 不可能都为整数.

【点睛】本小题考查整式的运算、因式分解、等式的性质等基础知识；考查运算能力、推理能力、创新意识等，考查综合应用所学知识分析、解决问题的能力；考查化归与转化思想、分类与整合思想等.

24. 在手工制作课上，老师提供了如图 1 所示的矩形卡纸 $ABCD$ ，要求大家利用它制作一个底面为正方形的礼品盒. 小明按照图 2 的方式裁剪（其中 $AE = FB$ ），恰好得到纸盒的展开图，并利用该展开图折成一个礼品盒，如图 3 所示.

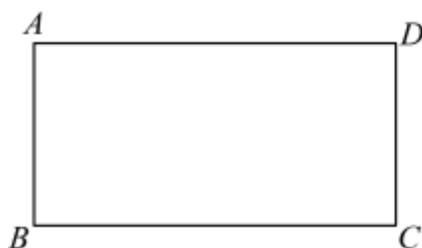


图 1

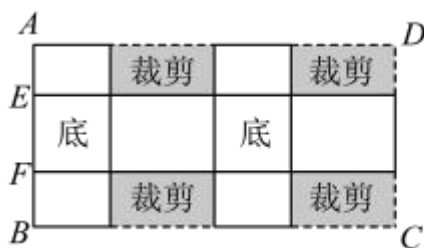


图 2

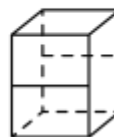


图 3

$$\frac{AD}{AB}$$

(1) 直接写出 $\frac{AD}{AB}$ 的值；

(2) 如果要求折成的礼品盒的两个相对的面上分别印有“吉祥”和“如意”，如图 4 所示，那么应选择的纸盒展开图图样是（ ）



图 4

A.

早

祥

意

如

B.

早

吓

鞋

意

C.

早

祥

如

意

D.

吉

鞋

如

意

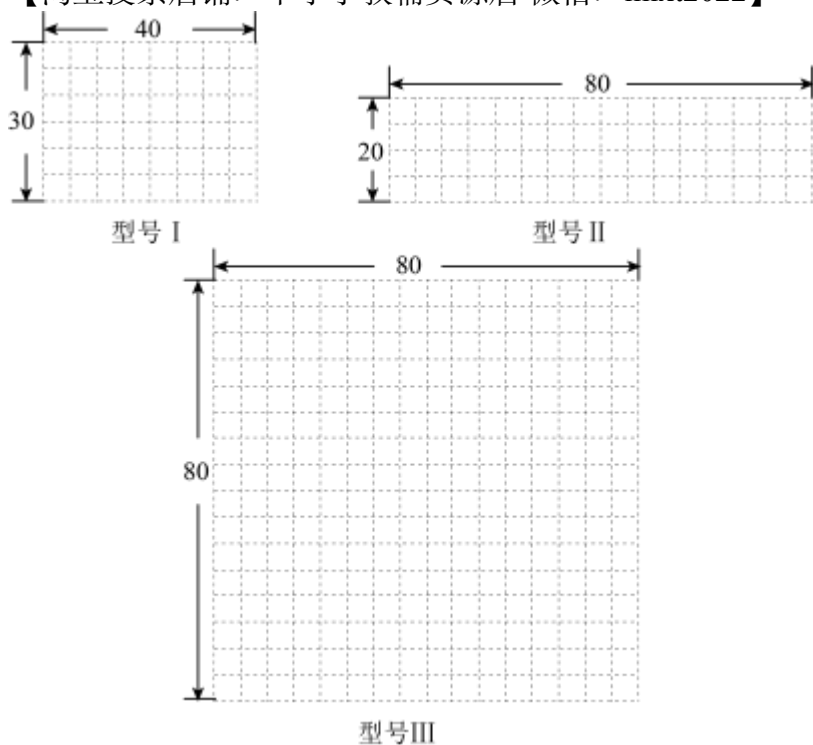
(3)

卡纸型号	型号Ⅰ	型号Ⅱ	型号Ⅲ
规格（单位： cm）	30×40	20×80	80×80
单价（单位：元）	3	5	20

现以小明设计的纸盒展开图（图 2）为基本样式，适当调整 AE ， EF 的比例，制作棱长为 10cm 的正方体礼品盒，如果要制作 27 个这样的礼品盒，请你合理选择上述卡纸（包括卡纸的型号及相应型号卡纸的张数），并在卡纸上画出设计示意图（包括一张卡纸可制作几个礼品盒，其展开图在卡纸上的分布情况），给出所用卡纸的总费用。

（要求：①同一型号的卡纸如果需要不止一张，只要在一张卡纸上画出设计方案；②没有用到的卡纸，不要在该型号的卡纸上作任何设计；③所用卡纸的数量及总费用直接填在答题卡的表格上；④本题将综合考虑“利用卡纸的合理性”和“所用卡纸的总费用”给分，总费用最低的才能得满分；⑤试卷上的卡纸仅供作草稿用）

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】



【答案】 (1) 2; (2) C;

(3) 见解析.

【解析】

【分析】 本题考查了几何体的展开与折叠，空间观念、推理能力、模型观念、创新意识等知识，掌握相关知识是解题的关键.

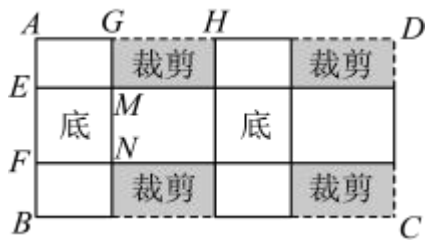
(1) 由折叠和题意可知, $GH = AE + FB$, $AH = DH$, 四边形 $EFNM$ 是正方形, 得到 $EM = EF$, 即 $AG = EF$, 即可求解;

(2) 根据几何体的展开图即可求解;

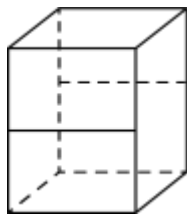
(3) 由题意可得, 每张型号 III 卡纸可制作 10 个正方体, 每张型号 II 卡纸可制作 2 个正方体, 每张型号 I 卡纸可制作 1 个正方体, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: 如图:



上述图形折叠后变成:



【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

由折叠和题意可知， $GH = AE + FB$ ， $AH = DH$ ，

$\therefore$ 四边形 $EFNM$ 是正方形，

$\therefore EM = EF$ ，即 $AG = EF$ ，

$\therefore GH + AG = AE + FB + EF$ ，即 $AH = AB$ ，

$\therefore AH = DH$ ，

$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AH + DH}{AB} = 2$ ，

$\therefore \frac{AD}{AB}$ 的值为：2.

【小问 2 详解】

解：根据几何体的展开图可知，“吉”和“如”在对应面上，“祥”和“意”在对应面上，而对应面上的字中间相隔一个几何图形，且字体相反，

$\therefore$ C 选项符合题意，

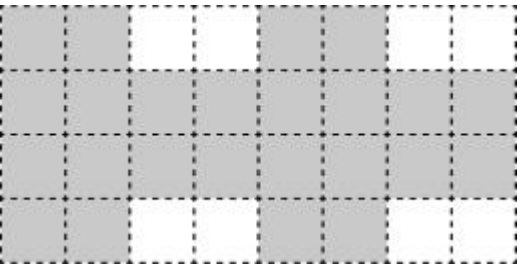
故选：C.

【小问 3 详解】

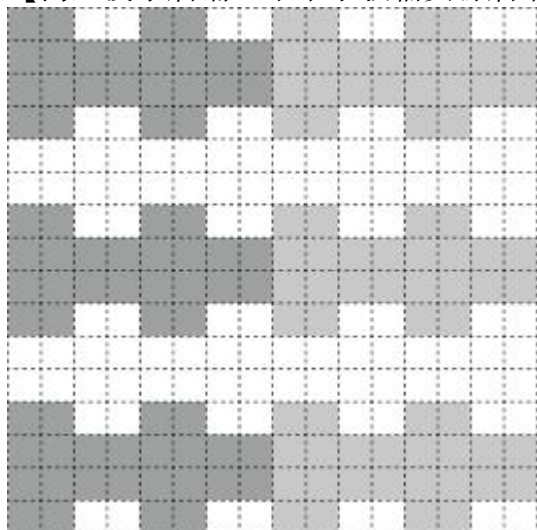
解：

卡纸型号	型号 I	型号 II	型号 III
需卡纸的数量（单位：张）	1	3	2
所用卡纸总费用（单位：元）	58		

根据（1）和题意可得：卡纸每格的边长为 5cm ，则要制作一个边长为 10cm 的正方体的展开图形为：



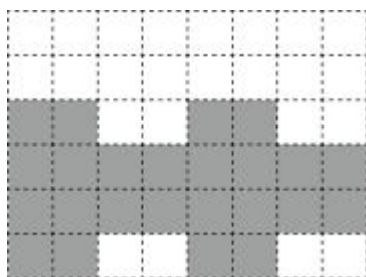
$\therefore$ 型号 III 卡纸，每张卡纸可制作 10 个正方体，如图：



型号Ⅱ卡纸，每张这样的卡纸可制作 2 个正方体，如图：



型号Ⅰ卡纸，每张这样的卡纸可制作 1 个正方体，如图：



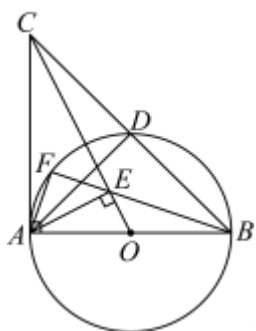
∴可选择型号Ⅲ卡纸 2 张，型号Ⅱ卡纸 3 张，型号Ⅰ卡纸 1 张，则

$$10 \times 2 + 2 \times 3 + 1 \times 1 = 27 \quad (\text{个}) ,$$

∴所用卡纸总费用为：

$$20 \times 2 + 5 \times 3 + 3 \times 1 = 58 \quad (\text{元}) .$$

25. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$ ，以 AB 为直径的 $\odot O$ 交 BC 于点 D ， $AE \perp OC$ ，垂足为 E ， BE 的延长线交 $\widehat{AD}$ 于点 F 。



$\frac{OE}{AE}$

(1) 求 $\frac{OE}{AE}$ 的值；

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

(2) 求证: $\triangle AEB \sim \triangle BEC$;

(3) 求证: AD 与 EF 互相平分.

【答案】 (1) $\frac{1}{2}$

(2) 证明见解析 (3) 证明见解析

【解析】

【分析】 (1) 先证得 $AC = 2AO$, 再在 $Rt\triangle AOC$ 中, $\tan\angle AOC = \frac{AC}{AO} = 2$. 在 $Rt\triangle AOE$ 中,
 $\tan\angle AOC = \frac{AE}{OE}$, 可得 $\frac{AE}{OE} = 2$, 再证得结果;

(2) 过点 B 作 $BM \parallel AE$, 交 EO 延长线于点 M , 先证明 $\triangle AOE \cong \triangle BOM$, 可得
 $AE = BM, OE = OM$, 再证得 $\angle BAE = \angle CBE$, 再由相似三角形的判定可得结论;

(3) 如图, 连接 DE, DF , 由 (2) $\triangle AEB \sim \triangle BEC$, 可得
 $\frac{AE}{BE} = \frac{AB}{BC} = \frac{2AO}{2BD} = \frac{AO}{BD}, \angle EAO = \angle EBD$, 从而得出 $\triangle AOE \sim \triangle BDE$, 从而得出
 $\angle BED = \angle AEO = 90^\circ$, 得出 $\angle AFB = \angle DEF$, 再上平行线判定得出 $AF \parallel DE$, 再证得 $AE \parallel FD$,
从而得出四边形 $AEDF$ 是平行四边形, 最后由平行四边形的性质可得结果.

【小问 1 详解】

$\because AB = AC$, 且 AB 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore AC = 2AO$.

$\because \angle BAC = 90^\circ$,

$\therefore$ 在 $Rt\triangle AOC$ 中, $\tan\angle AOC = \frac{AC}{AO} = 2$.

$\because AE \perp OC$,

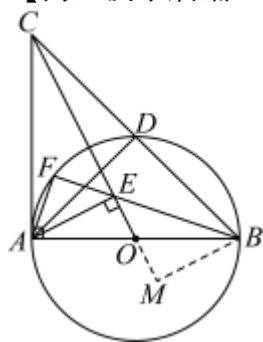
$\therefore$ 在 $Rt\triangle AOE$ 中, $\tan\angle AOC = \frac{AE}{OE}$.

$\therefore \frac{AE}{OE} = 2$,

$\therefore \frac{OE}{AE} = \frac{1}{2}$;

【小问 2 详解】

过点 B 作 $BM \parallel AE$, 交 EO 延长线于点 M .



$$\therefore \angle BAE = \angle ABM, \angle AEO = \angle BMO = 90^\circ$$

$$\because AO = BO,$$

$$\therefore \triangle AOE \cong \triangle BOM,$$

$$\therefore AE = BM, OE = OM$$

$$\because \frac{OE}{AE} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BM = 2OE = EM,$$

$$\therefore \angle MEB = \angle MBE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle AEO + \angle MEB = 135^\circ, \angle BEC = 180^\circ - \angle MEB = 135^\circ,$$

$$\because \angle AEB = \angle BEC$$

$$\therefore \angle AB = AC, \angle BAC = 90^\circ,$$

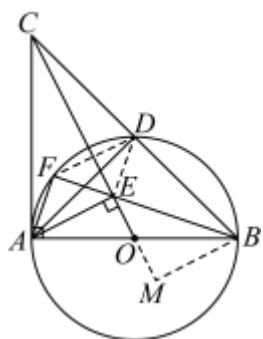
$$\therefore \angle ABM = \angle CBE,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle CBE,$$

$$\therefore \triangle AEB \sim \triangle BEC$$

【小问 3 详解】

如图，连接 DE, DF .



$$\because AB \text{ 是 } \odot O \text{ 的直径,}$$

$$\therefore \angle ADB = \angle AFB = 90^\circ, AB = 2AO$$

$$\because AB = AC, \angle BAC = 90^\circ,$$

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$$\therefore BC = 2BD, \angle DAB = 45^\circ$$

由 (2) 知, $\triangle AEB \sim \triangle BEC$,

$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{AB}{BC} = \frac{2AO}{2BD} = \frac{AO}{BD}, \angle EAO = \angle EBD$$

$$\therefore \triangle AOE \sim \triangle BDE$$

$$\therefore \angle BED = \angle AEO = 90^\circ$$

$$\therefore \angle DEF = 90^\circ$$

$$\therefore \angle AFB = \angle DEF$$

$$\therefore AF \parallel DE$$

由 (2) 知, $\angle AEB = 135^\circ$,

$$\therefore \angle AEF = 180^\circ - \angle AEB = 45^\circ$$

$$\because \angle DFB = \angle DAB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DFB = \angle AEF$$

$$\therefore AE \parallel FD$$

$\therefore$ 四边形 $AEDF$ 是平行四边形,

$\therefore AD$ 与 EF 互相平分.

【点睛】本小题考查等腰三角形及直角三角形的判定与性质、锐角三角函数、全等三角形的判定与性质、相似三角形的判定与性质、平行线的判定与性质、平行四边形的判定与性质、圆的基本性质等基础知识,考查推理能力、几何直观、运算能力、创新意识等,考查化归与转化思想等.