

2024 年兰州市初中学业水平考试

数学

注意事项：

1. 全卷共 120 分，考试时间 120 分钟。
2. 考生必须将姓名、准考证号、考场号、座位号等个人信息填（涂）写在试卷及答题卡上。
3. 考生务必将答案直接填（涂）写在答题卡的相应位置上。
4. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 2024 的绝对值是（ ）

- A. 2024 B. -2024 C. $\frac{1}{2024}$ D. $-\frac{1}{2024}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了绝对值的意义，熟练掌握一个正数的绝对值是它本身是解题的关键。根据绝对值的意义解答即可。

【详解】解：2024 的绝对值是 2024，
故选：A.

2. 已知 $\angle A = 80^\circ$ ，则 $\angle A$ 的补角是（ ）

- A. 100° B. 80° C. 40° D. 10°

【答案】A

【解析】

【分析】直接利用互补两角的关系进而得出答案。

【详解】解： $\because \angle A = 80^\circ$ ，
 $\therefore \angle A$ 补角为： $180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$.
故选 A.

【点睛】主要考查了互补两角的关系，正确把握定义是解题关键。

3. 2024 年一季度，兰州市坚持稳中求进、综合施策，全市国民经济起步平稳，开局良好。一季度全市地区生产总值 87790000000 元。数据 87790000000 用科学记数法表示为（ ）

- A. 87.79×10^9 B. 8.779×10^9 C. 8.779×10^{10} D. 8.779×10^{11}

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查用科学记数法表示较大的数. 绝对值大于1的数可以用科学记数法表示, 一般形式为 $a \times 10^n$, 其中, $1 \leq |a| < 10$, n 为正整数, 且比原数的整数位数少1, 据此可以解答.

【详解】解: 数据 87790000000 用科学记数法表示为 8.779×10^{10} .

故选: C

4. 计算: $2a(a-1) - 2a^2 =$ ()A. a B. $-a$ C. $2a$ D. $-2a$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了整式的混合运算, 先计算单项式乘以多项式, 再合并同类项即可.

【详解】解: $2a(a-1) - 2a^2$

$$= 2a^2 - 2a - 2a^2$$

$$= -2a$$

故选: D.

5. 一次函数 $y = 2x - 3$ 的图象不经过 ()

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

【答案】B

【解析】

【分析】先判断 k 、 b 的符号, 再判断直线经过的象限, 进而可得答案.

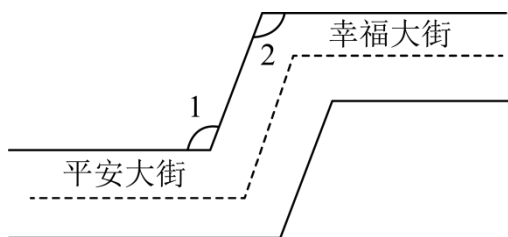
【详解】解: $\because k = 2 > 0, b = -3 < 0$,

$\therefore$ 一次函数 $y = 2x - 3$ 的图象经过第一、三、四象限, 不经过第二象限;

故选: B.

【点睛】本题考查了一次函数的系数与其图象的关系, 属于基础题型, 熟练掌握一次函数的图象与其系数的关系是解题的关键.

6. 如图, 小明在地图上量得 $\angle 1 = \angle 2$, 由此判断幸福大街与平安大街互相平行, 他判断的依据是 ()



- A. 同位角相等，两直线平行
 B. 内错角相等，两直线平行
 C. 同旁内角互补，两直线平行
 D. 对顶角相等

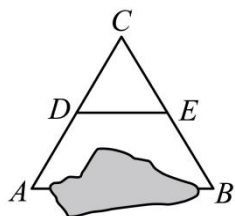
【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了平行线的判定，由 $\angle 1 = \angle 2$ ，即可得出福大街与平安大街互相平行，即内错角相等，两直线平行.

【详解】解： $\because \angle 1 = \angle 2$ ，
 $\therefore$ 福大街与平安大街互相平行，
 判断的依据是：内错角相等，两直线平行，
 故选：B.

7. 如图，小张想估测被池塘隔开的 A, B 两处景观之间的距离，他先在 AB 外取一点 C ，然后步测出 AC, BC 的中点 D, E ，并步测出 DE 的长约为 18m ，由此估测 A, B 之间的距离约为 ()



- A. 18m
 B. 24m
 C. 36m
 D. 54m

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查三角形的中位线的实际应用，由题意，易得 DE 为 $\triangle ABC$ 的中位线，根据三角形的中位线定理，即可得出结果.

【详解】解： $\because$ 点 D, E ，分别为 AC, BC 的中点，
 $\therefore DE$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线，
 $\therefore AB = 2DE = 36\text{m}$ ；
 故选：C.

8. 七巧板、九连环、华容道、鲁班锁是深受大家喜爱的益智玩具，现将 1 个七巧板，2 个九连环，1 个华容

道，2个鲁班锁分别装在6个不透明的盒子中（每个盒子装1个），所有盒子除里面的玩具外均相同．从这6个盒子中随机抽取1个盒子，抽中七巧板的概率是（ ）

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{6}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了根据概率公式计算概率，分析可知6个益智玩具中有1个七巧板，根据概率公式计算即可．

【详解】解：∵一共6个盒子里面有6个益智玩具，6个益智玩具中有1个七巧板，

∴从这6个盒子中随机抽取1个盒子，抽中七巧板的概率是： $\frac{1}{6}$ ，

故选：D．

9. 关于 x 的一元二次方程 $9x^2 - 6x + c = 0$ 有两个相等的实数根，则 $c =$ （ ）

- A. -9 B. 4 C. -1 D. 1

【答案】D

【解析】

【分析】此题考查了根的判别式，根据根的情况确定参数 k 的取值，解题的关键是熟练掌握一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ ，当方程有两个不相等的实数根时， $\Delta > 0$ ；当方程有两个相等的实数根时， $\Delta = 0$ ；当方程没有实数根时， $\Delta < 0$ ．

【详解】解：∵关于 x 的一元二次方程 $9x^2 - 6x + c = 0$ 有两个相等的实数根，

$$\therefore \Delta = (-6)^2 - 4 \times 9 \times c = 36 - 36c = 0,$$

解得： $c = 1$ ，

故选：D．

10. 数学家朱世杰所著的《四元玉鉴》是中国元代重要的数学著作之一，书中记载着这样一个问题，大意是：999文钱买了周果和苦果共1000个，11文钱可买9个甜果，4文钱可买7个苦果，问甜果，苦果各买了多少个？设买了甜果 x 个，苦果 y 个，则可列方程组为（ ）

- A. $\begin{cases} x + y = 1000 \\ \frac{11}{9}x + \frac{4}{7}y = 999 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x - y = 1000 \\ \frac{11}{9}x + \frac{4}{7}y = 999 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x - y = 1000 \\ \frac{4}{7}x + \frac{11}{9}y = 999 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x + y = 999 \\ \frac{4}{7}x + \frac{11}{9}y = 1000 \end{cases}$

【答案】A

【解析】

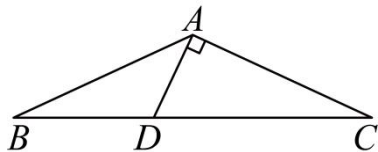
【分析】本题考查根据实际问题列二元一次方程组，根据 999 文钱买了周果和苦果共 1000 个，11 文钱可买 9 个甜果，4 文钱可买 7 个苦果，列出方程组即可。

【详解】解：设买了甜果 x 个，苦果 y 个，由题意，得：

$$\begin{cases} x + y = 1000 \\ \frac{11}{9}x + \frac{4}{7}y = 999 \end{cases};$$

故选 A.

11. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 130^\circ$ ， $DA \perp AC$ ，则 $\angle ADB =$ ()



A. 100° B. 115° C. 130° D. 145°

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了等腰三角形的性质，三角形外角的性质。根据等腰三角形的性质，可得 $\angle C = \frac{180^\circ - \angle BAC}{2} = 25^\circ$ ，再由三角形外角的性质，即可求解。

【详解】解： $\because AB = AC$ ， $\angle BAC = 130^\circ$ ，
 $\therefore \angle C = \frac{180^\circ - \angle BAC}{2} = 25^\circ$ ，

$\because DA \perp AC$ ，

$\therefore \angle CAD = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ADB = \angle C + \angle CAD = 115^\circ$ 。

故选：B

12. 如图 1，在菱形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = 60^\circ$ ，连接 BD ，点 M 从 B 出发沿 BD 方向以 $\sqrt{3}\text{cm/s}$ 的速度运动至 D ，同时点 N 从 B 出发沿 BC 方向以 1cm/s 的速度运动至 C ，设运动时间为 $x(\text{s})$ ， $\triangle BMN$ 的面积为 $y(\text{cm}^2)$ ， y 与 x 的函数图象如图 2 所示，则菱形 $ABCD$ 的边长为 ()

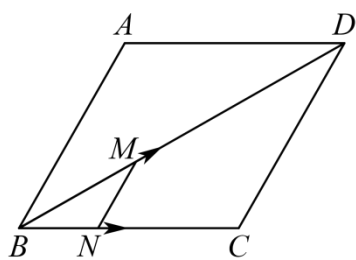


图 1

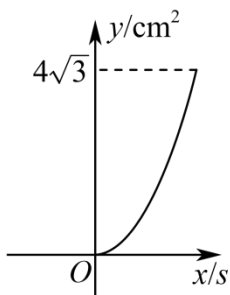


图 2

A. $2\sqrt{2}\text{cm}$ B. $4\sqrt{2}\text{cm}$ C. 4cm D. 8cm

【答案】C

【解析】

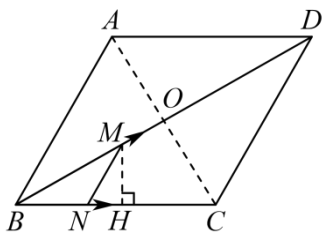
【分析】本题主要考查菱形的性质和二次函数的性质，根据题意可知 $BN = x(\text{cm})$ ， $BM = \sqrt{3}x(\text{cm})$ ，结合菱形的性质得 $\angle DBC = 30^\circ$ ，过点 M 作 $MH \perp BC$ 于点 H ，则 $MH = \frac{\sqrt{3}}{2}x(\text{cm})$ ，那么 $y = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2(\text{cm}^2)$ ，设菱形 $ABCD$ 的边长为 a ，则 $BD = \sqrt{3}a$ ，那么点 M 和点 N 同时到达点 D 和点 C ，此时 $\triangle BMN$ 的面积达到最大值为 $4\sqrt{3}$ ，利用最大值即可求得运动时间 x ，即可知菱形边长。

【详解】解：根据题意知， $BN = x(\text{cm})$ ， $BM = \sqrt{3}x(\text{cm})$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形， $\angle ABC = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle DBC = 30^\circ$ ，

过点 M 作 $MH \perp BC$ 于点 H ，连接 AC 交 BD 于点 O ，如图，



则 $MH = BM \times \sin \angle MBH = \frac{\sqrt{3}}{2}x(\text{cm})$ ，

那么， $\triangle BMN$ 的面积为 $y = \frac{1}{2}BN \times MH = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2(\text{cm}^2)$ ，

设菱形 $ABCD$ 的边长为 a ，

$\therefore BD = 2BO = 2 \times BC \times \cos \angle BOC = 2 \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}a$ ，

∴点 M 和点 N 同时到达点 D 和点 C ，此时 $\triangle BMN$ 的面积达到最大值为 $4\sqrt{3}$ ，

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = 4\sqrt{3}, \text{ 解得 } x = 4, \text{ (负值舍去),}$$

$$\therefore BC = 4.$$

故选：C.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

13. 因式分解 $x^2 - 2x + 1 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(x-1)^2$

【解析】

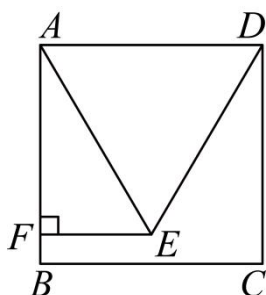
【分析】直接利用乘法公式分解因式得出答案.

【详解】解： $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$.

故答案为： $(x-1)^2$.

【点睛】此题主要考查了公式法分解因式，正确应用乘法公式是解题关键.

14. 如图，四边形 $ABCD$ 为正方形， $\triangle ADE$ 为等边三角形， $EF \perp AB$ 于点 F ，若 $AD = 4$ ，则 $EF = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 2

【解析】

【分析】本题考查正方形的性质，等边三角形的性质，含 30° 度角的直角三角形，根据正方形和等边三角形的性质，得到 $\triangle AFE$ 为含 30° 度角的直角三角形， $AE = AD = 4$ ，根据含 30° 度角的直角三角形的性质求解即可.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形， $\triangle ADE$ 为等边三角形， $EF \perp AB$ ， $AD = 4$ ，

$$\therefore \angle FAD = 90^\circ, \angle EAD = 60^\circ, \angle AFE = 90^\circ, AD = AE = 4,$$

$$\therefore \angle FAE = 30^\circ,$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2}AE = 2;$$

故答案为：2.

15. “轮动发石车”是我国古代的一种投石工具，在春秋战国时期被广泛应用，图1是陈列在展览馆的仿真模型，图2是模型驱动部分的示意图，其中 $\odot M$ ， $\odot N$ 的半径分别是1cm和10cm，当 $\odot M$ 顺时针转动3周时， $\odot N$ 上的点P随之旋转 n° ，则 $n = \underline{\hspace{2cm}}$.

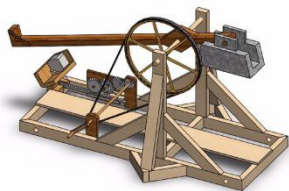


图1

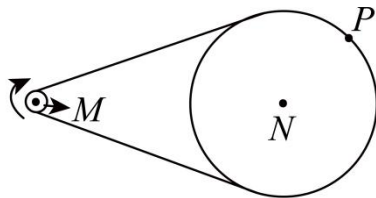


图2

【答案】108

【解析】

【分析】本题主要考查了求弧长. 先求出点P移动的距离，再根据弧长公式计算，即可求解.

【详解】解：根据题意得：点P移动的距离为 $3 \times 2\pi \times 1 = 6\pi \text{cm}$,

$$\therefore \frac{n^\circ \times \pi \times 10}{180} = 6\pi,$$

解得： $n = 108$.

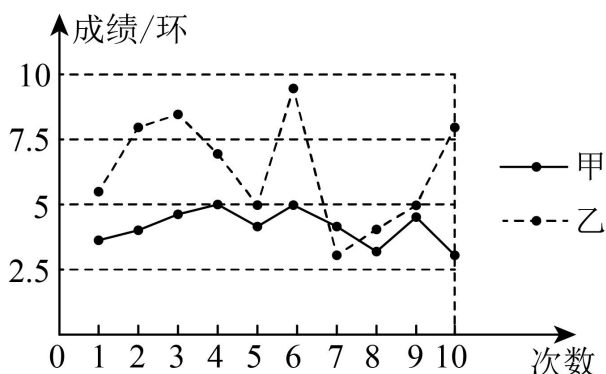
故答案为：108

16. 甲、乙两人在相同条件下各射击10次，两人的成绩（单位：环）如图所示，现有以下三个推断：

①甲的成绩更稳定；

②乙的平均成绩更高；

③每人再射击一次，乙的成绩一定比甲高. 其中正确的是_____. (填序号)



【答案】①②##②①

【解析】

【分析】本题考查了平均数、方差的意义. 解答本题的关键是掌握它们的定义：方差是用来衡量一组数据波动大小的量，方差越大，表明这组数据偏离平均数越大，即波动越大，数据越不稳定；反之，方差越小，表明这组数据分布比较集中，各数据偏离平均数越小，即波动越小，数据越稳定. 根据方差、平均数的意

义进行判断即可求出答案.

【详解】解：根据图象可知甲的波动比乙小，则甲的成绩更加稳定，故①正确；根据图象可知甲的平均成绩稳定在 5 以下，而乙的平均成绩稳定在 7.5 左右，则乙的平均成绩更高，故②正确；如果每人再射击一次，但乙的成绩不一定比甲高，只能是可能性较大，因为乙的平均成绩更高，但是波动较大，故③错误.

故答案为：①②.

三、解答题 (本大题共 12 小题，共 72 分. 解答时写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. 计算： $\sqrt{27} - \sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{8}$.

【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的运算，先根据二次根式的性质化简，进行乘法运算，再合并同类二次根式即可.

【详解】解：原式 $= 3\sqrt{3} - \sqrt{\frac{3}{2}} \times 8$

$$= 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{3}.$$

18. 解不等式组：
$$\begin{cases} 2x+6 > x \\ \frac{1-3x}{2} < 1-2x \end{cases}$$

【答案】 $-6 < x < 1$

【解析】

【分析】 本题考查求不等式组的解集，先求出每一个不等式的解集，找到它们的公共部分，即可得出结果.

【详解】解：
$$\begin{cases} 2x+6 > x \text{ ①} \\ \frac{1-3x}{2} < 1-2x \text{ ②} \end{cases}$$

由①，得： $x > -6$ ；

由②，得： $x < 1$ ；

∴ 不等式组的解集为： $-6 < x < 1$.

19. 先化简，再求值： $\left(1 + \frac{a+7}{a+1}\right) \div \frac{a+4}{a}$ ，其中 $a = 4$.

【答案】 $\frac{2a}{a+1}, \frac{8}{5}$

【解析】

【分析】 本题考查分式的化简求值，先通分计算括号内，将除法变乘法，进行约分化简后，再代值计算即可.

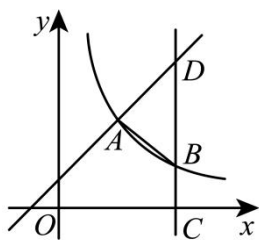
【详解】 解： 原式 $= \frac{a+1+a+7}{a+1} \cdot \frac{a}{a+4}$

$$= \frac{2(a+4)}{a+1} \cdot \frac{a}{a+4}$$

$$= \frac{2a}{a+1};$$

当 $a=4$ 时， 原式 $= \frac{2 \times 4}{4+1} = \frac{8}{5}$.

20. 如图，反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 与一次函数 $y = mx + 1$ 的图象交于点 $A(2, 3)$ ，点 B 是反比例函数图象上一点， $BC \perp x$ 轴于点 C ，交一次函数的图象于点 D ，连接 AB .



(1) 求反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 与一次函数 $y = mx + 1$ 的表达式;

(2) 当 $OC = 4$ 时，求 $\triangle ABD$ 的面积.

【答案】 (1) $y = \frac{6}{x}, y = x + 1$

(2) $\frac{7}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数与反比例函数的综合问题，待定系数法求反比例函数以及一次函数的解析式. 一次函数与反比例函数的交点问题，两点之间的距离公式等知识，掌握反比例函数的性质以及一次函数的性质是解题的关键.

(1) 利用待定系数法即可求出反比例函数以及一次函数的解析式.

(2) 由已知条件求出点 C ，点 B ，点 D 的坐标，过点 B 作 $BE \parallel x$ 轴交一次函数 $y = x + 1$ 的图象交于点 E ，过点 A 作 $AF \perp BE$ 与点 F ，利用两点之间的距离公式分别求出 BD ， BE ， AF 的值，最后根据

$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle DBE} - S_{\triangle EAB}$ 即可求出答案.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 与一次函数 $y = mx + 1$ 的图象交于点 $A(2, 3)$,

$$\therefore 3 = \frac{k}{2}, \quad 3 = 2m + 1,$$

$$\therefore k = 6, \quad m = 1,$$

$$\therefore \text{反比例函数为: } y = \frac{6}{x}, \quad \text{一次函数的解析式为: } y = x + 1.$$

【小问 2 详解】

$$\because OC = 4,$$

$$\therefore C(4, 0),$$

$\because BC \perp x$ 轴于点 C , 交一次函数的图象于点 D ,

$\therefore$ 点 B 的横坐标为 4. 点 D 的横坐标为 4.

$$\therefore y_B = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, \quad y_D = 4 + 1 = 5$$

$$\therefore B\left(4, \frac{3}{2}\right), \quad D(4, 5)$$

$$\therefore BD = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

过点 B 作 $BE \parallel x$ 轴交一次函数 $y = x + 1$ 的图象于点 E , 过点 A 作 $AF \perp BE$ 与点 F ,

$$\therefore BD \perp BE, \quad \text{点 } E \text{ 的纵坐标为 } \frac{3}{2},$$

$$\therefore AF = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\text{把 } \frac{3}{2} \text{ 代入 } y = x + 1, \text{ 得 } \frac{3}{2} = x + 1,$$

$$\therefore x = \frac{1}{2},$$

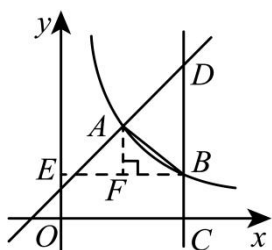
$$\therefore \text{点 } E\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right),$$

$$\therefore BE = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2},$$

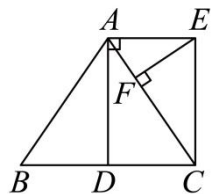
$$\therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle DBE} - S_{\triangle EAB}$$

$$= \frac{1}{2} BD \cdot BE - \frac{1}{2} AF \cdot BE$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{7}{2}$$
$$= \frac{7}{2}$$



21. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, D 是 BC 的中点, $CE \parallel AD$, $AE \perp AD$, $EF \perp AC$.



- (1) 求证: 四边形 $ADCE$ 是矩形;
(2) 若 $BC = 4, CE = 3$, 求 EF 的长.

【答案】(1) 证明见解析

$$(2) \quad \frac{6\sqrt{13}}{13}$$

【解析】

【分析】本题主要考查了矩形的判定以及性质，三腰三角形三线合一的性质，勾股定理等知识，掌握这些性质是解题的关键.

(1) 由等腰三角形三线合一的性质得出 $\angle ADC = 90^\circ$ ，有平行线的性质得出 $\angle ECD = 90^\circ$ ，结合已知条件可得出 $\angle EAD = 90^\circ$ ，即可证明四边形 $ADCE$ 是矩形.

(2) 由 (1) 可知四边形 $ADCE$ 是矩形. 由矩形的性质得出 $AE = DC$, $CE = AD = 3$, $\angle AEC = 90^\circ$, 由已知条件可得出 $DC = AE = \frac{1}{2}BC = 2$, 由勾股定理求出 AC , 最后根据等面积法可得出

$$\frac{1}{2}EF \cdot AC = \frac{1}{2}AE \cdot CE, \text{ 即可求出 } EF.$$

【小问 1 详解】

证明: $\because AB = AC$, D 是 BC 的中点,

$$\therefore AD \perp BC,$$

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore CE \parallel AD,$$

$$\therefore \angle ECD = 180^\circ - \angle ADC = 90^\circ.$$

又 $\because AE \perp AD$,

$\therefore \angle EAD = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 是矩形.

【小问 2 详解】

由 (1) 可知四边形 $ADCE$ 是矩形.

$\therefore AE = DC$, $CE = AD = 3$, $\angle AEC = 90^\circ$,

$\because D$ 是 BC 的中点, $BC = 4$

$\therefore DC = AE = \frac{1}{2}BC = 2$,

在 $\triangle ADC$ 中, $\angle ADC = 90^\circ$,

$\therefore AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$,

$\because EF \perp AC$,

$\therefore \frac{1}{2}EF \cdot AC = \frac{1}{2}AE \cdot CE$

即 $\frac{1}{2}EF \cdot \sqrt{13} = \frac{1}{2} \times 2 \times 3$,

$\therefore EF = \frac{6\sqrt{13}}{13}$.

22. 在校园科技节期间, 科普员为同学们进行了水火箭的发射表演, 图 1 是某型号水火箭的实物图, 水火箭发射后的运动路线可以看作是一条抛物线. 为了解水火箭的相关性能, 同学们进一步展开研究. 如图 2 建立直角坐标系, 水火箭发射后落在水平地面 A 处. 科普员提供了该型号水火箭与地面成一定角度时, 从发射到着陆过程中, 水火箭距离地面 OA 的竖直高度 $y(\text{m})$ 与离发射点 O 的水平距离 $x(\text{m})$ 的几组关系数据如下:

水平距离 $x(\text{m})$	0	3	4	10	15	20	22	27
竖直高度 $y(\text{m})$	0	3.24	4.16	8	9	8	7.04	3.24



图1

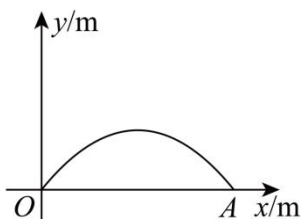


图2

(1) 根据上表，请确定抛物线的表达式；

(2) 请计算当水火箭飞行至离发射点 O 的水平距离为 5m 时，水火箭距离地面的竖直高度.

【答案】 (1) 抛物线的表达式 $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{6}{5}x$

(2) 水火箭距离地面的竖直高度 5 米

【解析】

【分析】 本题主要考查二次函数的性质，

(1) 根据题意可设抛物线的表达式 $y = ax^2 + bx$ ($a \neq 0$)，结合图可知抛物线的顶点坐标为 $(15, 9)$ ，代入求解即可；

(2) 由题意知 $x = 5$ ，代入抛物线的表达式即可求得水火箭距离地面的竖直高度.

【小问 1 详解】

解：根据题意可知抛物线过原点，设抛物线的表达式 $y = ax^2 + bx$ ($a \neq 0$)，

由表格得抛物线的顶点坐标为 $(15, 9)$ ，则 $\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 15 \\ -\frac{b^2}{4a} = 9 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a = -\frac{1}{25} \\ b = \frac{6}{5} \end{cases}$ ，

则抛物线的表达式 $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{6}{5}x$ ，

【小问 2 详解】

解：由题意知 $x = 5$ ，则 $y = -\frac{1}{25} \times 5^2 + \frac{6}{5} \times 5 = 5$ ，

那么，水火箭距离地面的竖直高度 5 米.

23. 观察发现：劳动人民在生产生活中创造了很多取材简单又便于操作的方法，正如木匠刘师傅的“木条画直角法”，如图 1，他用木条能快速画出一个以点 A 为顶点的直角，具体作法如下：

①本条的两端分别记为点 M ， N ，先将木条的端点 M 与点 A 重合，任意摆放木条后，另一个端点 N 的位置记为点 B ，连接 AB ；

②木条的端点 N 固定在点 B 处，将木条绕点 B 顺时针旋转一定的角度，端点 M 的落点记为点 C (点 A ， B ， C 不在同一条直线上)；

③连接 CB 并延长，将木条沿点 C 到点 B 的方向平移，使得端点 M 与点 B 重合，端点 N 在 CB 延长线上的落点记为点 D ；

④用另一根足够长的木条画线，连接 AD ， AC ，则画出的 $\angle DAC$ 是直角。

操作体验：(1) 根据“观察发现”中的信息重现刘师傅的画法，如图 2， $BA = BC$ ，请画出以点 A 为顶点的直角，记作 $\angle DAC$ ；

推理论证：(2) 如图 1，小亮尝试揭示此操作的数学原理，请你补全括号里的证明依据：

证明： $\because AB = BC = BD$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$ 是等腰三角形。

$\therefore \angle BCA = \angle BAC, \angle BDA = \angle BAD$ 。（依据 1_____）

$\therefore \angle BCA + \angle BDA = \angle BAC + \angle BAD = \angle DAC$ 。

$\therefore \angle DAC + \angle BCA + \angle BDA = 180^\circ$ ，（依据 2_____）

$\therefore 2\angle DAC = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle DAC = 90^\circ$ 。

依据 1：_____；依据 2：_____；

拓展探究：(3) 小亮进一步研究发现，用这种方法作直角存在一定的误差，用平时学习的尺规作图的方法可以减少误差。如图 3，点 O 在直线 l 上，请用无刻度的直尺和圆规在图 3 中作出一个以 O 为顶点的直角，记作 $\angle POQ$ ，使得直角边 OP （或 OQ ）在直线 l 上。（保留作图痕迹，不写作法）

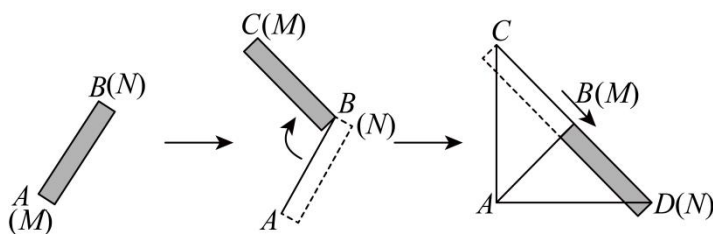


图1

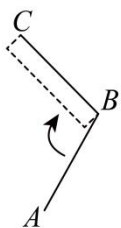


图2

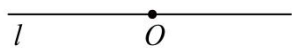


图3

【答案】(1) 见详解，(2) 等边对等角（等腰三角形的性质）；三角形内角和定理；(3) 见详解

【解析】

【分析】 本题主要考查等腰三角形的性质、三角形内角和定理以及尺规作图的作垂线，

(1) 根据“观察发现”延长 CB 至点 D ，且 $DB = CB$ ，连接 CA, AD 即可知以点 A 为顶点的 $\angle DAC$ 为直角；

(2) 根据作图可知利用了等边对等角，以及三角形内角和定理；

(3) 根据过定点作已知直线的垂线的方法作图即可。

【详解】解：[操作体验] (1)

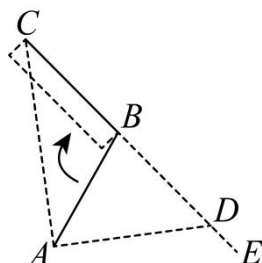
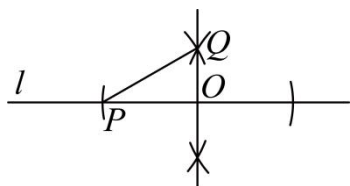


图2

[推理论证] (2) 依据 1：等边对等角（等腰三角形的性质）；依据 2：三角形内角和定理；

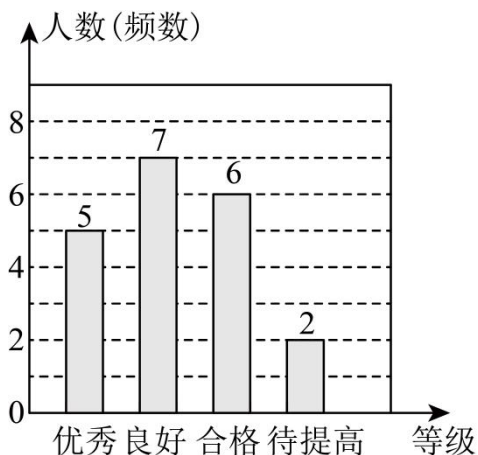
故答案为：等边对等角（等腰三角形的性质）；三角形内角和定理；

[拓展探究] (3)



24. 为落实“双减”政策，培养德智体美劳全面发展的时代新人，某校组织调研学生体育和美育发展水平，现从七年级共 180 名学生中随机抽取 20 名学生，对每位学生的体育和美育水平进行测评后按百分制分数量化，并进行等级评定（成绩用 x 表示，分为四个等级，包括优秀： $90 \leq x \leq 100$ ；良好： $80 \leq x < 90$ ；合格： $70 \leq x < 80$ ；待提高： $x < 70$ ）。对数据进行了整理，描述和分析，部分信息如下。

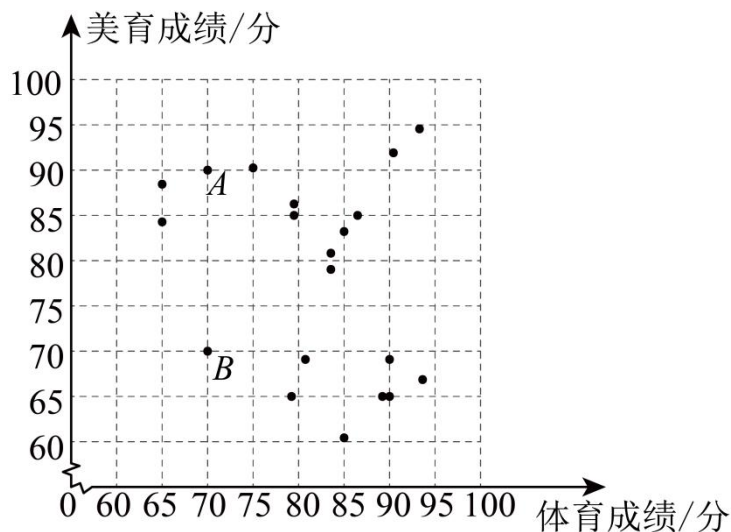
信息一：体育成绩的人数（频数）分布图如下。



信息二：美育成绩的人数（频数）分布表如下。

分组	$90 \leq x \leq 100$	$80 \leq x < 90$	$70 \leq x < 80$	$x < 70$
人数	m	7	2	7

信息三：20 位学生的体育成绩和美育成绩得分统计如下（共 20 个点）.



根据以上信息，回答下列问题：

- (1) 填空： $m =$ _____；
- (2) 下列结论正确的是_____；（填序号）
 - ①体育成绩低于 80 分的人数占抽取人数的 40%；
 - ②参与测评的 20 名学生美育成绩的中位数对应的等级是“合格”；
 - ③在信息三中，相比于点 A 所代表的学生，点 B 所代表的学生的体育水平与其大致相同，但美育水平还存在一定差距，需要进一步提升；
- (3) 请结合以上信息，估计七年级全体学生中体育和美育两项成绩均属于“优秀”等级的人数。

【答案】 (1) 4 (2) ①③

(3) 18

【解析】

【分析】 本题主要考查了条形统计图的相关知识，个体占比，中位数定义，用样本估计总体等知识，掌握这些知识是解题的关键。

- (1) 用样本总体减去良好成绩的人生，合格成绩的人数，待提高成绩的人数即可得出答案。
- (2) ①用体育成绩低于 80 分的人数 8 除以样本总体 20 即可得出判断。②用中位数的定义判断即可。③根据坐标得出点 A 和点 B 各自的美育和体育的成绩判断即可。
- (3) 用样本估计总体即可。

【小问 1 详解】

解： $m = 20 - 7 - 2 - 7 = 4$ ，

故答案为：4.

【小问 2 详解】

①根据 20 位学生的体育成绩和美育成绩得分统计图可知：

体育成绩低于 80 分的人数有 8 人，

$\therefore$ 体育成绩低于 80 分的人数有占抽取人数的 $(8 \div 20) \times 100\% = 40\%$ ，故①正确.

② $\because$ 一共有 20 人，成绩从小到大排序，中位数为第 10 位和第 11 位的平均数，

$\therefore$ 中位数位于 $80 \leq x < 90$ 之间，

即参与测评的 20 名学生美育成绩的中位数对应的等级是“良好”，故②错误.

③在信息三中，点 A 的美育成绩为 90，体育成绩为 70，点 B 的美育成绩为 70，体育成绩为 70，所以相比于点 A 所代表的学生，点 B 所代表的学生的体育水平与其大致相同，但美育水平还存在一定差距，需要进一步提升，故③正确，

故有①③正确，

故答案为①③.

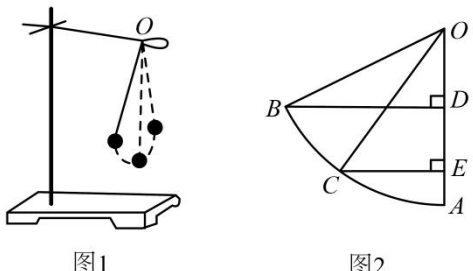
【小问 3 详解】

根据信息三，可知：美育和体育成绩都在 90 分及以上的只有 2 人.

故七年级全体学生中体育和美育两项成绩均属于“优秀”等级的人数有 $180 \times \frac{2}{20} = 18$ 人.

25. 单摆是一种能够产生往复摆动的装置，某兴趣小组利用摆球和摆线进行与单摆相关的实验探究，并撰写实验报告如下.

实 验 主 题	探究摆球运动过程中高度的变化
实 验 用 具	摆球，摆线，支架，摄像机等
实 验	如图 1，在支架的横杆点 O 处用摆线悬挂一个摆球，将摆球拉高后松手，摆球开始往复运动. (摆线的长度变化忽略不计)

说明	如图 2，摆球静止时的位置为点 A ，拉紧摆线将摆球拉至点 B 处， $BD \perp OA$ ， $\angle BOA = 64^\circ$ ， $BD = 20.5\text{cm}$ ；当摆球运动至点 C 时， $\angle COA = 37^\circ$ ， $CE \perp OA$ 。（点 O, A, B, C, D, E 在同一平面内）
实验图示	 图1 图2

解决问题：根据以上信息，求 ED 的长。（结果精确到 0.1cm ）

参考数据： $\sin 37^\circ \approx 0.60, \cos 37^\circ \approx 0.80, \tan 37^\circ \approx 0.75$ ， $\sin 64^\circ \approx 0.90, \cos 64^\circ \approx 0.44, \tan 64^\circ \approx 2.05$ 。

【答案】 ED 的长为 8.2cm

【解析】

【分析】 本题考查的是解直角三角形的实际应用，先求解 OD, OB, OC ，再求解 OE ，从而可得答案；

【详解】 解： $\because BD \perp OA$ ， $\angle BOA = 64^\circ$ ， $BD = 20.5\text{cm}$ ；

$$\therefore OD = \frac{BD}{\tan 64^\circ} \approx \frac{20.5}{2.05} = 10,$$

$$OB = \frac{OD}{\cos 64^\circ} \approx \frac{10}{0.44} \approx 22.73,$$

$$\therefore OB = OC = 22.73,$$

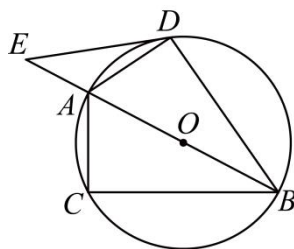
$$\because \angle COA = 37^\circ, CE \perp OA,$$

$$\therefore OE = OC \cdot \cos 37^\circ \approx 22.73 \times 0.8 \approx 18.2,$$

$$\therefore DE = OE - OD = 18.2 - 10 = 8.2;$$

$$\therefore ED \text{ 的长为 } 8.2\text{cm};$$

26. 如图， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， AB 为 $\odot O$ 的直径，点 D 为 $\odot O$ 上一点， $BC = BD$ ，延长 BA 至 E ，使得 $\angle ADE = \angle CBA$ 。



(1) 求证： ED 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 若 $BO = 4, \tan \angle CBA = \frac{1}{2}$, 求 ED 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{16}{3}$

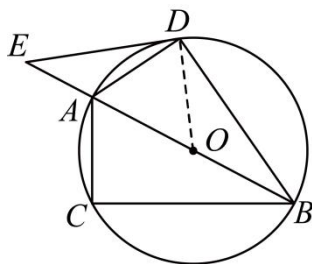
【解析】

【分析】(1) 连接 OD , 易得 $\angle ODB = \angle OBD$, 圆周角定理得到 $\angle ADB = \angle ACB = 90^\circ$, 进而得到 $\angle ODB + \angle ADO = 90^\circ$, 证明 $\text{Rt}\triangle ADB \cong \text{Rt}\triangle ACB$, 推出 $\angle ADE = \angle ODB$, 进而得到 $\angle ODE = 90^\circ$, 即可得证;

(2) 等角的三角函数相等, 得到 $\tan \angle ABD = \tan \angle CBA = \frac{AD}{BD} = \frac{1}{2}$, 证明 $\triangle EDA \sim \triangle EBD$, 得到 $\frac{ED}{BE} = \frac{AE}{DE} = \frac{AD}{BD} = \frac{1}{2}$, 进行求解即可.

【小问 1 详解】

解: 连接 OD , 则: $OD = OB$,



$$\therefore \angle ODB = \angle OBD,$$

$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ADB = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ODB + \angle ADO = 90^\circ,$$

$$\because AB = AB, BD = BC,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ADB \cong \text{Rt}\triangle ACB,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ABD = \angle ODB,$$

$$\because \angle ADE = \angle CBA,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle ODB,$$

$$\therefore \angle ADE + \angle ADO = 90^\circ, \text{ 即: } \angle ODE = 90^\circ,$$

$$\therefore OD \perp DE,$$

$\because OD$ 是 $\odot O$ 的半径,

$\therefore ED$ 是 $\odot O$ 的切线;

【小问 2 详解】

$$\therefore OB = 4,$$

$$\therefore AB = 2OB = 8,$$

由 (1) 知: $\angle ABD = \angle ABC$,

$$\therefore \tan \angle ABD = \tan \angle CBA = \frac{AD}{BD} = \frac{1}{2},$$

由 (1) 知: $\angle EDA = \angle ABD$,

又 $\angle DEA = \angle DEB$,

$$\therefore \triangle EDA \sim \triangle EBD,$$

$$\therefore \frac{ED}{BE} = \frac{AE}{DE} = \frac{AD}{BD} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore DE = 2AE, \quad DE^2 = AE \cdot BE,$$

$$\therefore (2AE)^2 = AE \cdot (AE + AB), \quad \text{即: } 4AE^2 = AE^2 + 8AE,$$

$$\text{解得: } AE = 0 \text{ (舍去) 或 } AE = \frac{8}{3},$$

$$\therefore DE = 2AE = \frac{16}{3}$$

【点睛】 本题考查圆周角定理, 切线的判定, 相似三角形的判定和性质, 解直角三角形, 熟练掌握相关知识点, 并灵活运用, 是解题的关键.

27. 综合与实践

【问题情境】 在数学综合实践课上, 同学们以特殊三角形为背景, 探究动点运动的几何问题, 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 M, N 分别为 AB, AC 上的动点 (不含端点), 且 $AN = BM$.

【初步尝试】 (1) 如图 1, 当 $\triangle ABC$ 为等边三角形时, 小颜发现: 将 MA 绕点 M 逆时针旋转 120° 得到 MD , 连接 BD , 则 $MN = DB$, 请思考并证明:

【类比探究】 (2) 小梁尝试改变三角形的形状后进一步探究: 如图 2, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC = 90^\circ$, $AE \perp MN$ 于点 E , 交 BC 于点 F , 将 MA 绕点 M 逆时针旋转 90° 得到 MD , 连接 DA, DB . 试猜想四边形 $AFBD$ 的形状, 并说明理由;

【拓展延伸】 (3) 孙老师提出新的探究方向: 如图 3, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 4$, $\angle BAC = 90^\circ$, 连接 BN, CM , 请直接写出 $BN + CM$ 的最小值.

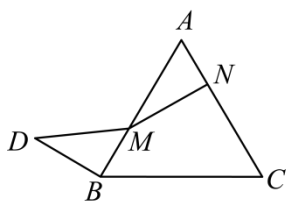


图1

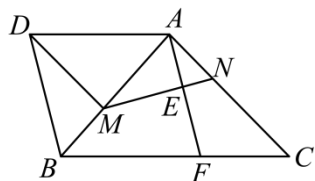


图2

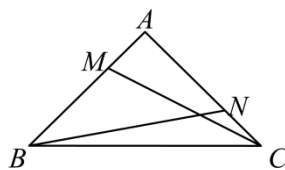


图3

【答案】(1) 见详解, (2) 四边形 $AFBD$ 为平行四边形, (3) $4\sqrt{5}$

【解析】

【分析】(1) 根据等边三角形的性质可得 $\angle A = 60^\circ, AB = AC$, 再由旋转的性质可得 $DM = AM, \angle AMD = 120^\circ$, 从而可得 $\angle DMB = \angle A = 60^\circ$, 证明 $\triangle ANM \cong \triangle MBD$ (SAS), 即可得证;

(2) 根据等腰直角三角形的性质可得 $\angle ABC = 45^\circ$, 再根据旋转的性质可得 $MA = MD, \angle MAD = \angle MDA = 45^\circ, \angle DMA = \angle DMB = 90^\circ$, 从而可得 $\angle MAD = \angle ABF = 45^\circ$, 由平行线的判定可得 $AD \parallel BF$, 证明 $\triangle ANM \cong \triangle MBD$ (SAS), 可得 $\angle AMN = \angle MDB$, 利用等量代换可得 $\angle DBM = \angle MAF$, 再由平行线的判定可得 $DB \parallel AF$, 根据平行四边形的判定即可得证;

(3) 过点 A 作 $\angle BAG = 45^\circ$, 使 $AG = CB$, 连接 GM, GC, BG , 延长 CB , 过点 G 作 $GO \perp CB$ 于点 O , 根据等腰三角形的性质可证 $\angle GAM = \angle BCN = 45^\circ$, 证明 $\triangle GAM \cong \triangle BCN$ (SAS), 可得 $GM = BN$, 从而可得当点 G, M, C 三点共线时, $BN + CM$ 的值最小, 最小值为 CG 的值, 根据平行线的性质和平角的定义可得 $\angle GBO = 45^\circ$, 再根据等腰直角三角形的性质和勾股定理求得 $OG = OB = 2\sqrt{2}$, 从而可得 $OC = 6\sqrt{2}$, 再利用勾股定理求解即可.

【详解】(1) 证明 $\because \triangle ABC$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle A = 60^\circ, AB = AC,$$

$\because MA$ 绕点 M 逆时针旋转 120° 得到 MD ,

$$\therefore DM = AM, \angle AMD = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle DMB = 60^\circ,$$

$$\because AN = BM, \angle DMB = \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle ANM \cong \triangle MBD \text{ (SAS)},$$

$$\therefore MN = DB;$$

(2) 解: 四边形 $AFBD$ 为平行四边形, 理由如下,

$$\because AB = AC, \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 45^\circ,$$

$\because MA$ 绕点 M 逆时针旋转 90° 得到 MD ,

$$\therefore MA = MD, \angle MAD = \angle MDA = 45^\circ, \angle DMA = \angle DMB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MAD = \angle ABF = 45^\circ,$$

则 $AD \parallel BF$,

在 $\triangle ANM$ 和 $\triangle MBD$ 中,

$$\begin{cases} MA = DM \\ \angle MAN = \angle DMB, \\ AN = MB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ANM \cong \triangle MBD (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle AMN = \angle MDB,$$

$$\therefore AE \perp MN,$$

$$\therefore \angle AMN + \angle MAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MDB + \angle MBD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DBM = \angle MAF,$$

$$\therefore DB \parallel AF,$$

则四边形 $AFBD$ 为平行四边形;

(3) 解: 如图, 过点 A 作 $\angle BAG = 45^\circ$, 使 $AG = CB$, 连接 GM 、 GC , BG , 延长 CB , 过点 G 作 $GO \perp CB$ 于点 O ,

$$\therefore AB = AC = 4, \quad \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle GAM = \angle BCN = 45^\circ,$$

$$\therefore AN = BM,$$

$$\therefore AM = CN,$$

$$\text{又} \therefore AG = CB,$$

$$\therefore \triangle GAM \cong \triangle BCN (\text{SAS}),$$

$$\therefore GM = BN,$$

$$\therefore BN + CM = GM + CM \geq CG,$$

$\therefore$ 当点 G 、 M 、 C 三点共线时, $BN + CM$ 的值最小, 最小值为 CG 的值,

$$\therefore \angle GAM = \angle ABC = 45^\circ,$$

$$\therefore AG \parallel BC,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ABG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GBO = 180^\circ - \angle ABG - \angle ABC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle GBO = 45^\circ,$$

$$\therefore OG = OB,$$

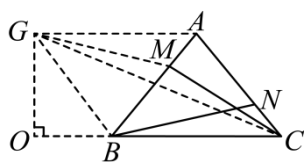
$$\therefore GB = \sqrt{2}OB = \sqrt{2}OG,$$

$$\therefore OG = OB = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore OC = 6\sqrt{2},$$

$$\text{在 } Rt\triangle GOC \text{ 中, } GC = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{5},$$

$$\therefore BN + CM \text{ 的最小值为 } 4\sqrt{5}.$$



【点睛】 本题考查全等三角形的判定与性质、平行线的判定与性质、勾股定理、平行四边形的判定、旋转的性质及等边三角形的性质，熟练掌握相关定理得出当点 G 、 M 、 C 三点共线时， $BN + CM$ 的值最小，最小值为 CG 的值是解题的关键。

28. 在平面直角坐标系 xOy 中, 给出如下定义: 点 P 是图形 W 外一点, 点 Q 在 PO 的延长线上, 使得 $\frac{PO}{QO} = \frac{1}{2}$,

如果点 Q 在图形 W 上, 则称点 P 是图形 W 的“延长 2 分点”, 例如: 如图 1, $A(2,4), B(2,2), P\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$

是线段 AB 外一点, $Q(2,3)$ 在 PO 的延长线上, 且 $\frac{PO}{QO} = \frac{1}{2}$, 因为点 Q 在线段 AB 上, 所以点 P 是线段 AB

的“延长 2 分点”.

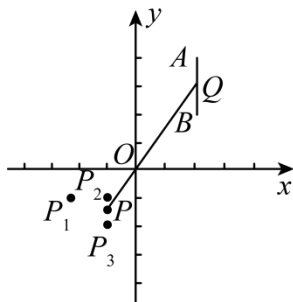


图1

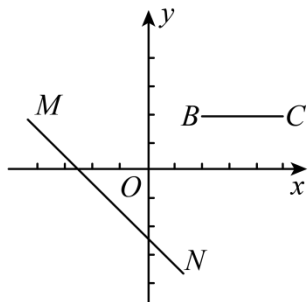


图2

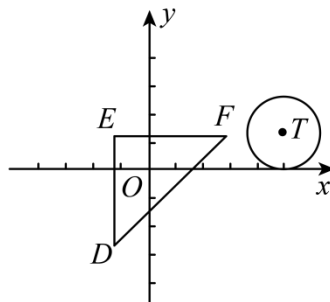


图3

(1) 如图 1, 已知图形 W_1 : 线段 AB , $A(2,4)$, $B(2,2)$, 在 $P_1\left(-\frac{5}{2}, -1\right), P_2(-1, -1), P_3(-1, -2)$ 中,

_____是图形 W_1 的“延长 2 分点”;

(2) 如图 2, 已知图形 W_2 : 线段 BC , $B(2,2)$, $C(5,2)$, 若直线 $MN: y = -x + b$ 上存在点 P 是图形 W_2 的“延长 2 分点”, 求 b 的最小值:

(3) 如图 3, 已知图形 W_3 : 以 $T(t,1)$ 为圆心, 半径为 1 的 T , 若以 $D(-1,-2)$, $E(-1,1)$, $F(2,1)$ 为顶点的等腰直角三角形 DEF 上存在点 P , 使得点 P 是图形 W_3 的“延长 2 分点”. 请直接写出 t 的取值范围.

【答案】(1) P_2, P_3

(2) $-\frac{7}{2}$

(3) $1 \leq t \leq 3$ 或 $-1 - \sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} - 1$

【解析】

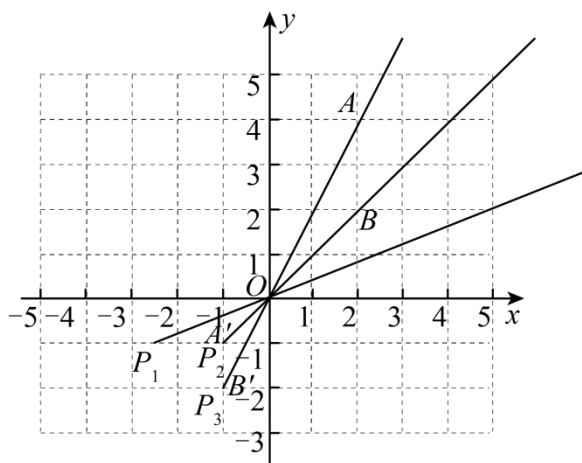
【分析】(1) 根据题意, 画出图象, 进行判断即可;

(2) 作 BC 以原点为位似中心, 位似比为 $2:1$ 的位似图形 $B'C'$, 根据直线 $MN: y = -x + b$ 上存在点 P 是图形 W_2 的“延长 2 分点”, 得到直线 $MN: y = -x + b$ 与 $B'C'$ 有交点, 进而得到当 $MN: y = -x + b$ 过点 C' 时, b 值最小, 进行求解即可;

(3) 作 $\triangle DEF$ 以原点为位似中心, 位似比为 $1:2$ 的位似 $\triangle D'E'F'$, 得到 W_3 与 $\triangle D'E'F'$ 有交点, 求出 T 与 $D'E'$ 相切以及 T 与 $D'F'$ 相切, 两种情况求出 t 的临近值, 即可得出结果.

【小问 1 详解】

解: 作线段 AB 以原点为位似中心, 位似比为 $2:1$ 的位似图形 $A'B'$,



$\therefore A(2,4), B(2,2),$

$\therefore A'(-1,-2), B'(-1,-1),$

$\therefore$ 点 P 是图形 W_1 的“延长 2 分点”，

$\therefore$ 点 P 在线段 $A'B'$ 上，

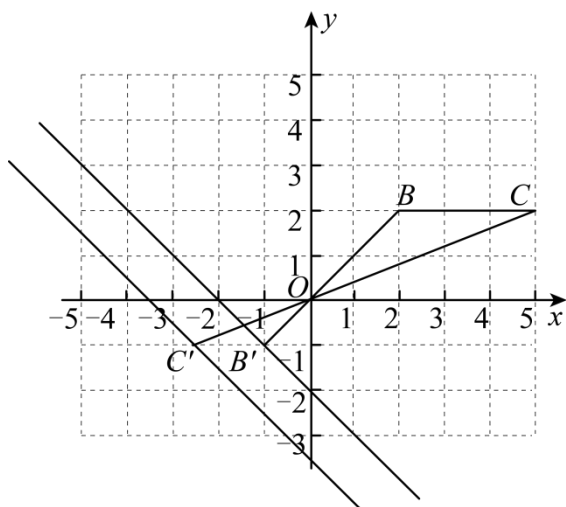
$\therefore P_2(-1, -1), P_3(-1, -2)$ 在线段 $A'B'$ 上，

$\therefore P_2, P_3$ 是图形 W_1 的“延长 2 分点”；

故答案为： P_2, P_3 ；

【小问 2 详解】

作 BC 以原点为位似中心，位似比为 $2:1$ 的位似图形 $B'C'$ ，如图，



$\therefore B(2, 2), C(5, 2),$

$\therefore B'(-1, -1), C\left(-\frac{5}{2}, -1\right),$

$\therefore$ 直线 $MN: y = -x + b$ 上存在点 P 是图形 W_2 的“延长 2 分点”，

$\therefore$ 直线 $MN: y = -x + b$ 与 $B'C'$ 有交点，

$\therefore$ 当 $MN: y = -x + b$ 过点 C' 时， b 值最小，

把 $C\left(-\frac{5}{2}, -1\right)$ ，代入 $y = -x + b$ ，得： $b = -\frac{7}{2}$ ，

$\therefore b$ 的最小值为 $-\frac{7}{2}$ ；

【小问 3 详解】

作 $\triangle DEF$ 以原点为位似中心，位似比为 $1:2$ 的位似 $\triangle D'E'F'$ ，

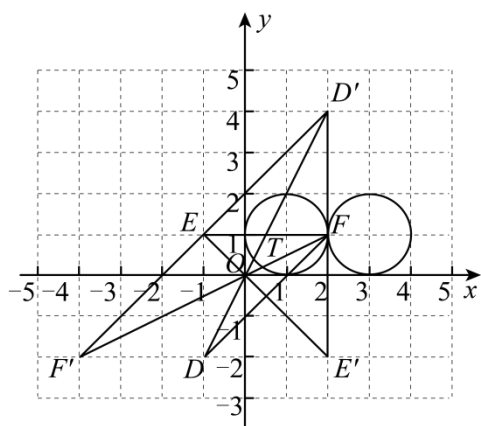
$$\therefore D(-1, -2), E(-1, 1), F(2, 1),$$

$$\therefore D'(2, 4), E'(2, -2), F'(-4, -2),$$

$\therefore$ 等腰直角三角形 DEF 上存在点 P , 使得点 P 是图形 W_3 的“延长 2 分点”,

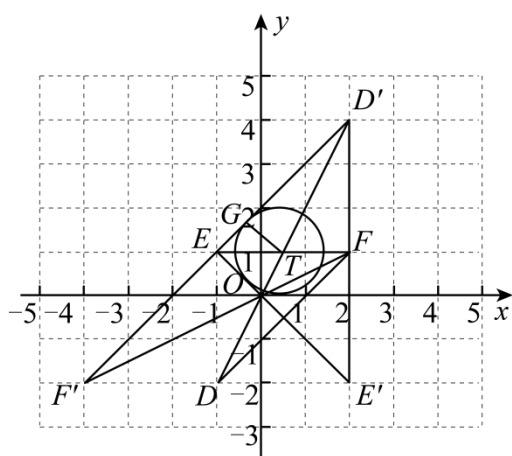
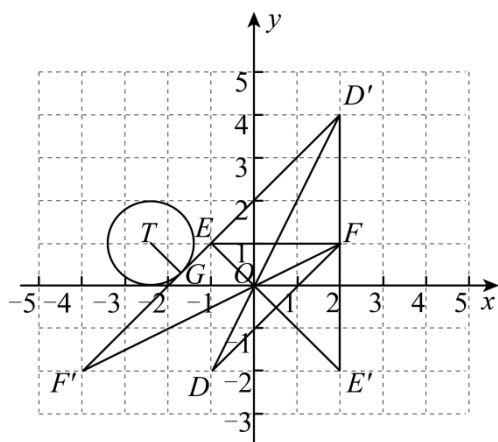
$\therefore$ 当 W_3 与 $\triangle D'E'F'$ 有交点时, 满足题意,

当 T 与 $D'E'$ 相切时, 如图, 则: $t=1$ 或 $t=3$,



$\therefore 1 \leq t \leq 3$ 时, 满足题意;

当 T 与 $D'F'$ 相切时, 且切点为 G , 连接 TG , 则: $\angle TGE = 90^\circ$,



$\because \triangle DEF$ 为等腰直角三角形,

$\therefore \triangle D'E'F'$ 为等腰直角三角形,

$\therefore E(-1,1), F(2,1), E'(2,-2), F'(-4,-2),$

$\therefore EF \parallel E'F' \parallel x$ 轴,

$\therefore \angle D'F'E' = 45^\circ,$

$\therefore$ 以 $T(t,1)$ 为圆心, 半径为 1 的 T ,

$\therefore T$ 点在直线 EF 上, $TG=1$,

$\therefore \angle TEG = \angle D'E'F' = 45^\circ,$

$\therefore ET = \sqrt{2}TG = \sqrt{2},$

$\therefore t = -1 - \sqrt{2}$ 或 $t = \sqrt{2} - 1,$

$\therefore -1 - \sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} - 1;$

综上: $1 \leq t \leq 3$ 或 $-1 - \sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} - 1.$

【点睛】 本题考查坐标与图形变换—位似, 等腰三角形的性质, 勾股定理, 切线的性质等知识点, 综合性强, 难度大, 属于压轴题, 理解并掌握新定义, 利用数形结合和分类讨论的思想进行求解, 是解题的关键.