

2024 年兰州市初中学业水平考试

数学

注意事项：

1. 全卷共 120 分，考试时间 120 分钟。
2. 考生必须将姓名、准考证号、考场号、座位号等个人信息填（涂）写在试卷及答题卡上。
3. 考生务必将答案直接填（涂）写在答题卡的相应位置上。
4. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 2024 的绝对值是（ ）

- A. 2024 B. -2024 C. $\frac{1}{2024}$ D. $-\frac{1}{2024}$

2. 已知 $\angle A = 80^\circ$ ，则 $\angle A$ 的补角是（ ）

- A. 100° B. 80° C. 40° D. 10°

3. 2024 年一季度，兰州市坚持稳中求进、综合施策，全市国民经济起步平稳，开局良好。一季度全市地区生产总值 87790000000 元。数据 87790000000 用科学记数法表示为（ ）

- A. 87.79×10^9 B. 8.779×10^9 C. 8.779×10^{10} D. 8.779×10^{11}

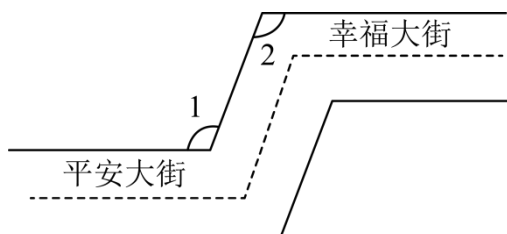
4. 计算： $2a(a-1) - 2a^2 =$ （ ）

- A. a B. $-a$ C. $2a$ D. $-2a$

5. 一次函数 $y = 2x - 3$ 的图象不经过（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

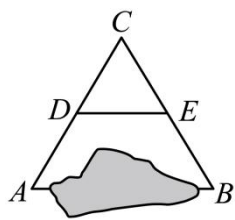
6. 如图，小明在地图上量得 $\angle 1 = \angle 2$ ，由此判断幸福大街与平安大街互相平行，他判断的依据是（ ）



- A. 同位角相等，两直线平行 B. 内错角相等，两直线平行
C. 同旁内角互补，两直线平行 D. 对顶角相等

7. 如图，小张想估测被池塘隔开的 A, B 两处景观之间的距离，他先在 AB 外取一点 C ，然后步测出 AC, BC

的中点 D, E ，并步测出 DE 的长约为 18m ，由此估测 A, B 之间的距离约为 ()



- A. 18m B. 24m C. 36m D. 54m

8. 七巧板、九连环、华容道、鲁班锁是深受大家喜爱的益智玩具，现将 1 个七巧板，2 个九连环，1 个华容道，2 个鲁班锁分别装在 6 个不透明的盒子中（每个盒子装 1 个），所有盒子除里面的玩具外均相同。从这 6 个盒子中随机抽取 1 个盒子，抽中七巧板的概率是 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{6}$

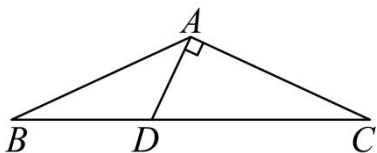
9. 关于 x 的一元二次方程 $9x^2 - 6x + c = 0$ 有两个相等的实数根，则 $c =$ ()

- A. -9 B. 4 C. -1 D. 1

10. 数学家朱世杰所著的《四元玉鉴》是中国元代重要的数学著作之一，书中记载着这样一个问题，大意是：999 文钱买了周果和苦果共 1000 个，11 文钱可买 9 个甜果，4 文钱可买 7 个苦果，问甜果，苦果各买了多少个？设买了甜果 x 个，苦果 y 个，则可列方程组为 ()

- A. $\begin{cases} x + y = 1000 \\ \frac{11}{9}x + \frac{4}{7}y = 999 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x - y = 1000 \\ \frac{11}{9}x + \frac{4}{7}y = 999 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x - y = 1000 \\ \frac{4}{7}x + \frac{11}{9}y = 999 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x + y = 999 \\ \frac{4}{7}x + \frac{11}{9}y = 1000 \end{cases}$

11. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 130^\circ$ ， $DA \perp AC$ ，则 $\angle ADB =$ ()



- A. 100° B. 115° C. 130° D. 145°

12. 如图 1，在菱形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = 60^\circ$ ，连接 BD ，点 M 从 B 出发沿 BD 方向以 $\sqrt{3}\text{cm/s}$ 的速度运动至 D ，同时点 N 从 B 出发沿 BC 方向以 1cm/s 的速度运动至 C ，设运动时间为 $x(\text{s})$ ， $\triangle BMN$ 的面积为 $y(\text{cm}^2)$ ， y 与 x 的函数图象如图 2 所示，则菱形 $ABCD$ 的边长为 ()

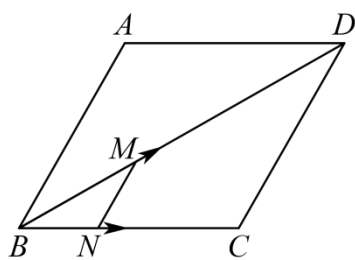


图1

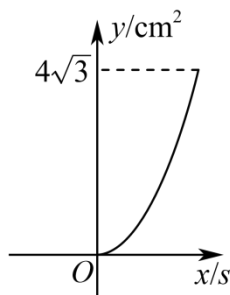


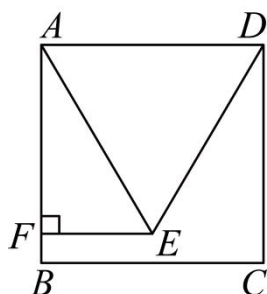
图2

- A. $2\sqrt{2}\text{cm}$ B. $4\sqrt{2}\text{cm}$ C. 4cm D. 8cm

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

13. 因式分解 $x^2 - 2x + 1 = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 如图，四边形 $ABCD$ 为正方形， $\triangle ADE$ 为等边三角形， $EF \perp AB$ 于点 F ，若 $AD = 4$ ，则 $EF = \underline{\hspace{2cm}}$.



15. “轮动发石车”是我国古代的一种投石工具，在春秋战国时期被广泛应用，图 1 是陈列在展览馆的仿真模型，图 2 是模型驱动部分的示意图，其中 $\odot M$ ， N 的半径分别是 1cm 和 10cm ，当 $\odot M$ 顺时针转动 3 周时， N 上的点 P 随之旋转 n° ，则 $n = \underline{\hspace{2cm}}$.

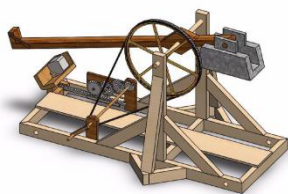


图1

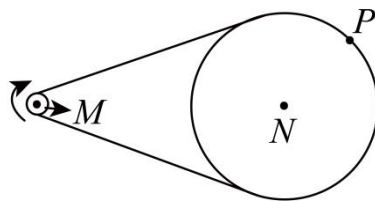
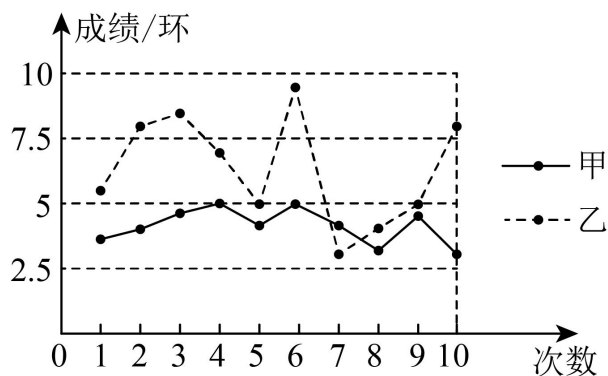


图2

16. 甲，乙两人在相同条件下各射击 10 次，两人的成绩（单位：环）如图所示，现有以下三个推断：

- ①甲的成绩更稳定；
②乙的平均成绩更高；
③每人再射击一次，乙的成绩一定比甲高．其中正确的是_____．（填序号）



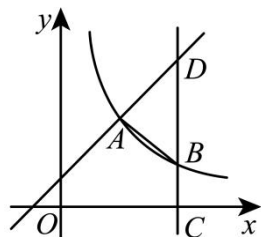
三、解答题 (本大题共 12 小题, 共 72 分. 解答时写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. 计算: $\sqrt{27} - \sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{8}$.

18. 解不等式组:
$$\begin{cases} 2x+6 > x \\ \frac{1-3x}{2} < 1-2x \end{cases}$$

19. 先化简, 再求值: $\left(1 + \frac{a+7}{a+1}\right) \div \frac{a+4}{a}$, 其中 $a = 4$.

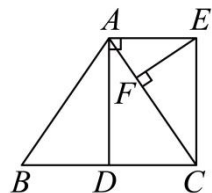
20. 如图, 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 与一次函数 $y = mx + 1$ 的图象交于点 $A(2, 3)$, 点 B 是反比例函数图象上一点, $BC \perp x$ 轴于点 C , 交一次函数的图象于点 D , 连接 AB .



(1) 求反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 与一次函数 $y = mx + 1$ 的表达式;

(2) 当 $OC = 4$ 时, 求 $\triangle ABD$ 的面积.

21. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, D 是 BC 的中点, $CE \parallel AD$, $AE \perp AD$, $EF \perp AC$.



(1) 求证: 四边形 $ADCE$ 是矩形;

(2) 若 $BC = 4$, $CE = 3$, 求 EF 的长.

22. 在校园科技节期间, 科普员为同学们进行了水火箭的发射表演, 图 1 是某型号水火箭的实物图, 水火箭

发射后的运动路线可以看作是一条抛物线. 为了解水火箭的相关性能, 同学们进一步展开研究. 如图 2 建立直角坐标系, 水火箭发射后落在水平地面 A 处. 科普员提供了该型号水火箭与地面成一定角度时, 从发射到着陆过程中, 水火箭距离地面 OA 的竖直高度 $y(\text{m})$ 与离发射点 O 的水平距离 $x(\text{m})$ 的几组关系数据如下:

水平距离 $x(\text{m})$	0	3	4	10	15	20	22	27
竖直高度 $y(\text{m})$	0	3.24	4.16	8	9	8	7.04	3.24



图1

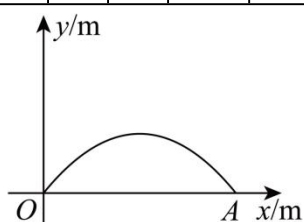


图2

(1) 根据上表, 请确定抛物线的表达式;

(2) 请计算当水火箭飞行至离发射点 O 的水平距离为 5m 时, 水火箭距离地面的竖直高度.

23. 观察发现: 劳动人民在生产生活中创造了很多取材简单又便于操作的方法, 正如木匠刘师傅的“木条画直角法”, 如图 1, 他用木条能快速画出一个以点 A 为顶点的直角, 具体作法如下:

①本条的两端分别记为点 M , N , 先将木条的端点 M 与点 A 重合, 任意摆放木条后, 另一个端点 N 的位置记为点 B , 连接 AB ;

②木条的端点 N 固定在点 B 处, 将木条绕点 B 顺时针旋转一定的角度, 端点 M 的落点记为点 C (点 A , B , C 不在同一条直线上);

③连接 CB 并延长, 将木条沿点 C 到点 B 的方向平移, 使得端点 M 与点 B 重合, 端点 N 在 CB 延长线上的落点记为点 D ;

④用另一根足够长的木条画线, 连接 AD , AC , 则画出的 $\angle DAC$ 是直角.

操作体验: (1) 根据“观察发现”中的信息重现刘师傅的画法, 如图 2, $BA = BC$, 请画出以点 A 为顶点的直角, 记作 $\angle DAC$;

推理论证: (2) 如图 1, 小亮尝试揭示此操作的数学原理, 请你补全括号里的证明依据:

证明: $\because AB = BC = BD$,

$\therefore \triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$ 是等腰三角形.

$\therefore \angle BCA = \angle BAC, \angle BDA = \angle BAD$. (依据 1 _____)

$\therefore \angle BCA + \angle BDA = \angle BAC + \angle BAD = \angle DAC$.

$\therefore \angle DAC + \angle BCA + \angle BDA = 180^\circ$, (依据 2 _____)

$\therefore 2\angle DAC = 180^\circ$,

$\therefore \angle DAC = 90^\circ$.

依据 1: _____; 依据 2: _____;

拓展探究: (3) 小亮进一步研究发现, 用这种方法作直角存在一定的误差, 用平时学习的尺规作图的方法可以减少误差. 如图 3, 点 O 在直线 l 上, 请用无刻度的直尺和圆规在图 3 中作出一个以 O 为顶点的直角, 记作 $\angle POQ$, 使得直角边 OP (或 OQ) 在直线 l 上. (保留作图痕迹, 不写作法)

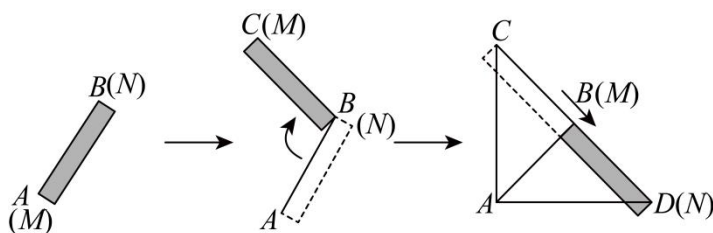


图1

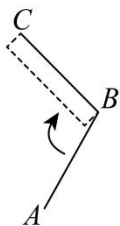


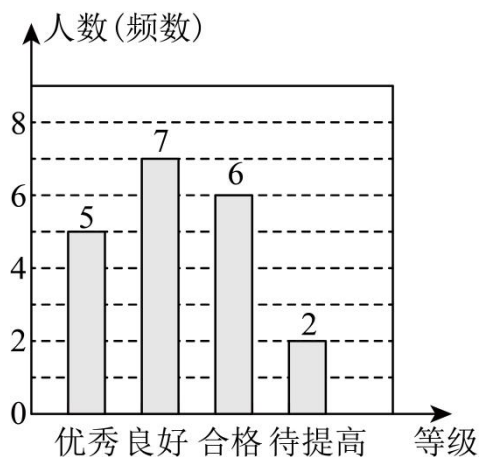
图2



图3

24. 为落实“双减”政策, 培养德智体美劳全面发展的时代新人, 某校组织调研学生体育和美育发展水平, 现从七年级共 180 名学生中随机抽取 20 名学生, 对每位学生的体育和美育水平进行测评后按百分制分数量化, 并进行等级评定 (成绩用 x 表示, 分为四个等级, 包括优秀: $90 \leq x \leq 100$; 良好: $80 \leq x < 90$; 合格: $70 \leq x < 80$; 待提高: $x < 70$). 对数据进行了整理, 描述和分析, 部分信息如下.

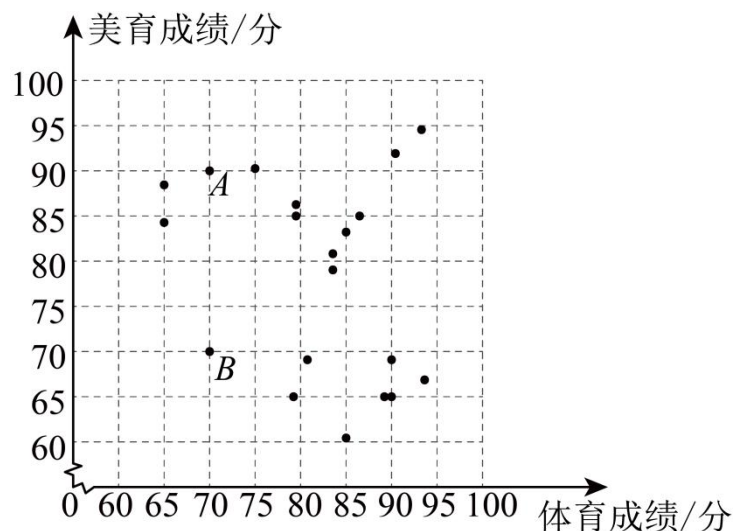
信息一: 体育成绩的人数 (频数) 分布图如下.



信息二：美育成绩的人数（频数）分布表如下.

分组	$90 \leq x \leq 100$	$80 \leq x < 90$	$70 \leq x < 80$	$x < 70$
人数	m	7	2	7

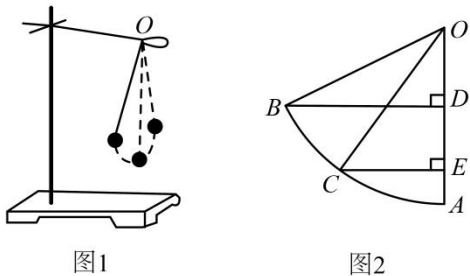
信息三：20 位学生的体育成绩和美育成绩得分统计如下（共 20 个点）.



根据以上信息，回答下列问题：

- (1) 填空： $m =$ _____；
- (2) 下列结论正确的是_____；（填序号）
 - ①体育成绩低于 80 分的人数占抽取人数的 40%；
 - ②参与测评的 20 名学生美育成绩的中位数对应的等级是“合格”；
 - ③在信息三中，相比于点 A 所代表的学生，点 B 所代表的学生的体育水平与其大致相同，但美育水平还存在一定差距，需要进一步提升；
- (3) 请结合以上信息，估计七年级全体学生中体育和美育两项成绩均属于“优秀”等级的人数.

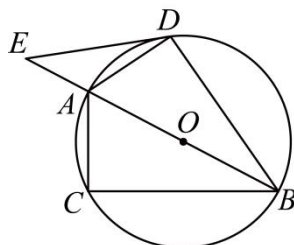
25. 单摆是一种能够产生往复摆动的装置，某兴趣小组利用摆球和摆线进行与单摆相关的实验探究，并撰写实验报告如下.

实验主题	探究摆球运动过程中高度的变化
实验用具	摆球，摆线，支架，摄像机等
实验说明	如图 1，在支架的横杆点 O 处用摆线悬挂一个摆球，将摆球拉高后松手，摆球开始往复运动. (摆线的长度变化忽略不计) 如图 2，摆球静止时的位置为点 A，拉紧摆线将摆球拉至点 B 处，$BD \perp OA$，$\angle BOA = 64^\circ$，$BD = 20.5\text{cm}$；当摆球运动至点 C 时，$\angle COA = 37^\circ$，$CE \perp OA$. (点 O, A, B, C, D, E 在同一平面内)
实验图示	 图1 图2

解决问题：根据以上信息，求 ED 的长. (结果精确到 0.1cm)

参考数据： $\sin 37^\circ \approx 0.60, \cos 37^\circ \approx 0.80, \tan 37^\circ \approx 0.75$ ， $\sin 64^\circ \approx 0.90, \cos 64^\circ \approx 0.44, \tan 64^\circ \approx 2.05$.

26. 如图， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， AB 为 $\odot O$ 的直径，点 D 为 $\odot O$ 上一点， $BC = BD$ ，延长 BA 至 E ，使得 $\angle ADE = \angle CBA$.



(1) 求证： ED 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 若 $BO = 4, \tan \angle CBA = \frac{1}{2}$ ，求 ED 的长.

27. 综合与实践

【问题情境】在数学综合实践课上，同学们以特殊三角形为背景，探究动点运动的几何问题，如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 M, N 分别为 AB, AC 上的动点（不含端点），且 $AN = BM$ 。

【初步尝试】(1) 如图 1，当 $\triangle ABC$ 为等边三角形时，小颜发现：将 MA 绕点 M 逆时针旋转 120° 得到 MD ，连接 BD ，则 $MN = DB$ ，请思考并证明：

【类比探究】(2) 小梁尝试改变三角形的形状后进一步探究：如图 2，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC, \angle BAC = 90^\circ$ ， $AE \perp MN$ 于点 E ，交 BC 于点 F ，将 MA 绕点 M 逆时针旋转 90° 得到 MD ，连接 DA, DB 。试猜想四边形 $AFBD$ 的形状，并说明理由；

【拓展延伸】(3) 孙老师提出新的探究方向：如图 3，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 4, \angle BAC = 90^\circ$ ，连接 BN, CM ，请直接写出 $BN + CM$ 的最小值。

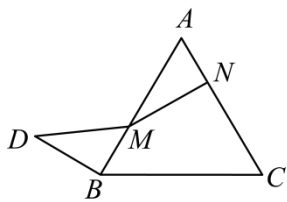


图1

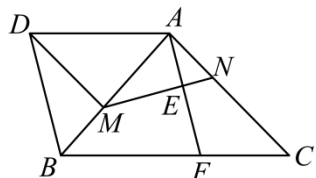


图2

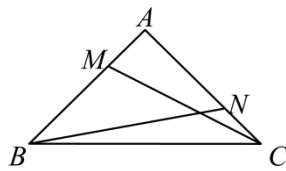


图3

28. 在平面直角坐标系 xOy 中，给出如下定义：点 P 是图形 W 外一点，点 Q 在 PO 的延长线上，使得 $\frac{PO}{QO} = \frac{1}{2}$ ，

如果点 Q 在图形 W 上，则称点 P 是图形 W 的“延长 2 分点”，例如：如图 1， $A(2,4), B(2,2), P\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$

是线段 AB 外一点， $Q(2,3)$ 在 PO 的延长线上，且 $\frac{PO}{QO} = \frac{1}{2}$ ，因为点 Q 在线段 AB 上，所以点 P 是线段 AB 的“延长 2 分点”。

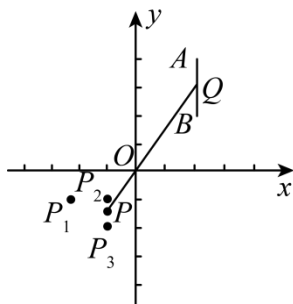


图1

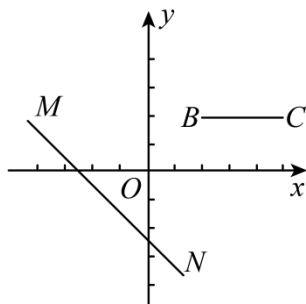


图2

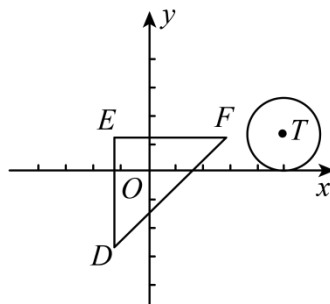


图3

(1) 如图 1，已知图形 W_1 ：线段 AB ， $A(2,4), B(2,2)$ ，在 $P_1\left(-\frac{5}{2}, -1\right), P_2(-1, -1), P_3(-1, -2)$ 中，

_____是图形 W_1 的“延长 2 分点”；

(2) 如图 2, 已知图形 W_2 : 线段 BC , $B(2,2)$, $C(5,2)$, 若直线 $MN: y = -x + b$ 上存在点 P 是图形 W_2 的“延长 2 分点”, 求 b 的最小值:

(3) 如图 3, 已知图形 W_3 : 以 $T(t,1)$ 为圆心, 半径为 1 的 T , 若以 $D(-1,-2)$, $E(-1,1)$, $F(2,1)$ 为顶点的等腰直角三角形 DEF 上存在点 P , 使得点 P 是图形 W_3 的“延长 2 分点”. 请直接写出 t 的取值范围.