

2024 年长沙市初中学业水平考试试卷

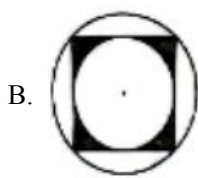
数学

注意事项：

1. 答题前，请考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，并认真核对条形码上的姓名、准考证号、考场和座位号；
2. 必须在答题卡上答题，在草稿纸、试题卷上答题无效；
3. 答题时，请考生注意各大题题号后面的答题提示；
4. 请勿折叠答题卡，保持字体工整、笔迹清晰、卡面清洁；
5. 答题卡上不得使用涂改液、涂改胶和贴纸；
6. 本学科试卷共 25 个小题，考试时量 120 分钟，满分 120 分。

一、选择题（在下列各题的四个选项中，只有一项是符合题意的。请在答题卡中填涂符合题意的选项。本大题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 下列图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是（ ）



【答案】B

【解析】

【分析】本题考查轴对称图形和中心对称图形的识别，熟知定义：轴对称图形：如果一个平面图形沿着一条直线折叠后，直线两旁的部分能够互相重合，那么这个图形叫做轴对称图形；中心对称图形：把一个图形绕着某一点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形叫做中心对称图形。据此逐项判断即可。

【详解】解：A 中图形是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项不符合题意；

B 中图形既是轴对称图形又是中心对称图形，故本选项符合题意；

C 中图形是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项不符合题意；

D 中图形不是轴对称图形，是中心对称图形，故本选项不符合题意，

故选：B。

2. 我国近年来大力推进国家教育数字化战略行动，截至 2024 年 6 月上旬，上线慕课数量超过 7.8 万门，学习人次达 1290000000 建设和应用规模居世界第一。用科学记数法将数据 1290000000 表示为（ ）

- A. 1.29×10^8 B. 12.9×10^8 C. 1.29×10^9 D. 129×10^7

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查科学记数法，科学记数法的一般形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数。确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同。当原数绝对值 ≥ 10 时， n 是正整数；当原数的绝对值小于 1 时， n 是负整数。

【详解】解：用科学记数法将数据 1290000000 表示为 1.29×10^9 ，

故选：C。

3. “玉兔号”是我国首辆月球车，它和着陆器共同组成“嫦娥三号”探测器。“玉兔号”月球车能够耐受月球表面的最低温度是 -180°C 、最高温度是 150°C ，则它能够耐受的温差是（ ）

- A. -180°C B. 150°C C. 30°C D. 330°C

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了温差的概念和有理数的运算，解决本题的关键是气温最高值与最低值之差，计算解决即可。

【详解】解：能够耐受的温差是 $150 - (-180) = 330^\circ\text{C}$ ，

故答案为：D。

4. 下列计算正确的是（ ）

- A. $x^6 \div x^4 = x^2$ B. $\sqrt{5} + \sqrt{6} = \sqrt{11}$ C. $(x^3)^2 = x^5$ D. $(x+y)^2 = x^2 + y^2$

【答案】A

【解析】

【分析】此题主要考查同底数幂的除法、二次根式的加减、幂的乘方、完全平方公式的运算，解题的关键是熟知运算法则。

【详解】解：A、 $x^6 \div x^4 = x^2$ ，计算正确；

B、 $\sqrt{5}$ 、 $\sqrt{6}$ 不能合并，原计算错误；

C、 $(x^3)^2 = x^6$ ，原计算错误；

D、 $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ，原计算错误；

故选 A。

5. 为庆祝五四青年节，某学校举办班级合唱比赛，甲班演唱后七位评委给出的分数为：9.5，9.2，9.6，9.4，9.5，8.8，9.4，则这组数据的中位数是（ ）

A. 9.2

B. 9.4

C. 9.5

D. 9.6

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了中位数的定义，中位数是一组数据从小到大排列后居于中间的一个数或中间两个数的平均数，根据中位数的定义解题即可.

【详解】解：甲班演唱后七位评委给出的分数为：8.8, 9.2, 9.4, 9.4, 9.5, 9.5, 9.6,
 $\therefore$ 中位数为：9.4,

故选 B.

6. 在平面直角坐标系中，将点 $P(3,5)$ 向上平移 2 个单位长度后得到点 P' 的坐标为 ()

A. (1,5)

B. (5,5)

C. (3,3)

D. (3,7)

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查坐标与图形变换-平移变换，根据点的坐标平移规则：左减右加，上加下减求解即可.

【详解】解：在平面直角坐标系中，将点 $P(3,5)$ 向上平移 2 个单位长度后得到点 P' 的坐标为 $(3,5+2)$ ，
 即 $(3,7)$ ，

故选：D.

7. 对于一次函数 $y = 2x - 1$ ，下列结论正确的是 ()

A. 它的图象与 y 轴交于点 $(0, -1)$ B. y 随 x 的增大而减小C. 当 $x > \frac{1}{2}$ 时， $y < 0$

D. 它的图象经过第一、二、三象限

【答案】A

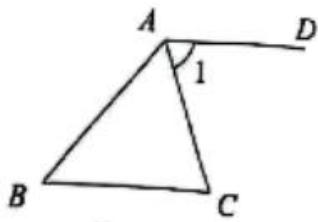
【解析】

【分析】本题考查一次函数的性质，根据一次函数的性质逐个判断即可得到答案.

【详解】解：A. 当 $x = 0$ 时， $y = -1$ ，即一次函数 $y = 2x - 1$ 的图象与 y 轴交于点 $(0, -1)$ ，说法正确；
 B. 一次函数 $y = 2x - 1$ 图象 y 随 x 的增大而增大，原说法错误；
 C. 当 $x > \frac{1}{2}$ 时， $y > 0$ ，原说法错误；
 D. 一次函数 $y = 2x - 1$ 的图象经过第一、三、四象限，原说法错误；

故选 A.

8. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 60^\circ$ ， $\angle B = 50^\circ$ ， $AD \parallel BC$ ．则 $\angle 1$ 的度数为（ ）



- A. 50° B. 60° C. 70° D. 80°

【答案】C

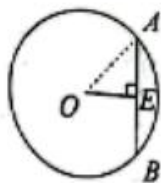
【解析】

【分析】本题主要考查了三角形内角和定理、平行线的性质等知识点，掌握平行线的性质成为解题的关键．由三角形内角和定理可得 $\angle C = 70^\circ$ ，再根据平行线的性质即可解答．

【详解】解： $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 60^\circ$ ， $\angle B = 50^\circ$ ，
 $\therefore \angle C = 180^\circ - \angle BAC - \angle B = 70^\circ$ ，
 $\because AD \parallel BC$ ，
 $\therefore \angle 1 = \angle C = 70^\circ$ ．

故选：C．

9. 如图，在 $\odot O$ 中，弦 AB 的长为 8，圆心 O 到 AB 的距离 $OE = 4$ ，则 $\odot O$ 的半径长为（ ）



- A. 4 B. $4\sqrt{2}$ C. 5 D. $5\sqrt{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查垂径定理、勾股定理，先根据垂径定理得到 AE ，再根据勾股定理求解即可．

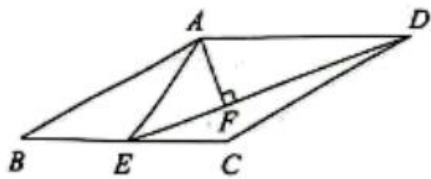
【详解】解： $\because$ 在 $\odot O$ 中，弦 AB 的长为 8，圆心 O 到 AB 的距离 $OE = 4$ ，
 $\therefore OE \perp AB$ ， $AE = \frac{1}{2}AB = 4$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AOE$ 中， $OA = \sqrt{OE^2 + AE^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ ，

故选：B．

10. 如图，在菱形 $ABCD$ 中， $AB = 6$ ， $\angle B = 30^\circ$ ，点 E 是 BC 边上的动点，连接 AE ， DE ，过点 A 作

$AF \perp DE$ 于点 F . 设 $DE = x$, $AF = y$, 则 y 与 x 之间的函数解析式为 (不考虑自变量 x 的取值范围) ()



A. $y = \frac{9}{x}$

B. $y = \frac{12}{x}$

C. $y = \frac{18}{x}$

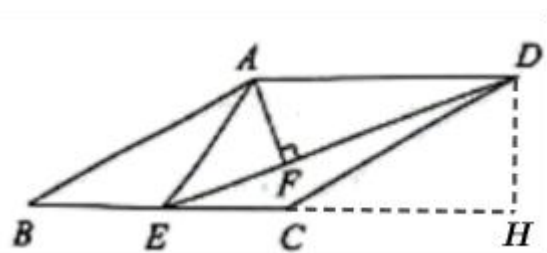
D. $y = \frac{36}{x}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查菱形的性质、含 30° 角的直角三角形的性质、相似三角形的判定与性质，利用相似三角形的性质求解 x 、 y 的关系式是解答的关键. 过 D 作 $DH \perp BC$, 交 BC 延长线于 H , 则 $\angle DHE = 90^\circ$, 根据菱形的性质和平行线的性质得到 $CD = AD = AB = 6$, $\angle ADF = \angle DEH$, $\angle DCH = \angle B = 30^\circ$, 进而利用含 30° 角的直角三角形的性质 $DH = \frac{1}{2}CD = 3$, 证明 $\triangle AFD \sim \triangle DHE$ 得到 $\frac{AF}{DH} = \frac{AD}{DE}$, 然后代值整理即可求解.

【详解】解: 如图, 过 D 作 $DH \perp BC$, 交 BC 延长线于 H , 则 $\angle DHE = 90^\circ$,



$\therefore$ 在菱形 $ABCD$ 中, $AB = 6$, $\angle B = 30^\circ$,

$\therefore AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, $CD = AD = AB = 6$,

$\therefore \angle ADF = \angle DEH$, $\angle DCH = \angle B = 30^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle CDH$ 中, $DH = \frac{1}{2}CD = 3$,

$\therefore AF \perp DE$,

$\therefore \angle AFD = \angle DHE = 90^\circ$, 又 $\angle ADF = \angle DEH$,

$\therefore \triangle AFD \sim \triangle DHE$,

$$\therefore \frac{AF}{DH} = \frac{AD}{DE},$$

$\therefore DE = x$, $AF = y$,

$$\therefore \frac{y}{3} = \frac{6}{x},$$

$$\therefore y = \frac{18}{x},$$

故选：C.

二、填空题（本大题共 6 个小题，每小题 3 分，共 18 分）

11. 为了比较甲、乙、丙三种水稻秧苗的长势，每种秧苗各随机抽取 40 株，分别量出每株高度，计算发现三组秧苗的平均高度一样，并且得到甲、乙、丙三组秧苗高度的方差分别是 3.6, 10.8, 15.8, 由此可知_____种秧苗长势更整齐（填“甲”、“乙”或“丙”）.

【答案】甲

【解析】

【分析】本题考查方差的意义. 方差是用来衡量一组数据波动大小的量，方差越大，表明这组数据偏离平均数越大，即波动越大，数据越不稳定；反之，方差越小，表明这组数据分布比较集中，各数据偏离平均数越小，即波动越小，数据越稳定.

【详解】解： $\because 3.6 < 10.8 < 15.8$,

$\therefore$ 甲种秧苗长势更整齐，

故答案为：甲.

12. 某乡镇组织“新农村，新气象”春节联欢晚会，进入抽奖环节. 抽奖方案如下：不透明的箱子里装有红、黄、蓝三种颜色的球（除颜色外其余都相同），其中红球有 2 个，黄球有 3 个，蓝球有 5 个，每次摇匀后从中随机摸一个球，摸到红球获一等奖，摸到黄球获二等奖，摸到蓝球获三等奖，每个家庭有且只有一次抽奖机会，小明家参与抽奖，获得一等奖的概率为_____.

【答案】 $\frac{1}{5}$ 或 0.2

【解析】

【分析】本题考查概率公式，掌握概率的意义是解题的关键.

利用概率公式直接进行计算.

【详解】解：小明家参与抽奖，获得一等奖的概率为 $\frac{2}{2+3+5} = \frac{1}{5}$,

故答案为： $\frac{1}{5}$.

13. 要使分式 $\frac{6}{x-19}$ 有意义，则 x 需满足的条件是_____.

【答案】 $x \neq 19$

【解析】

【分析】本题考查了分式有意义的条件，熟练掌握分式有意义的条件是解题的关键.

【详解】解： $\because$ 分式 $\frac{6}{x-19}$ 有意义，

$\therefore x-19 \neq 0$ ，解得 $x \neq 19$ ，

故答案为： $x \neq 19$ ．

14. 半径为 4，圆心角为 90° 的扇形的面积为_____（结果保留 π ）．

【答案】 4π

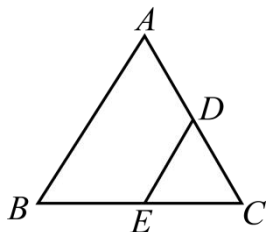
【解析】

【分析】 本题考查扇形的面积公式，根据扇形的面积公式 $S = \frac{n\pi r^2}{360}$ （ n 为圆心角的度数， r 为半径）求解即可．

【详解】 解：由题意，半径为 4，圆心角为 90° 的扇形的面积为 $\frac{90\pi \times 4^2}{360} = 4\pi$ ，

故答案为： 4π ．

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D ， E 分别是 AC ， BC 的中点，连接 DE ．若 $DE = 12$ ，则 AB 的长为_____．



【答案】 24

【解析】

【分析】 本题主要考查三角形中位线定理，熟知三角形的中位线平行于第三边且等于第三边的一半是解题的关键．

【详解】 解： $\because D$ ， E 分别是 AC ， BC 的中点，

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线，

$\therefore AB = 2DE = 2 \times 12 = 24$ ，

故答案为：24．

16. 为庆祝中国改革开放 46 周年，某中学举办了一场精彩纷呈的庆祝活动，现场参与者均为在校中学生，其中有一个活动项目是“选数字猜出生年份”，该活动项目主持人要求参与者从 1，2，3，4，5，6，7，8，9 这九个数字中任取一个数字，先乘以 10，再加上 4.6，将此时的运算结果再乘以 10，然后加上 1978，最后减去参与者的出生年份（注：出生年份是一个四位数，比如 2010 年对应的四位数是 2010），得到最终的运算结果．只要参与者报出最终的运算结果，主持人立马就知道参与者的出生年份．若某位参与者报出的最终的运算结果是 915，则这位参与者的出生年份是_____．

【答案】 2009

【解析】

【分析】本题考查二元一次方程的解，理解题意是解答的关键。设这位参与者的出生年份是 x ，从九个数字中任取一个数字为 a ，根据题意列二元一次方程，整理得 $x = 100a + 1109$ ，根据 a 的取值得到 x 的 9 种可能，结合实际即可求解。

【详解】解：设这位参与者的出生年份是 x ，从九个数字中任取一个数字为 a ，

根据题意，得 $(10a + 4.6) \times 10 + 1978 - x = 915$ ，

整理，得 $100a + 46 + 1978 - x = 915$

$\therefore x = 100a + 1109$ ，

$\because a$ 是从 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 这九个数字中任取一个数字，

$\therefore x$ 的值可能为 1209, 1309, 1409, 1509, 1609, 1709, 1809, 1909, 2009，

$\because$ 是为庆祝中国改革开放 46 周年，且参与者均为在校中学生，

$\therefore x$ 只能是 2009，

故答案为：2009。

三、解答题（本大题共 9 个小题，第 17、18、19 题每小题 6 分，第 20、21 题每小题 8 分，第 22、23 题每小题 9 分，第 24、25 题每小题 10 分，共 72 分解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17. 计算： $(\frac{1}{4})^{-1} + |-\sqrt{3}| - 2\cos 30^\circ - (\pi - 6.8)^0$ 。

【答案】 3

【解析】

【分析】本题考查了实数的混合运算，先根据绝对值、零指数幂、负整数指数幂的意义，特殊角的三角函数值化简，再算加减即可。

【详解】解：原式 $= 4 + \sqrt{3} - \sqrt{3} - 1$
 $= 3$ 。

18. 先化简，再求值： $2m - m(m-2) + (m+3)(m-3)$ ，其中 $m = \frac{5}{2}$ 。

【答案】 $4m - 9$ ； 1

【解析】

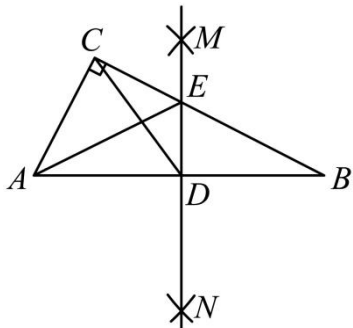
【分析】本题考查整式的混合运算及其求值，先根据整式的混合运算法则化简原式，再代值求解即可。

【详解】解： $2m - m(m-2) + (m+3)(m-3)$
 $= 2m - m^2 + 2m + m^2 - 9$

$$= 4m - 9.$$

$$\text{当 } m = \frac{5}{2} \text{ 时, 原式} = 4 \times \frac{5}{2} - 9 = 10 - 9 = 1.$$

19. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 2\sqrt{5}$, $AC = 2$, 分别以点 A , B 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径画弧, 两弧分别交于点 M 和 N , 作直线 MN 分别交 AB , BC 于点 D , E , 连接 CD , AE .



- (1) 求 CD 的长;
- (2) 求 $\triangle ACE$ 的周长.

【答案】(1) $\sqrt{5}$

(2) 6

【解析】

【分析】本题考查了线段垂直平分线的性质：线段垂直平分线的点到线段两个端点的距离相等，斜中半定理：直角三角形中，斜边上的中线等于斜边的一半，以及勾股定理等知识点，熟记相关结论是解题关键。

- (1) 由题意得 MN 是线段 AB 的垂直平分线，故点 D 是斜边 AB 的中点，据此即可求解；
- (2) 根据 $EA = EB$ 、 $\triangle ACE$ 的周长 $= AC + CE + EA = AC + CE + EB = AC + BC$ 即可求解；

【小问 1 详解】

解：由作图可知， MN 是线段 AB 的垂直平分线，

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，点 D 是斜边 AB 的中点.

$$\therefore CD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} = \sqrt{5}.$$

【小问 2 详解】

解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 2^2} = \sqrt{16} = 4.$

$\therefore MN$ 是线段 AB 的垂直平分线，

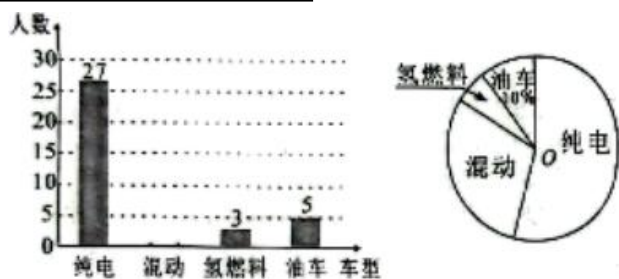
$$\therefore EA = EB.$$

$$\therefore \triangle ACE \text{ 的周长} = AC + CE + EA = AC + CE + EB = AC + BC = 2 + 4 = 6.$$

20. 中国新能源产业异军突起. 中国车企在政策引导和支持下，瞄准纯电、混动和氢燃料等多元技术路线，加大研发投入形成了领先的技术优势，2023 年，中国新能源汽车产销量均突破 900 万辆，连续 9 年位居全

球第一。在某次汽车展览会上，工作人员随机抽取了部分参展人员进行了“我最喜欢的汽车类型”的调查活动（每人限选其中一种类型），并将数据整理后，绘制成下面有待完成的统计表、条形统计图和扇形统计图

类型	人数	百分比
纯电	m	54%
混动	n	$a\%$
氢燃料	3	$b\%$
油车	5	$c\%$



请根据以上信息，解答下列问题：

- (1) 本次调查活动随机抽取了_____人；表中 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ ；
- (2) 请补全条形统计图；
- (3) 请计算扇形统计图中“混动”类所在扇形的圆心角的度数；
- (4) 若此次汽车展览会的参展人员共有 4000 人，请你估计喜欢新能源（纯电、混动、氢燃料）汽车的有多少人？

【答案】 (1) 50；30，6

(2) 见解析 (3) 108°

(4) 3600 人

【解析】

【分析】 本题考查统计表、条形统计图和扇形统计图的综合，理解题意，能从统计图中获取有用信息是解答的关键.

(1) 用喜欢油车人数除以其所占的百分比可求得调查人数，用喜欢氢燃料人数除以调查人数可求得 b ，进而用 1 减去喜欢其他车型所占的百分比可求解 a ；

(2) 先求得 n ，进而可补全条形统计图；

(3) 用 360 度乘以喜欢混动所占的百分比即可求解；

(4) 用总人数乘以样本中喜欢新能源汽车所占的百分比即可求解.

【小问 1 详解】

解：本次调查活动随机抽取人数为 $5 \div 10\% = 50$ (人),

$b\% = 3 \div 50 \times 100\% = 6\%$, 则 $b = 6$,

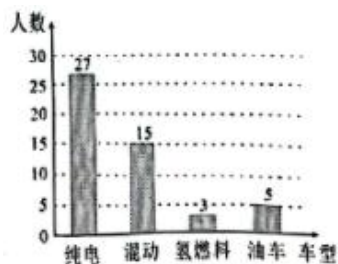
$a\% = 1 - 54\% - 6\% - 10\% = 30\%$, 则 $a = 30$,

故答案为: 50; 30, 6;

【小问 2 详解】

解: $\because n = 50 \times 30\% = 15$,

$\therefore$ 补全条形统计图如图所示:



【小问 3 详解】

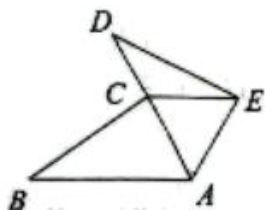
解: 扇形统计图中“混动”类所在扇形的圆心角的度数为 $360^\circ \times 30\% = 108^\circ$;

【小问 4 详解】

解: $4000 \times (54\% + 30\% + 6\%) = 3600$ (人).

答: 估计喜欢新能源(纯电、混动、氢燃料)汽车的有 3600 人.

21. 如图, 点 C 在线段 AD 上, $AB = AD$, $\angle B = \angle D$, $BC = DE$.



(1) 求证: $\triangle ABC \cong \triangle ADE$;

(2) 若 $\angle BAC = 60^\circ$, 求 $\angle ACE$ 的度数.

【答案】(1) 见解析 (2) $\angle ACE = 60^\circ$

【解析】

【分析】本题考查全等三角形的判定与性质、等边三角形的判定与性质, 证明 $\triangle ACE$ 是等边三角形是解答的关键.

(1) 直接根据全等三角形的判定证明结论即可;

(2) 根据全等三角形的性质得到 $AC = AE$, $\angle CAE = \angle BAC = 60^\circ$, 再证明 $\triangle ACE$ 是等边三角形, 利

用等边三角形的性质求解即可.

【小问 1 详解】

证明：在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 中，

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle B = \angle D, \\ BC = DE \end{cases}$$

所以 $\triangle ABC \cong \triangle ADE$ (SAS);

【小问 2 详解】

解：因为 $\triangle ABC \cong \triangle ADE$, $\angle BAC = 60^\circ$,

所以 $AC = AE$, $\angle CAE = \angle BAC = 60^\circ$,

所以 $\triangle ACE$ 是等边三角形.

所以 $\angle ACE = 60^\circ$.

22. 刺绣是我国民间传统手工艺. 湘绣作为中国四大刺绣之一, 闻名中外, 在巴黎奥运会倒计时 50 天之际, 某国际旅游公司计划购买 A 、 B 两种奥运主题的湘绣作品作为纪念品. 已知购买 1 件 A 种湘绣作品与 2 件 B 种湘绣作品共需要 700 元, 购买 2 件 A 种湘绣作品与 3 件 B 种湘绣作品共需要 1200 元.

(1) 求 A 种湘绣作品和 B 种湘绣作品的单价分别为多少元?

(2) 该国际旅游公司计划购买 A 种湘绣作品和 B 种湘绣作品共 200 件, 总费用不超过 50000 元, 那么最多能购买 A 种湘绣作品多少件?

【答案】(1) A 种湘绣作品的单价为 300 元, B 种湘绣作品的单价为 200 元

(2) 最多能购买 100 件 A 种湘绣作品

【解析】

【分析】本题考查了二元一次方程组的应用以及一元一次不等式的应用.

(1) 设 A 种湘绣作品的单价为 x 元, B 种湘绣作品的单价为 y 元, 根据“购买 1 件 A 种湘绣作品与 2 件 B 种湘绣作品共需要 700 元, 购买 2 件 A 种湘绣作品与 3 件 B 种湘绣作品共需要 1200 元”, 即可得出关于 x , y 的二元一次方程组, 解之即可解题;

(2) 设购买 A 种湘绣作品 a 件, 则购买 B 种湘绣作品 $(200-a)$ 件, 总费用 = 单价 $\times$ 数量, 结合总费用不超过 50000 元, 即可得出关于 a 的一元一次不等式, 解之即可得出 a 的值, 再取其中的最大整数值即可得出该校最大可以购买湘绣的数量.

【小问 1 详解】

设 A 种湘绣作品的单价为 x 元, B 种湘绣作品的单价为 y 元.

根据题意，得

$$\begin{cases} x + 2y = 700 \\ 2x + 3y = 1200 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 300, \\ y = 200. \end{cases}$$

答：A 种湘绣作品的单价为 300 元，B 种湘绣作品的单价为 200 元.

【小问 2 详解】

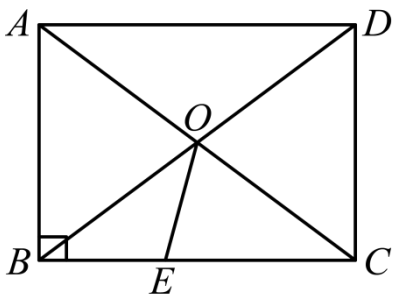
设购买 A 种湘绣作品 a 件，则购买 B 种湘绣作品 $(200 - a)$ 件.

根据题意，得 $300a + 200(200 - a) \leq 50000$,

解得 $a \leq 100$.

答：最多能购买 100 件 A 种湘绣作品.

23. 如图，在 $ABCD$ 中，对角线 AC ， BD 相交于点 O ， $\angle ABC = 90^\circ$.



(1) 求证： $AC = BD$ ；

(2) 点 E 在 BC 边上，满足 $\angle CEO = \angle COE$. 若 $AB = 6$ ， $BC = 8$ ，求 CE 的长及 $\tan \angle CEO$ 的值.

【答案】(1) 见解析 (2) $CE = 5$ ， $\tan \angle CEO = 3$

【解析】

【分析】本题考查矩形的判定与性质、勾股定理、等腰三角形的判定与性质、锐角三角函数等知识，熟练掌握矩形的判定与性质是解答的关键.

(1) 直接根据矩形的判定证明即可；

(2) 先利用勾股定理结合矩形的性质求得 $AC = 10$ ， $OB = OC$. 进而可得 $CO = \frac{1}{2}AC = 5$ ，再根据等腰三角形的判定得到 $CE = CO = 5$ ，过点 O 作 $OF \perp BC$ 于点 F ，根据等腰三角形的性质，结合勾股定理分别求得 $CF = 4$ ， $EF = 1$ ， $OF = 3$ ，然后利用正切定义求解即可.

【小问 1 详解】

证明：因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，且 $\angle ABC = 90^\circ$,

所以四边形 $ABCD$ 是矩形.

所以 $AC = BD$;

【小问 2 详解】

解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB = 6$ ， $BC = 8$ ，

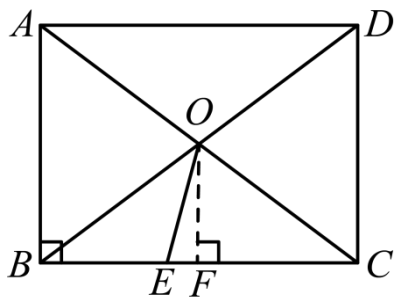
所以 $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ ，

因为四边形 $ABCD$ 是矩形，

所以 $CO = \frac{1}{2}AC = 5$ ， $OB = OC$ 。

因为 $\angle CEO = \angle COE$ ，所以 $CE = CO = 5$ 。

过点 O 作 $OF \perp BC$ 于点 F ，则 $CF = \frac{1}{2}BC = 4$ ，



所以 $EF = CE - CF = 5 - 4 = 1$ ，

在 $\text{Rt}\triangle COF$ 中， $OF = \sqrt{OC^2 - CF^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ ，

所以 $\tan \angle CEO = \frac{OF}{EF} = 3$ 。

24. 对于凸四边形，根据它有无外接圆（四个顶点都在同一个圆上）与内切圆（四条边都与同一个圆相切），可分为四种类型，我们不妨约定：

既无外接圆，又无内切圆的四边形称为“平凡型无圆”四边形；

只有外接圆，而无内切圆的四边形称为“外接型单圆”四边形；

只有内切圆，而无外接圆的四边形称为“内切型单圆”四边形；

既有外接圆，又有内切圆的四边形称为“完美型双圆”四边形。

请你根据该约定，解答下列问题：

（1）请你判断下列说法是否正确（在题后相应的括号中，正确的打“√”，错误的打“×”，

①平行四边形一定不是“平凡型无圆”四边形；（ ）

②内角不等于 90° 的菱形一定是“内切型单圆”四边形；（ ）

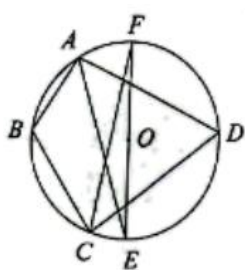
③若“完美型双圆”四边形的外接圆圆心与内切圆圆心重合，外接圆半径为 R ，内切圆半径为 r ，则有

$$R = \sqrt{2}r. \quad (\quad)$$

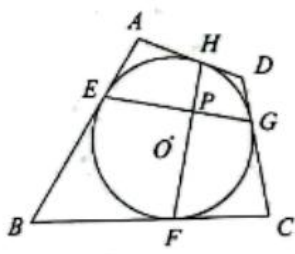
(2) 如图 1, 已知四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, 四条边长满足: $AB + CD \neq BC + AD$.

①该四边形 $ABCD$ 是 “_____” 四边形 (从约定的四种类型中选一种填入);

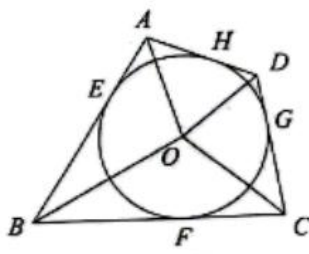
②若 $\angle BAD$ 的平分线 AE 交 $\odot O$ 于点 E , $\angle BCD$ 的平分线 CF 交 $\odot O$ 于点 F , 连接 EF . 求证: EF 是 $\odot O$ 的直径.



第 24 题图 1



第 24 题图 2



第 24 题图 3

(3) 已知四边形 $ABCD$ 是 “完美型双圆” 四边形, 它的内切圆 $\odot O$ 与 AB , BC , CD , AD 分别相切于点 E , F , G , H .

①如图 2. 连接 EG , FH 交于点 P . 求证: $EG \perp FH$.

②如图 3, 连接 OA , OB , OC , OD , 若 $OA = 2$, $OB = 6$, $OC = 3$, 求内切圆 $\odot O$ 的半径 r 及 OD 的长.

【答案】(1) ① $\times$; ② $\checkmark$; ③ $\checkmark$

(2) ①外接型单圆; ②见解析

(3) $r = \frac{6}{13}\sqrt{13}$, $OD = \sqrt{3}$,

【解析】

【分析】(1) 根据圆内接四边形和切线长定理可得: 有外接圆的四边形的对角互补; 有内切圆的四边形的对边之和相等, 结合题中定义, 根据对角不互补, 对边之和也不相等的平行四边形无外接圆, 也无内切圆, 进而可判断①; 根据菱形的性质可判断②; 根据正方形的性质可判断③;

(2) ①根据已知结合题中定义可得结论;

②根据角平分线的定义和圆周角定理证明 $\widehat{EBF} = \widehat{EDF}$ 即可证得结论;

(3) ①连接 OE , OF , OG , OH , HG , 根据四边形 $ABCD$ 是 “完美型双圆” 四边形, 结合四边形的内角和定理可推导出 $\angle A + \angle EOH = 180^\circ$, $\angle FOG + \angle C = 180^\circ$, $\angle A + \angle C = 180^\circ$, 进而可得 $\angle EOH = \angle C$, $\angle FOG + \angle EOH = 180^\circ$, 然后利用圆周角定理可推导出 $\angle HPG = 90^\circ$, 即可证得结论;

②连接 OE , OF , OG , OH , 根据已知条件证明 $\angle OAH = \angle COG$, 进而证明 $\triangle AOH \sim \triangle OCG$ 得到

$CG = \frac{3}{2}r$ ，再利用勾股定理求得 $r = \frac{6}{13}\sqrt{13}$ ， $BE = \frac{12}{13}\sqrt{39}$ ，同理可证 $\triangle BEO \sim \triangle OHD$ 求解 OD 即可。

【小问 1 详解】

解：由题干条件可得：有外接圆的四边形的对角互补；有内切圆的四边形的对边之和相等，所以

①当平行四边形的对角不互补，对边之和也不相等时，该平行四边形无外接圆，也无内切圆，

$\therefore$ 该平行四边形是“平凡型无圆”四边形，故①错误；

② $\because$ 内角不等于 90° 的菱形的对角不互补，

$\therefore$ 该菱形无外接圆，

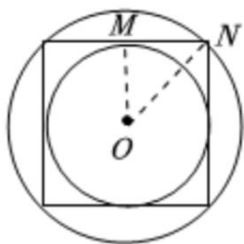
$\because$ 菱形的四条边都相等，

$\therefore$ 该菱形的对边之和相等，

$\therefore$ 该菱形有内切圆，

$\therefore$ 内角不等于 90° 的菱形一定是“内切型单圆”四边形，故②正确；

③由题意，外接圆圆心与内切圆圆心重合的“完美型双圆”四边形是正方形，如图，



则 $OM = r$ ， $ON = R$ ， $OM \perp MN$ ， $\angle ONM = 45^\circ$ ，

$\therefore$ $\text{Rt}\triangle OMN$ 为等腰直角三角形，

$\therefore ON = \sqrt{2}OM$ ，即 $R = \sqrt{2}r$ ；

故③正确，

故答案为：① $\times$ ；② $\checkmark$ ；③ $\checkmark$ ；

【小问 2 详解】

解：① $\because$ 四边形 $ABCD$ 中， $AB + CD \neq BC + AD$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 无内切圆，又该四边形有外接圆，

$\therefore$ 该四边形 $ABCD$ 是“外接型单圆”四边形，

故答案为：外接型单圆；

② $\because$ $\angle BAD$ 的平分线 AE 交 $\odot O$ 于点 E ， $\angle BCD$ 的平分线 CF 交 $\odot O$ 于点 F ，

$\therefore \angle BAE = \angle DAE$ ， $\angle BCF = \angle DCF$ ，

$$\therefore \widehat{BE} = \widehat{DE}, \quad \widehat{BF} = \widehat{DF},$$

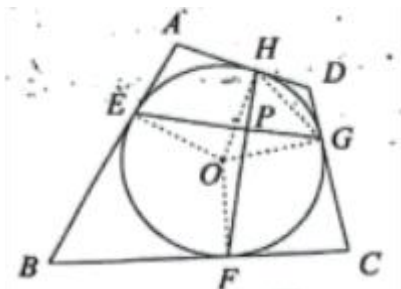
$$\therefore \widehat{BE} + \widehat{BF} = \widehat{DE} + \widehat{DF},$$

$$\therefore \widehat{EBF} = \widehat{EDF}, \text{ 即 } \widehat{EBF} \text{ 和 } \widehat{EDF} \text{ 均为半圆,}$$

$\therefore EF$ 是 $\odot O$ 的直径.

【小问3详解】

①证明：如图，连接 OE 、 OF 、 OG 、 OH 、 HG ，



$\because \odot O$ 是四边形 $ABCD$ 的内切圆，

$\therefore OE \perp AB, OF \perp BC, OG \perp CD, OH \perp AD,$

$\therefore \angle OEA = \angle OHA = 90^\circ,$

在四边形 $AEOH$ 中， $\angle A + \angle EOH = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 180^\circ,$

同理可证， $\angle FOG + \angle C = 180^\circ,$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是“完美型双圆”四边形，

$\therefore$ 该四边形有外接圆，则 $\angle A + \angle C = 180^\circ,$

$\therefore \angle EOH = \angle C,$ 则 $\angle FOG + \angle EOH = 180^\circ,$

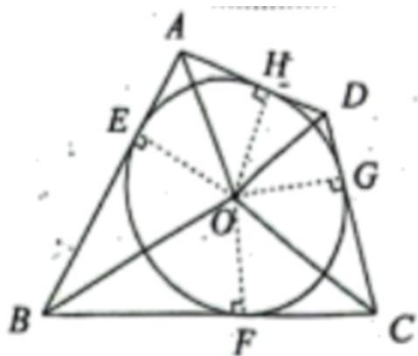
$$\therefore \angle FHG = \frac{1}{2} \angle FOG, \quad \angle EGH = \frac{1}{2} \angle EOH,$$

$$\therefore \angle FHG + \angle EGH = \frac{1}{2} (\angle FOG + \angle EOH) = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle HPG = 180^\circ - (\angle FHG + \angle EGH) = 90^\circ,$$

$\therefore EG \perp FH;$

②如图，连接 OE 、 OF 、 OG 、 OH ，



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是“完美型双圆”四边形，它的内切圆 $\odot O$ 与 AB , BC , CD , AD 分别相切于点 E , F , G , H ,

$\therefore OE \perp AB$, $OF \perp BC$, $OG \perp CD$, $OH \perp AD$, $OE = OF = OG = OH$,

$\therefore \angle EAH + \angle FCG = 180^\circ$, $\angle OAH = \angle OAE$, $\angle OCG = \angle OCF$,

$\therefore \angle OAH + \angle OCG = 90^\circ$,

$\therefore \angle COG + \angle OCG = 90^\circ$,

$\therefore \angle OAH = \angle COG$, 又 $\angle AHO = \angle OGC = 90^\circ$,

$\therefore \triangle AOH \sim \triangle OCG$,

$$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{OH}{CG},$$

$\therefore OA = 2$, $OC = 3$,

$$\therefore \frac{2}{3} = \frac{r}{CG}, \text{ 则 } CG = \frac{3}{2}r,$$

在 $\text{Rt}\triangle OGC$ 中，由 $OG^2 + CG^2 = OC^2$ 得 $r^2 + \left(\frac{3}{2}r\right)^2 = 3^2$,

$$\text{解得 } r = \frac{6}{13}\sqrt{13};$$

在 $\text{Rt}\triangle OBE$ 中， $OB = 6$,

$$\therefore BE = \sqrt{OB^2 - OE^2} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{6}{13}\sqrt{13}\right)^2} = \frac{12}{13}\sqrt{39},$$

同理可证 $\triangle BEO \sim \triangle OHD$,

$$\therefore \frac{BE}{OH} = \frac{OB}{OD},$$

$$\therefore \frac{\frac{12}{13}\sqrt{39}}{\frac{6}{13}\sqrt{13}} = \frac{6}{OD},$$

$$\therefore OD = \sqrt{3}.$$

【点睛】本题主要考查平行四边形的性质、正方形的性质、菱形的性质、圆周角定理、内切圆的定义与性质、外接圆的定义与性质、相似三角形的判定与性质、四边形的内角和定理、勾股定理、角平分线的判定等知识，理解题中定义，熟练掌握这些知识和灵活运用性质和判定是解题的关键。另外还要求学生具备扎实的数学基础和逻辑思维能力，备考时，重视四边形知识的学习，提高解题技巧和速度，以应对中考挑战。

25. 已知四个不同的点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$ 都在关于 x 的函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数, $a \neq 0$) 的图象上.

(1) 当 A, B 两点的坐标分别为 $(-1, -4)$, $(3, 4)$ 时, 求代数式 $2024a + 1012b + \frac{3}{7}$ 的值;

(2) 当 A, B 两点的坐标满足 $a^2 + 2(y_1 + y_2)a + 4y_1y_2 = 0$ 时, 请你判断此函数图象与 x 轴的公共点的个数, 并说明理由;

(3) 当 $a > 0$ 时, 该函数图象与 x 轴交于 E, F 两点, 且 A, B, C, D 四点的坐标满足:

$2a^2 + 2(y_1 + y_2)a + y_1^2 + y_2^2 = 0$, $2a^2 - 2(y_3 + y_4)a + y_3^2 + y_4^2 = 0$. 请问是否存在实数 $m(m > 1)$, 使得 AB , CD , $m \cdot EF$ 这三条线段组成一个三角形, 且该三角形的三个内角的大小之比为 $1:2:3$? 若存在, 求出 m 的值和此时函数的最小值; 若不存在, 请说明理由 (注: $m \cdot EF$ 表示一条长度等于 EF 的 m 倍的线段).

【答案】(1) $2024a + 1012b + \frac{3}{7} = 2024 \frac{3}{7}$

(2) 此函数图象与 x 轴的公共点个数为两个, 理由见解析

(3) 存在两个 m 的值符合题意; 当 $m = \frac{\sqrt{30}}{5}$ 时, 此时该函数的最小值为 $-\frac{5a}{3}$; 当 $m = \sqrt{2}$ 时, 此时该函数的最小值为 $-2a$

【解析】

【分析】本题主要考查了二次函数的性质、二次函数与一元二次方程的关系、二次函数与 x 轴交点问题、直角三角形存在性问题等, 熟练掌握相关知识和分类讨论是解题关键.

(1) 将 A, B 代入得到关于 a, b 的关系式, 再整体代入求解即可;

(2) 解方程 $a^2 + 2(y_1 + y_2)a + 4y_1y_2 = 0$ 求解, 再根据 a 的正负分类讨论即可;

(3) 由内角之比可得出这是一个 $30^\circ, 60^\circ$ 的直角三角形, 再将线段表示出来, 利用特殊角的边角关系建立方程即可.

【小问 1 详解】

将 $A(-1, -4)$, $B(3, 4)$ 代入 $y = ax^2 + bx + c$ 得

$$\begin{cases} a-b+c=-4 \text{ ①} \\ 9a+3b+c=4 \text{ ②} \end{cases},$$

②-①得 $8a+4b=8$ ，即 $2a+b=2$ 。

$$\text{所以 } 2024a+1012b+\frac{3}{7}=1012(2a+b)+\frac{3}{7}=2024\frac{3}{7}.$$

【小问 2 详解】

此函数图象与 x 轴的公共点个数为两个。

方法 1: 由 $a^2+2(y_1+y_2)a+4y_1y_2=0$ ，得 $(a+2y_1)(a+2y_2)=0$ 。

可得 $y_1=-\frac{a}{2}$ 或 $y_2=-\frac{a}{2}$ 。

当 $a>0$ 时， $-\frac{a}{2}<0$ ，此抛物线开口向上，而 A, B 两点之中至少有一个点在 x 轴的下方，此时该函数图象与 x 轴有两个公共点；

当 $a<0$ 时， $-\frac{a}{2}>0$ ，此抛物线开口下，而 A, B 两点之中至少有一个点在 x 轴的上方，此时该函数图象与 x 轴也有两个公共点。

综上所述，此函数图象与 x 轴必有两个公共点。

方法 2: 由 $a^2+2(y_1+y_2)a+4y_1y_2=0$ ，得 $(a+2y_1)(a+2y_2)=0$ 。

可得 $y_1=-\frac{a}{2}$ 或 $y_2=-\frac{a}{2}$ 。

所以抛物线上存在纵坐标为 $-\frac{a}{2}$ 的点，即一元二次方程 $ax^2+bx+c=-\frac{a}{2}$ 有解。

所以该方程根的判别式 $\Delta=b^2-4a(c+\frac{a}{2})\geq 0$ ，即 $b^2-4ac\geq 2a^2$ 。

因为 $a\neq 0$ ，所以 $b^2-4ac>0$ 。

所以原函数图象与 x 轴必有两个公共点。

方法 3: 由 $a^2+2(y_1+y_2)a+4y_1y_2=0$ ，可得 $y_1=-\frac{a}{2}$ 或 $y_2=-\frac{a}{2}$ 。

当 $y_1=-\frac{a}{2}$ 时，有 $ax_1^2+bx_1+c=-\frac{a}{2}$ ，即 $ax_1^2+bx_1+\frac{a}{2}=-c$ ，

所以 $\Delta=b^2-4ac=b^2+4a(ax_1^2+bx_1+\frac{a}{2})=2a^2+(2ax_1+b)^2>0$ 。

此时该函数图象与 x 轴有两个公共点。

当 $y_2=-\frac{a}{2}$ 时，同理可得 $\Delta>0$ ，此时该函数图象与 x 轴也有两个公共点。

综上所述，该函数图象与 x 轴必有两个公共点。

【小问 3 详解】

因为 $a > 0$ ，所以该函数图象开口向上.

由 $2a^2 + 2(y_1 + y_2)a + y_1^2 + y_2^2 = 0$ ，得 $(a + y_1)^2 + (a + y_2)^2 = 0$ ，可得 $y_1 = y_2 = -a$.

由 $2a^2 - 2(y_3 + y_4)a + y_3^2 + y_4^2 = 0$ ，得 $(a - y_3)^2 + (a - y_4)^2 = 0$ ，可得 $y_3 = y_4 = a$.

所以直线 AB ， CD 均与 x 轴平行.

由 (2) 可知该函数图象与 x 轴必有两个公共点，设 $E(x_5, 0)$ ， $F(x_6, 0)$.

由图象可知 $-a > \frac{4ac - b^2}{4a}$ ，即 $b^2 - 4ac > 4a^2$.

所以 $ax^2 + bx + c = -a$ 的两根为 x_1 ， x_2 ，可得 $AB = |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{b^2 - 4a(c+a)}}{|a|}$.

同理 $ax^2 + bx + c = a$ 的两根为 x_3 ， x_4 ，可得 $CD = |x_3 - x_4| = \frac{\sqrt{b^2 - 4a(c-a)}}{|a|}$.

同理 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根为 x_5 ， x_6 ，可得 $m \cdot EF = m \cdot |x_5 - x_6| = m \cdot \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}$.

由于 $m > 1$ ，结合图象与计算可得 $AB < EF < m \cdot EF$ ， $AB < CD$.

若存在实数 $m(m > 1)$ ，使得 AB ， CD ， $m \cdot EF$ 这三条线段组成一个三角形，

且该三角形的三个内角的大小之比为 1: 2: 3，则此三角形必定为两锐角分别为 30° ， 60° 的直角三角形，所以线段 AB 不可能是该直角三角形的斜边.

①当以线段 CD 为斜边，且两锐角分别为 30° ， 60° 时，因为 $m \cdot EF > AB$ ，

所以必须同时满足： $AB^2 + (m \cdot EF)^2 = CD^2$ ， $m \cdot EF = \sqrt{3}AB$.

将上述各式代入化简可得 $m^2 = \frac{8a^2}{b^2 - 4ac} < \frac{8a^2}{4a^2} = 2$ ，且 $m^2 = \frac{3(b^2 - 4ac - 4a^2)}{b^2 - 4ac}$ ，

联立解之得 $b^2 - 4ac = \frac{20a^2}{3}$ ， $m^2 = \frac{8a^2}{b^2 - 4ac} = \frac{6}{5} < 2$ ，解得 $m = \frac{\sqrt{30}}{5} > 1$ 符合要求.

所以 $m = \frac{\sqrt{30}}{5}$ ，此时该函数的最小值为 $\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-\frac{20a^2}{3}}{4a} = -\frac{5a}{3}$.

②当以线段 $m \cdot EF$ 为斜边时，必有 $AB^2 + CD^2 = (m \cdot EF)^2$ ，同理代入化简可得

$2(b^2 - 4ac) = m^2(b^2 - 4ac)$ ，解得 $m = \sqrt{2}$.

因为以线段 $\sqrt{2}EF$ 为斜边，且有一个内角为 60° ，而 $CD > AB$ ，

所以 $CD = AB \cdot \tan 60^\circ$ ，即 $\sqrt{b^2 - 4a(c-a)} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{b^2 - 4a(c+a)}$ ，

化简得 $b^2 - 4ac = 8a^2 > 4a^2$ 符合要求.

所以 $m = \sqrt{2}$ ，此时该函数的最小值为 $\sqrt{\frac{4ac - b^2}{4a}} = \frac{-8a^2}{4a} = -2a$.

综上所述，存在两个 m 的值符合题意；

当 $m = \frac{\sqrt{30}}{5}$ 时，此时该函数的最小值为 $-\frac{5a}{3}$ ；

当 $m = \sqrt{2}$ 时，此时该函数的最小值为 $-2a$.