

2024 年湖南省初中学业水平考试

数 学

本试题卷共 6 页，时量 120 分钟，满分 120 分。

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号写在答题卡和本试题卷上，并认真核对条形码上的姓名、准考证号 and 相关信息；
2. 选择题部分请按题号用 2B 铅笔填涂方框，修改时用橡皮擦干净，不留痕迹；
3. 非选择题部分请按题号用 0.5 毫米黑色墨水签字笔书写，否则作答无效；
4. 在草稿纸、试题卷上作答无效；
5. 请勿折叠答题卡，保持字体工整、笔迹清晰、卡面清洁；
6. 答题卡上不得使用涂改液、涂改胶和贴纸。

一、选择题：本题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 在日常生活中，若收入 300 元记作 $+300$ 元，则支出 180 元应记作（ ）

- A. $+180$ 元 B. $+300$ 元 C. -180 元 D. -480 元

【答案】C

【解析】

【分析】此题主要考查了正负数的意义，解题关键是理解“正”和“负”的相对性，明确什么是一对具有相反意义的量。首先审清题意，明确“正”和“负”所表示的意义，结合题意解答即可；

【详解】解：收入为“+”，则支出为“-”，
那么支出 180 元记作 -180 元。

故选：C。

2. 据《光明日报》2024 年 3 月 14 日报道：截至 2023 年末，我国境内有效发明专利量达到 401.5 万件，高价值发明专利占比超过四成，成为世界上首个境内有效发明专利数量突破 400 万件的国家，将 4015000 用科学记数法表示应为（ ）

- A. 0.4015×10^7 B. 4.015×10^6 C. 40.15×10^5 D. 4.015×10^3

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查用科学记数法表示较大的数，一般形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 可以用整数位

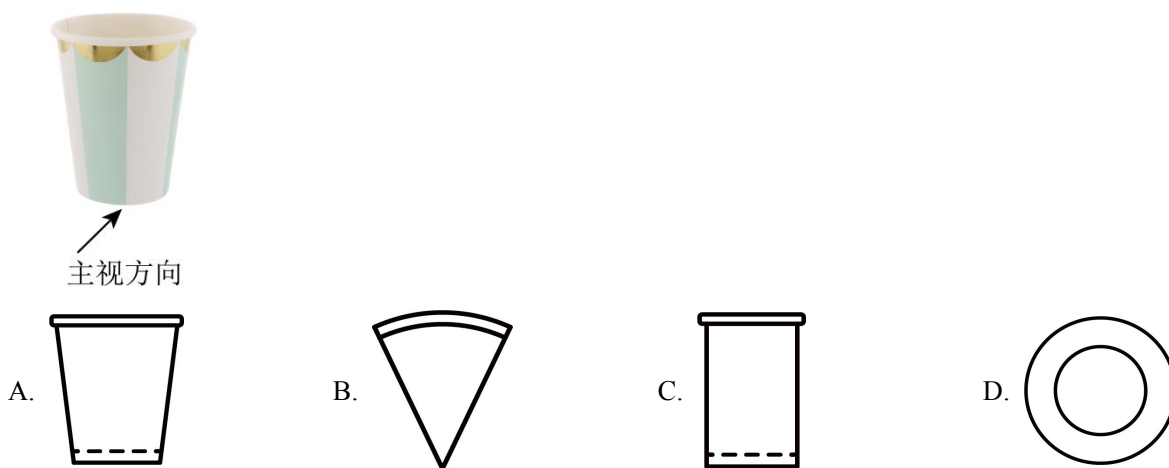
数减去 1 来确定. 用科学记数法表示数, 一定要注意 a 的形式, 以及指数 n 的确定方法.

科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值大于 10 时, n 是正数; 当原数的绝对值小于 1 时, n 是负数.

【详解】解: 4015000 用科学记数法表示为 4.015×10^6 .

故选: B.

3. 如图, 该纸杯的主视图是 ()



【答案】A

【解析】

【分析】直接依据主视图即从几何体的正面观察, 进而得出答案.

此题主要考查了简单几何体的三视图, 正确把握观察角度是解题的关键.

【详解】解: 该纸杯的主视图是选项 A,

故选: A.

4. 下列计算正确的是 ()

A. $3a^2 - 2a^2 = 1$ B. $a^3 \div a^2 = a(a \neq 0)$ C. $a^2 \cdot a^3 = a^6$ D. $(2a)^3 = 6a^3$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了合并同类项, 同底数幂的乘除法, 积的乘方, 根据以上运算法则逐项分析即可.

【详解】解: A、 $3a^2 - 2a^2 = a^2$, 故该选项不正确, 不符合题意;

B、 $a^3 \div a^2 = a(a \neq 0)$, 故该选项正确, 符合题意;

C、 $a^2 \cdot a^3 = a^5$, 故该选项不正确, 不符合题意;

D、 $(2a)^3 = 8a^3$ ，故该选项不正确，不符合题意；

故选：B.

5. 计算 $\sqrt{2} \times \sqrt{7}$ 的结果是 ()

- A. $2\sqrt{7}$ B. $7\sqrt{2}$ C. 14 D. $\sqrt{14}$

【答案】D

【解析】

【分析】此题主要考查了二次根式的乘法，正确计算是解题关键.

直接利用二次根式的乘法运算法则计算得出答案.

【详解】解： $\sqrt{2} \times \sqrt{7} = \sqrt{14}$ ，

故选：D

6. 下列命题中，正确的是 ()

- A. 两点之间，线段最短 B. 菱形的对角线相等
C. 正五边形的外角和为 720° D. 直角三角形是轴对称图形

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了命题与定理的知识，多边形外角性质，菱形性质及轴对称图形的特点，解题的关键是掌握这些基础知识点.

【详解】解：A、两点之间，线段最短，正确，是真命题，符合题意；

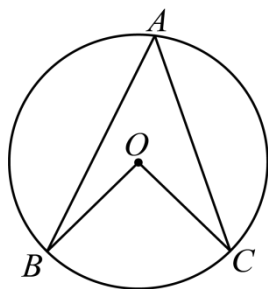
B、菱形的对角线互相垂直，不一定相等，选项错误，是假命题，不符合题意；

C、正五边形的外角和为 360° ，选项错误，是假命题，不符合题意；

D、直角三角形不一定是轴对称图形，只有等腰直角三角形是轴对称图形，选项错误，是假命题，不符合题意；

故选：A.

7. 如图， AB ， AC 为 $\odot O$ 的两条弦，连接 OB ， OC ，若 $\angle A = 45^\circ$ ，则 $\angle BOC$ 的度数为 ()



- A. 60° B. 75° C. 90° D. 135°

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了圆周角定理，熟知在同圆或等圆中，一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半是解题的关键．根据圆周角定理可知 $\angle A = \frac{1}{2} \angle BOC$ ，即可得到答案．

【详解】根据题意，圆周角 $\angle A$ 和圆心角 $\angle BOC$ 同对着 $\widehat{BC}$ ，

$$\therefore \angle A = \frac{1}{2} \angle BOC,$$

$$\because \angle A = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = 2\angle A = 2 \times 45^\circ = 90^\circ.$$

故选：C．

8. 某班的 5 名同学 1 分钟跳绳的成绩（单位：次）分别为：179，130，192，158，141．这组数据的中位数是（ ）

A. 130

B. 158

C. 160

D. 192

【答案】B

【解析】

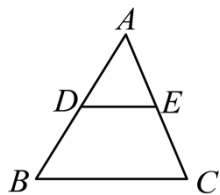
【分析】本题考查了中位数，找中位数要把数据按从小到大的顺序排列，位于最中间的一个数或两个数的平均数为中位数．据此求解即可．

【详解】解：从小到大排序为 130，141，158，179，192，最中间的数是 158，

$\therefore$ 中位数是 158，

故选：B．

9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D ， E 分别为边 AB ， AC 的中点．下列结论中，错误的是（ ）

A. $DE \parallel BC$ B. $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ C. $BC = 2DE$ D. $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了三角形中位线的性质，相似三角形的判定和性质，由三角形中位线性质可判断 A、C；由相似三角形的判定和性质可判断 B、D，掌握三角形中位线的性质及相似三角形的判定和性质是解题的关键．

【详解】解：∵点 D , E 分别为边 AB , AC 的中点，

∴ $DE \parallel BC$, $BC = 2DE$, 故 A、C 正确；

∴ $DE \parallel BC$,

∴ $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, 故 B 正确；

∴ $\triangle ADE \sim \triangle ABC$,

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$\therefore S_{\triangle ADE} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}, \text{ 故 D 错误；}$$

故选：D.

10. 在平面直角坐标系 xOy 中，对于点 $P(x, y)$ ，若 x, y 均为整数，则称点 P 为“整点”. 特别地，当 $\frac{y}{x}$

(其中 $xy \neq 0$) 的值为整数时，称“整点” P 为“超整点”，已知点 $P(2a-4, a+3)$ 在第二象限，下列说法正确的是 ()

A. $a < -3$

B. 若点 P 为“整点”，则点 P 的个数为 3 个

C. 若点 P 为“超整点”，则点 P 的个数为 1 个

D. 若点 P 为“超整点”，则点 P 到两坐标轴的距离之和大于 10

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了新定义，点到坐标轴的距离，各象限内点的特征等知识，利用各象限内点的特征求出 a 的取值范围，即可判断选项 A，利用“整点”定义即可判断选项 B，利用“超整点”定义即可判断选项 C，利用“超整点”和点到坐标轴的距离即可判断选项 D.

【详解】解：∵点 $P(2a-4, a+3)$ 在第二象限，

$$\therefore \begin{cases} 2a-4 < 0 \\ a+3 > 0 \end{cases},$$

∴ $-3 < a < 2$, 故选项 A 错误；

∵点 $P(2a-4, a+3)$ 为“整点”， $-3 < a < 2$,

∴整数 a 为 $-2, -1, 0, 1$,

∴点 P 的个数为 4 个，故选项 B 错误；

∴“整点” P 为 $(-8, 1), (-6, 2), (-4, 3), (-2, 4)$,

$$\therefore \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}, \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}, \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}, \frac{4}{-2} = -2$$

$\therefore$ “超整点” P 为 $(-2, 4)$ ，故选项 C 正确；

$\therefore$ 点 $P(2a-4, a+3)$ 为 “超整点”，

$\therefore$ 点 P 坐标为 $(-2, 4)$ ，

$\therefore$ 点 P 到两坐标轴的距离之和 $2+4=6$ ，故选项 D 错误，

故选：C.

二、填空题：本题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分.

11. 计算： $-(-2024) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】2024

【解析】

【分析】本题考查了求一个数的相反数，熟练掌握相反数的定义是解题的关键. 根据相反数的定义，即可求解.

【详解】解： $-(-2024) = 2024$ ，

故答案为：2024.

12. 有四枚材质、大小、背面图案完全相同的中国象棋棋子“”“”“”“”，将它们背面朝上任意放置，从中随机翻开一枚，恰好翻到棋子“”的概率是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】本题考查了概率，熟练掌握概率公式是解本题的关键. 概率 = 所求情况数与总情况数之比. 根据概率公式计算即可.

【详解】解： $\therefore$ 共有 4 枚棋子，

$\therefore$ 从中任意摸出一枚，恰好翻到棋子“”的概率是 $\frac{1}{4}$.

故答案为： $\frac{1}{4}$

13. 分式方程 $\frac{2}{x+1} = 1$ 的解是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x=1$

【解析】

【分析】先给方程两边同乘最简公分母 $x+1$ ，把分式方程转化为整式方程 $2=x+1$ ，求解后并检验即可.

【详解】解：方程的两边同乘 $x+1$ ，得 $2=x+1$ ，

解得 $x=1$ 。

检验：当 $x=1$ 时， $x+1=2 \neq 0$ 。

所以原方程的解为 $x=1$ 。

故答案为： $x=1$ 。

【点睛】此题考查了解分式方程，掌握解分式方程的一般步骤及方法是解题的关键。

14. 一个等腰三角形的一个底角为 40° ，则它的顶角的度数是_____度。

【答案】100

【解析】

【分析】本题考查了等腰三角形的性质和三角形内角和，解答时根据等腰三角形两底角相等，求出顶角度数即可。

【详解】解：因为其底角为 40° ，所以其顶角 $= 180^\circ - 40^\circ \times 2 = 100^\circ$ 。

故答案为：100。

15. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 4x + 2k = 0$ 有两个相等的实数根，则 k 的值为_____。

【答案】2

【解析】

【分析】本题考查根据一元二次方程根的情况求参数。一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有两个不相等的实数根，则 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ；有两个相等的实数根，则 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ；没有实数根，则 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 。据此即可求解。

【详解】解：由题意得： $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 2k = 0$ ，

解得： $k = 2$

故答案为：2

16. 在一定条件下，乐器中弦振动的频率 f 与弦长 l 成反比例关系，即 $f = \frac{k}{l}$ (k 为常数， $k \neq 0$)，若某乐器的弦长 l 为 0.9 米，振动频率 f 为 200 赫兹，则 k 的值为_____。

【答案】180

【解析】

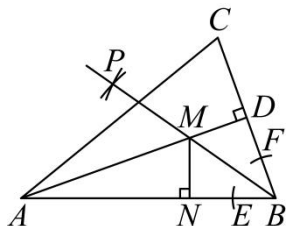
【分析】本题考查了待定系数法求反比例函数解析式，把 $l = 0.9$ ， $f = 200$ 代入 $f = \frac{k}{l}$ 求解即可。

【详解】解：把 $l = 0.9$ ， $f = 200$ 代入 $f = \frac{k}{l}$ ，得 $200 = \frac{k}{0.9}$ ，

解得 $k = 180$ ，

故答案为：180.

17. 如图，在锐角三角形 ABC 中， AD 是边 BC 上的高，在 BA ， BC 上分别截取线段 BE ， BF ，使 $BE = BF$ ；分别以点 E ， F 为圆心，大于 $\frac{1}{2}EF$ 的长为半径画弧，在 $\angle ABC$ 内，两弧交于点 P ，作射线 BP ，交 AD 于点 M ，过点 M 作 $MN \perp AB$ 于点 N . 若 $MN = 2$ ， $AD = 4MD$ ，则 $AM =$ _____.



【答案】6

【解析】

【分析】本题考查了尺规作图，角平分线的性质等知识，根据作图可知 BP 平分 $\angle ABC$ ，根据角平分线的性质可知 $DM = MN = 2$ ，结合 $AD = 4MD$ 求出 AD ， AM .

【详解】解：作图可知 BP 平分 $\angle ABC$ ，

$\because AD$ 是边 BC 上的高， $MN \perp AB$ ， $MN = 2$ ，

$\therefore MD = MN = 2$ ，

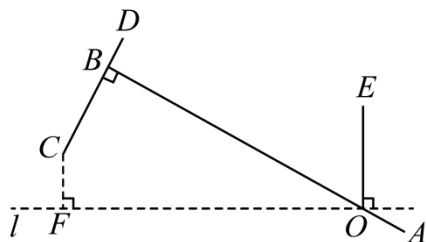
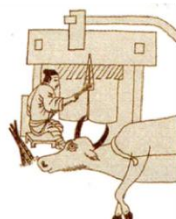
$\because AD = 4MD$ ，

$\therefore AD = 8$ ，

$\therefore AM = AD - MD = 6$ ，

故答案为：6.

18. 如图，左图为《天工开物》记载的用于舂（chōng）捣谷物的工具——“碓（duì）”的结构简图，右图为其平面示意图，已知 $AB \perp CD$ 于点 B ， AB 与水平线 l 相交于点 O ， $OE \perp l$. 若 $BC = 4$ 分米， $OB = 12$ 分米， $\angle BOE = 60^\circ$ ，则点 C 到水平线 l 的距离 CF 为_____分米（结果用含根号的式子表示）.

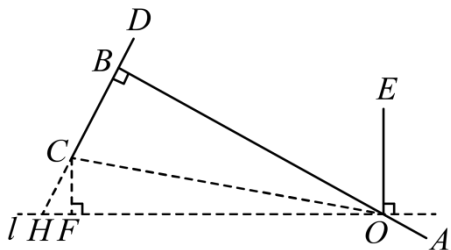


【答案】 $(6 - 2\sqrt{3})$ 或 $(-2\sqrt{3} + 6)$

【解析】

【分析】题目主要考查解三角形及利用三角形等面积法求解，延长 DC 交 l 于点 H ，连接 OC ，根据题意及解三角形确定 $BH = 4\sqrt{3}$ ， $OH = 8\sqrt{3}$ ，再由等面积法即可求解，作出辅助线是解题关键。

【详解】解：延长 DC 交 l 于点 H ，连接 OC ，如图所示：



在 $\text{Rt}\triangle OBH$ 中， $\angle BOH = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ， $OB = 12\text{dm}$

$$\therefore BH = 12 \times \tan 30^\circ = 4\sqrt{3}, \quad OH = 8\sqrt{3}$$

$$\because S_{\triangle OBH} = S_{\triangle OCH} + S_{\triangle OBC}$$

$$\therefore \frac{1}{2}OB \cdot BH = \frac{1}{2}OH \cdot CF + \frac{1}{2}OB \cdot BC$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 12 = \frac{1}{2} \times 8\sqrt{3} \times CF + \frac{1}{2} \times 12 \times 4,$$

$$\text{解得：} CF = 6 - 2\sqrt{3}.$$

故答案为： $(6 - 2\sqrt{3})$.

三、解答题：本题共 8 小题，共 66 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

$$19. \text{ 计算：} |-3| + \left(-\frac{1}{2}\right)^0 + \cos 60^\circ - \sqrt{4}.$$

$$\text{【答案】 } \frac{5}{2}$$

【解析】

【分析】题目主要考查实数的混合运算，特殊角的三角函数、零次幂的运算等，先化简绝对值、零次幂及特殊角的三角函数、算术平方根，然后计算加减法即可，熟练掌握各个运算是解题关键。

$$\text{【详解】解：} |-3| + \left(-\frac{1}{2}\right)^0 + \cos 60^\circ - \sqrt{4}$$

$$= 3 + 1 + \frac{1}{2} - 2$$

$$= \frac{5}{2}.$$

20. 先化简，再求值： $\frac{x^2-4}{x^2} \cdot \frac{x}{x+2} + \frac{3}{x}$ ，其中 $x=3$ 。

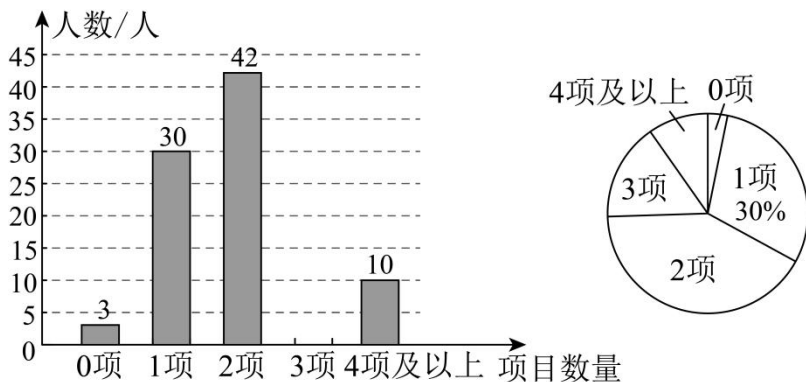
【答案】 $\frac{x+1}{x}$ ， $\frac{4}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了分式的化简求值，熟练掌握分式混合运算是解题的关键。先计算乘法，再计算加法，然后把 $x=3$ 代入化简后的结果，即可求解。

【详解】 解：
$$\begin{aligned} & \frac{x^2-4}{x^2} \cdot \frac{x}{x+2} + \frac{3}{x} \\ &= \frac{(x+2)(x-2)}{x^2} \cdot \frac{x}{x+2} + \frac{3}{x} \\ &= \frac{x-2}{x} + \frac{3}{x} \\ &= \frac{x+1}{x}, \end{aligned}$$
当 $x=3$ 时，原式 $= \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3}$ 。

21. 某校为了解学生五月份参与家务劳动的情况，随机抽取了部分学生进行调查，家务劳动的项目主要包括：扫地、拖地、洗碗、洗衣、做饭和简单维修等。学校德育处根据调查结果制作了如下两幅不完整的统计图：



请根据以上信息，解答下列问题：

- 本次被抽取的学生人数为_____人；
- 补全条形统计图；
- 在扇形统计图中，“4项及以上”部分所对应扇形的圆心角度数是_____°；
- 若该校有学生 1200 人，请估计该校五月份参与家务劳动的项目数量达到 3 项及以上的学生人数。

【答案】 (1) 100 (2) 见解析

(3) 36 (4) 300 人

【解析】

【分析】题目主要考查条形统计图与扇形统计图，样本估计总体，求扇形统计图圆心角等，理解题意，结合统计图得出相关信息是解题关键.

- (1) 根据参与 1 项家务劳动的人数及比例即可得出结果；
- (2) 先求出参加 3 项家务劳动的学生人数，然后补全统计图即可；
- (3) 用 360 度乘以 4 项及以上所占的比例即可；
- (4) 用总人数乘以参与家务劳动的项目数量达到 3 项及以上的比例即可.

【小问 1 详解】

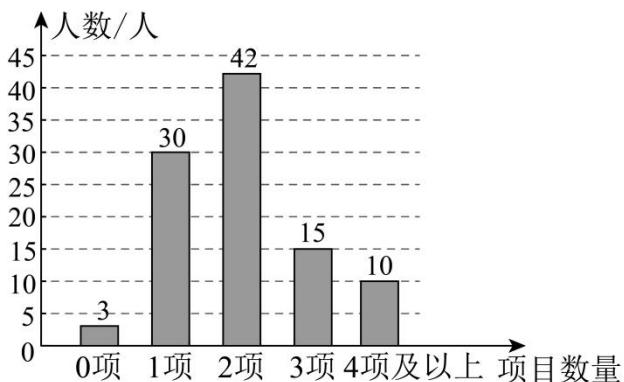
解：根据题意得： $30 \div 30\% = 100$ 人，

故答案为：100；

【小问 2 详解】

$$100 - 3 - 30 - 42 - 10 = 15,$$

补全统计图如下：



【小问 3 详解】

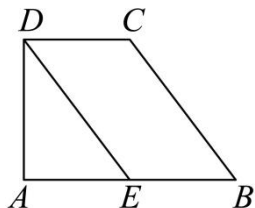
$$360^\circ \times \frac{10}{100} = 36^\circ,$$

故答案为：36；

【小问 4 详解】

$$1200 \times \frac{15+10}{100} = 300 \text{ 人}.$$

22. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 点 E 在边 AB 上, _____. 请从 “① $\angle B = \angle AED$; ② $AE = BE$, $AE = CD$ ” 这两组条件中任选一组作为已知条件, 填在横线上 (填序号), 再解决下列问题:



- (1) 求证：四边形 $BCDE$ 为平行四边形；

(2) 若 $AD \perp AB$, $AD=8$, $BC=10$, 求线段 AE 的长.

【答案】(1) ①或②, 证明见解析;

(2) 6

【解析】

【分析】题目主要考查平行四边形的判定和性质, 勾股定理解三角形, 理解题意, 熟练掌握平行四边形的判定和性质是解题关键.

(1) 选择①或②, 利用平行四边形的判定证明即可;

(2) 根据平行四边形的性质得出 $DE = BC = 10$, 再由勾股定理即可求解.

【小问 1 详解】

解: 选择①,

证明: $\because \angle B = \angle AED$,

$\therefore DE \parallel CB$,

$\because AB \parallel CD$,

$\therefore$ 四边形 $BCDE$ 为平行四边形;

选择②,

证明: $\because AE = BE$, $AE = CD$,

$\therefore CD = BE$,

$\because AB \parallel CD$,

$\therefore$ 四边形 $BCDE$ 为平行四边形;

【小问 2 详解】

解: 由 (1) 得 $DE = BC = 10$,

$\because AD \perp AB$, $AD=8$,

$\therefore AE = \sqrt{DE^2 - AD^2} = 6$.

23. 某村决定种植脐橙和黄金贡柚, 助推村民增收致富, 已知购买 1 棵脐橙树苗和 2 棵黄金贡柚树苗共需 110 元; 购买 2 棵脐橙树苗和 3 棵黄金贡柚树苗共需 190 元.

(1) 求脐橙树苗和黄金贡柚树苗的单价;

(2) 该村计划购买脐橙树苗和黄金贡柚树苗共 1000 棵, 总费用不超过 38000 元, 问最多可以购买脐橙树苗多少棵?

【答案】(1) 50 元、30 元

(2) 400 棵

【解析】

【分析】 本题考查了二元一次方程组的应用、一元一次不等式的应用，解题的关键是：

(1) 设脐橙树苗和黄金贡柚树苗的单价分别为 x 元/棵， y 元/棵，根据“购买 1 棵脐橙树苗和 2 棵黄金贡柚树苗共需 110 元；购买 2 棵脐橙树苗和 3 棵黄金贡柚树苗共需 190 元”列方程组求解即可；

(2) 购买脐橙树苗 a 棵，根据“总费用不超过 38000 元”列不等式求解即可.

【小问 1 详解】

解：设脐橙树苗和黄金贡柚树苗的单价分别为 x 元/棵， y 元/棵，

$$\text{根据题意，得} \begin{cases} x + 2y = 110 \\ 2x + 3y = 190 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 50 \\ y = 30 \end{cases},$$

答：脐橙树苗和黄金贡柚树苗的单价分别为 50 元/棵，30 元/棵；

【小问 2 详解】

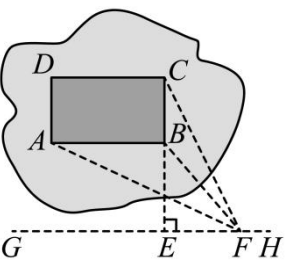
解：设购买脐橙树苗 a 棵，则购买黄金贡柚树苗 $(1000 - a)$ 棵，

根据题意，得 $50a + 30(1000 - a) \leq 38000$ ，

解得 $a \leq 400$ ，

答：最多可以购买脐橙树苗 400 棵.

24. 某数学研究性学习小组在老师的指导下，利用课余时间进行测量活动.

活动主题		测算某水池中雕塑底座的底面积
测量工具		皮尺、测角仪、计算器等
活动过程	模型抽象	某休闲广场的水池中有一雕塑，其底座的底面为矩形 $ABCD$，其示意图如下： 
	测绘过程	①在水池外取一点 E ，使得点 C, B, E 在同一条直线上；

	与数据信息	②过点 E 作 $GH \perp CE$，并沿 EH 方向前进到点 F，用皮尺测得 EF 的长为 4 米； ③在点 F 处用测角仪测得 $\angle CFG = 60.3^\circ$，$\angle BFG = 45^\circ$，$\angle AFG = 21.8^\circ$； ④用计算器计算得：$\sin 60.3^\circ \approx 0.87$，$\cos 60.3^\circ \approx 0.50$，$\tan 60.3^\circ \approx 1.75$，$\sin 21.8^\circ \approx 0.37$，$\cos 21.8^\circ \approx 0.93$，$\tan 21.8^\circ \approx 0.40$。
--	-------	---

请根据表格中提供的信息，解决下列问题（结果保留整数）：

- (1) 求线段 CE 和 BC 的长度；
- (2) 求底座的底面 $ABCD$ 的面积。

【答案】 (1) 7 米；3 米

(2) 18 平方米

【解析】

【分析】 题目主要考查解三角形的应用，理解题意，结合图形求解是解题关键。

(1) 根据题意得 $\tan \angle CFE = \tan 60.3^\circ = \frac{CE}{EF} \approx 1.75$ ，即可确定 CE 长度，再由 $\angle BFG = 45^\circ$ 得出 $BE = EF = 4$ 米，即可求解；

(2) 过点 A 作 $AM \perp GH$ 于点 M ，继续利用正切函数确定 $AB = ME = 6$ 米，即可求解面积。

【小问 1 详解】

解：∵ $GH \perp CE$ ， EF 的长为 4 米， $\angle CFG = 60.3^\circ$ ，

$$\therefore \tan \angle CFE = \tan 60.3^\circ = \frac{CE}{EF} \approx 1.75,$$

$$\therefore CE = 7 \text{ 米};$$

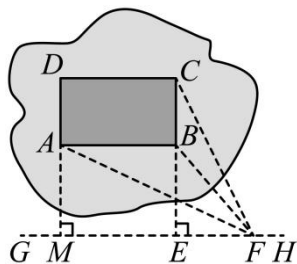
$$\therefore \angle BFG = 45^\circ,$$

$$\therefore BE = EF = 4 \text{ 米},$$

$$\therefore CB = CE - BE = 3 \text{ 米};$$

【小问 2 详解】

过点 A 作 $AM \perp GH$ 于点 M ，如图所示：



$$\because \angle AFG = 21.8^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle AFG = \tan 21.8^\circ = \frac{AM}{MF} \approx 0.4,$$

$$\because AM = BE = 4 \text{ 米},$$

$$\therefore MF = 10 \text{ 米},$$

$$\therefore AB = ME = 10 - 4 = 6 \text{ 米},$$

$$\therefore \text{底座的底面 } ABCD \text{ 的面积为: } 3 \times 6 = 18 \text{ 平方米}.$$

25. 已知二次函数 $y = -x^2 + c$ 的图像经过点 $A(-2, 5)$, 点 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ 是此二次函数的图像上的两个动点.

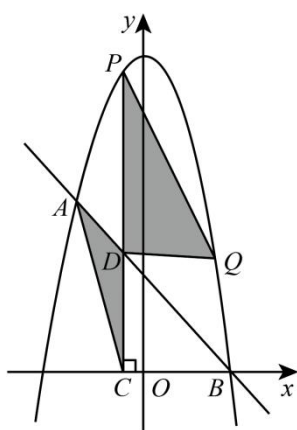


图1

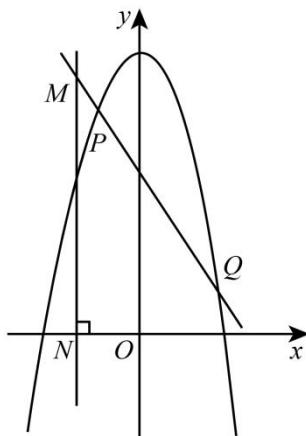


图2

(1) 求此二次函数的表达式;

(2) 如图 1, 此二次函数的图像与 x 轴的正半轴交于点 B , 点 P 在直线 AB 的上方, 过点 P 作 $PC \perp x$ 轴于点 C , 交 AB 于点 D , 连接 AC, DQ, PQ . 若 $x_2 = x_1 + 3$, 求证 $\frac{S_{\triangle PDQ}}{S_{\triangle ADC}}$ 的值为定值;

(3) 如图 2, 点 P 在第二象限, $x_2 = -2x_1$, 若点 M 在直线 PQ 上, 且横坐标为 $x_1 - 1$, 过点 M 作 $MN \perp x$ 轴于点 N , 求线段 MN 长度的最大值.

【答案】(1) $y = -x^2 + 9$

(2) 为定值 3, 证明见解析

$$(3) \frac{37}{4}$$

【解析】

【分析】(1) 用待定系数法求解即可；

(2) 先求出直线 AB 的解析式， $P(x_1, -x_1^2 + 9)$ ，则 $Q(x_1 + 3, -(x_1 + 3)^2 + 9)$ ， $D(x_1, -x_1 + 3)$ ，表示出

$PD = (x + 2)(-x + 3)$ ， $CD = -x_1 + 3$ ，代入 $\frac{S_{\triangle PDQ}}{S_{\triangle ADC}}$ 即可求解；

(3) 设 $P(x_1, -x_1^2 + 9)$ ，则 $Q(-2x_1, -4x_1^2 + 9)$ ，求出直线 PQ 的解析式，把 $x = x_1 - 1$ 代入即可求出线段 MN 长度的最大值.

【小问 1 详解】

$\because$ 二次函数 $y = -x^2 + c$ 的图像经过点 $A(-2, 5)$ ，

$$\therefore 5 = -4 + c,$$

$$\therefore c = 9,$$

$$\therefore y = -x^2 + 9;$$

【小问 2 详解】

当 $y = 0$ 时， $0 = -x^2 + 9$ ，

$$\therefore x_1 = -3, x_2 = 3,$$

$$\therefore B(3, 0),$$

设直线 AB 的解析式为 $y = kx + b$ ，

$$\therefore \begin{cases} -2k + b = 5 \\ 3k + b = 0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k = -1 \\ b = 3 \end{cases},$$

$$\therefore y = -x + 3,$$

设 $P(x_1, -x_1^2 + 9)$ ，则 $Q(x_1 + 3, -(x_1 + 3)^2 + 9)$ ， $D(x_1, -x_1 + 3)$ ，

$$\therefore PD = -x_1^2 + 9 - (-x_1 + 3) = -x_1^2 + x_1 + 6 = (x_1 + 2)(-x_1 + 3), \quad CD = -x_1 + 3.$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle PDQ}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{(x + 2)(-x_1 + 3)(x_1 + 3 - x_1)}{(-x_1 + 3)(x_1 + 2)} = 3,$$

$\therefore \frac{S_{\triangle PDQ}}{S_{\triangle ADC}}$ 的值为定值;

【小问 3 详解】

设 $P(x_1, -x_1^2 + 9)$, 则 $Q(-2x_1, -4x_1^2 + 9)$,

设直线 PQ 的解析式为 $y = mx + n$,

$$\therefore \begin{cases} mx_1 + n = -x_1^2 + 9 \\ -2mx_1 + n = -4x_1^2 + 9 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} m = x_1 \\ n = -2x_1^2 + 9 \end{cases},$$

$$\therefore y = x_1x - 2x_1^2 + 9,$$

当 $x = x_1 - 1$ 时,

$$y = x_1(x_1 - 1) - 2x_1^2 + 9 = -\left(x_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{37}{4},$$

$\therefore$ 当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, 线段 MN 长度的最大值 $\frac{37}{4}$.

【点睛】 本题考查了待定系数法求函数解析式, 二次函数与几何综合, 数形结合是解答本题的关键.

26. 【问题背景】

已知点 A 是半径为 r 的 $\odot O$ 上的定点, 连接 OA , 将线段 OA 绕点 O 按逆时针方向旋转 $\alpha (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$ 得到 OE , 连接 AE , 过点 A 作 $\odot O$ 的切线 l , 在直线 l 上取点 C , 使得 $\angle CAE$ 为锐角.

【初步感知】

(1) 如图 1, 当 $\alpha = 60^\circ$ 时, $\angle CAE = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$;

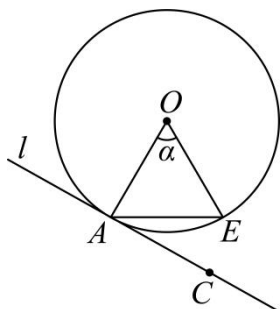


图1

【问题探究】

(2) 以线段 AC 为对角线作矩形 $ABCD$, 使得边 AD 过点 E , 连接 CE , 对角线 AC , BD 相交于点 F .

①如图 2, 当 $AC = 2r$ 时, 求证: 无论 α 在给定的范围内如何变化, $BC = CD + ED$ 总成立:

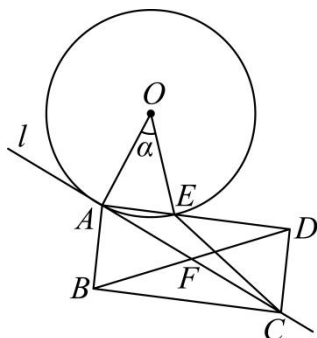


图2

②如图3, 当 $AC = \frac{4}{3}r$, $\frac{CE}{OE} = \frac{2}{3}$ 时, 请补全图形, 并求 $\tan \alpha$ 及 $\frac{AB}{BC}$ 的值.

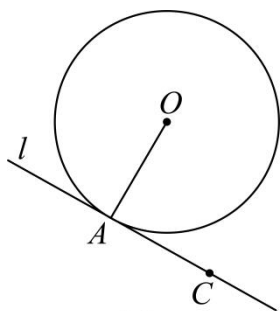


图3

【答案】(1) 30° ; ①证明见解析; ②补全图形见解析, $\frac{4}{3}$, $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】(1) 可证 $\triangle OEA$ 是等边三角形, 则 $\angle OAE = 60^\circ$, 由直线 l 是 $\odot O$ 的切线, 得到 $\angle OAC = 90^\circ$, 故 $\angle CAE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$;

(2) ①根据矩形的性质与切线的性质证明 $\triangle OAE \cong \triangle FCD$, 则 $AE = CD$, 而 $BC = AD$, 由 $AD = AE + DE$, 得到 $BC = CD + DE$;

②过点 O 作 $OG \perp AE$ 于点 G , $AH \perp OE$ 于点 H , 在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中, 先证明点 E 在线段 OC 上,

$\tan \alpha = \frac{AC}{AO} = \frac{4}{3}$, 由等腰三角形的性质得 $\angle EOG = \frac{1}{2}\alpha$, 根据互余关系可得 $\angle EAH = \angle EOG = \frac{1}{2}\alpha$, 可

求 $\tan \alpha = \frac{AH}{OH} = \frac{4}{3}$, 解 $\triangle OAE$, 求得 $\tan \angle EAH = \frac{1}{2}$, 可证明 $\angle ACB = \frac{1}{2}\alpha$, 故在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,

$$\tan \angle ACB = \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}.$$

【详解】解: (1) 由题意得 $\angle AOE = \alpha = 60^\circ$,

$\because OA = OE$,

$\therefore \triangle OEA$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle OAE = 60^\circ,$$

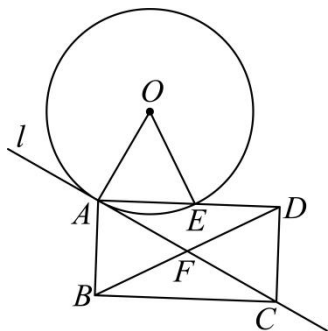
$\because$ 直线 l 是 $\odot O$ 的切线,

$$\therefore \angle OAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

故答案为: 30° ;

(2) ①如图:



$$\because OA = OE,$$

$$\therefore \angle OAE = \angle OEA,$$

$$\because \angle AOE = \alpha,$$

$$\therefore \angle OAE + \angle OEA + \alpha = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle OAE = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha,$$

$$\because \angle OAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC = \frac{1}{2}\alpha,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore FA = DF, \quad CF = DF = \frac{1}{2}AC = r,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle FDA = \frac{1}{2}\alpha,$$

$$\therefore \angle DFC = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha = \alpha,$$

$$\because OA = OE = r,$$

$$\therefore OA = FC, OE = FD,$$

$$\because \angle AOE = \angle DFC,$$

$$\therefore \triangle OAE \cong \triangle FCD,$$

$$\therefore AE = CD,$$

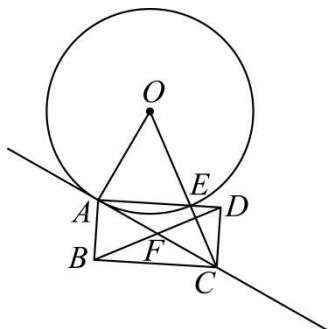
$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore BC = AD,$$

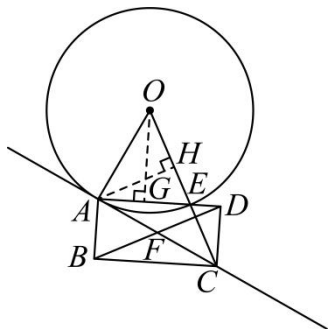
$$\therefore AD = AE + DE,$$

$$\therefore BC = CD + DE ;$$

②补全图形如图:



过点 O 作 $OG \perp AE$ 于点 G , $AH \perp OE$ 于点 H ,



在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中, $OA=r, AC=\frac{4}{3}r$,

∴由勾股定理得 $OC = \frac{5}{3}r$,

$$\therefore \frac{CE}{OE} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore CE = \frac{2}{3}r,$$

$$\therefore OC = OE + CE,$$

∴点 E 在线段 OC 上,

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ACO, \tan \alpha = \frac{AC}{AO} = \frac{4}{3},$$

$$\because OG \perp AE, \quad OA = OE,$$

$$\therefore \angle EOG = \frac{1}{2}a,$$

$$\therefore AH \perp OE,$$

$$\therefore \angle EOG + \angle OEA = \angle EAH + \angle OEA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAH = \angle EOG = \frac{1}{2}a,$$

$$\text{在 Rt}\triangle OAH \text{ 中, } \tan a = \frac{AH}{OH} = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \text{设 } AH = 4m, OH = 3m,$$

$$\therefore \text{由勾股定理得 } OA = OE = 5m,$$

$$\therefore HE = 5m - 3m = 2m,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle AHE \text{ 中, } \tan \angle EAH = \tan \frac{a}{2} = \frac{HE}{AH} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{四边形 } ABCD \text{ 是矩形,}$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle DAC = \frac{1}{2}a,$$

$$\text{而 } \angle EAH = \frac{1}{2}a,$$

$$\therefore \angle ACB = \frac{1}{2}a,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ABC \text{ 中, } \tan \angle ACB = \tan \frac{a}{2} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}.$$

【点睛】 本题考查了圆的切线的性质，等腰三角形的性质，全等三角形的判定与性质，矩形的性质，解直角三角形，勾股定理，熟练掌握知识点，正确添加辅助线是解决本题的关键.