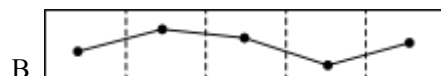
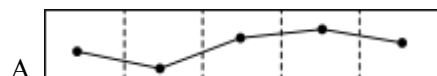


2024 年河北省初中毕业生升学文化课考试

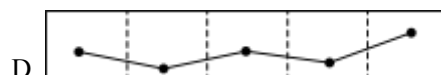
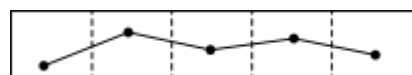
数学试卷

一、选择题（本大题共 16 个小题，共 38 分．1~6 小题各 3 分，7~16 小题各 2 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 如图显示了某地连续 5 天的日最低气温，则能表示这 5 天日最低气温变化情况的是（ ）



C.



【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了正负数的大小比较，熟练掌握正负数大小比较的方法解题的关键．

由五日气温为 -2°C , -4°C , 0°C , 1°C , -1°C 得到 $-2 > -4$, $-4 < 0 < 1$, $1 > -1$, 则气温变化为先下降，然后上升，再上升，再下降．

【详解】解：由五日气温为 -2°C , -4°C , 0°C , 1°C , -1°C 得到 $-2 > -4$, $-4 < 0 < 1$, $1 > -1$
 $\therefore$ 气温变化为先下降，然后上升，再上升，再下降．

故选：A．

2. 下列运算正确的是（ ）

A. $a^7 - a^3 = a^4$

B. $3a^2 \cdot 2a^2 = 6a^2$

C. $(-2a)^3 = -8a^3$

D. $a^4 \div a^4 = a$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查整式的运算，根据合并同类项，单项式乘以单项式，积的乘方，同底数幂的除法依次对各选项逐一分析判断即可．解题的关键是掌握整式运算的相关法则．

【详解】解：A. a^7 , a^4 不是同类项，不能合并，故此选项不符合题意；

B. $3a^2 \cdot 2a^2 = 6a^4$, 故此选项不符合题意；

C. $(-2a)^3 = -8a^3$, 故此选项符合题意；

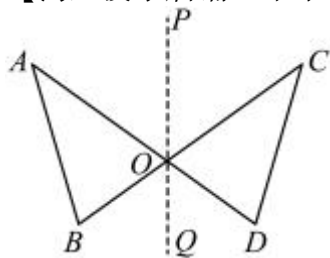
D. $a^4 \div a^4 = 1$, 故此选项不符合题意．

故选：C．

3. 如图， AD 与 BC 交于点 O , $\triangle ABO$ 和 $\triangle CDO$ 关于直线 PQ 对称，点 A , B 的对称点分别是点 C ,

D. 下列不一定正确的是（ ）

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】



- A. $AD \perp BC$ B. $AC \perp PQ$ C. $\triangle ABO \cong \triangle CDO$ D. $AC \parallel BD$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了轴对称图形的性质，平行线的判定，熟练掌握知识点是解题的关键。

根据轴对称图形的性质即可判断 B、C 选项，再根据垂直于同一条直线的两条直线平行即可判断选项 D。

【详解】解：由轴对称图形的性质得到 $\triangle ABO \cong \triangle CDO$ ， $AC \perp PQ, BD \perp PQ$ ，
 $\therefore AC \parallel BD$ ，

$\therefore$ B、C、D 选项不符合题意，

故选：A。

4. 下列数中，能使不等式 $5x-1 < 6$ 成立的 x 的值为（ ）

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了解不等式，不等式的解，熟练掌握解不等式是解题的关键。解不等式，得到 $x < \frac{7}{5}$ ，
 以此判断即可。

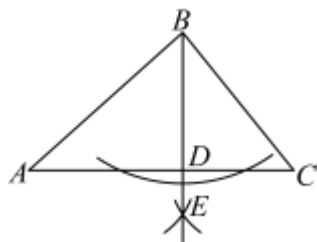
【详解】解： $\because 5x-1 < 6$ ，

$$\therefore x < \frac{7}{5}.$$

$\therefore$ 符合题意的是 A

故选 A。

5. 观察图中尺规作图的痕迹，可得线段 BD 一定是 $\triangle ABC$ 的（ ）



- A. 角平分线 B. 高线 C. 中位线 D. 中线

【答案】B

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

【解析】

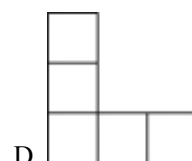
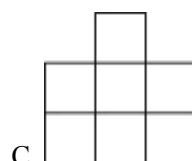
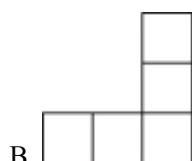
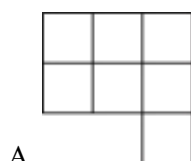
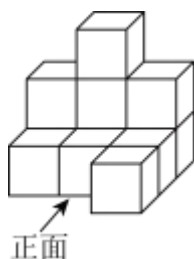
【分析】 本题考查的是三角形的高的定义，作线段的垂线，根据作图痕迹可得 $BD \perp AC$ ，从而可得答案.

【详解】 解：由作图可得： $BD \perp AC$ ，

$\therefore$ 线段 BD 一定是 $\triangle ABC$ 的高线；

故选 B

6. 如图是由 11 个大小相同的正方体搭成的几何体，它的左视图是（ ）



【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查简单组合体的三视图，左视图每一列的小正方体个数，由该方向上的小正方体个数最多的那个来确定，通过观察即可得出结论. 掌握几何体三种视图之间的关系是解题的关键.

【详解】 解：通过左边看可以确定出左视图一共有 3 列，每列上小正方体个数从左往右分别为 3、1、1.

故选： D.

7. 节能环保已成为人们的共识. 淇淇家计划购买 500 度电，若平均每天用电 x 度，则能使用 y 天. 下列说法错误的是（ ）

A. 若 $x = 5$ ，则 $y = 100$

B. 若 $y = 125$ ，则 $x = 4$

C. 若 x 减小，则 y 也减小

D. 若 x 减小一半，则 y 增大一倍

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查的是反比例函数的实际应用，先确定反比例函数的解析式，再逐一分析判断即可.

【详解】 解： $\because$ 淇淇家计划购买 500 度电，平均每天用电 x 度，能使用 y 天.

$$\therefore xy = 500,$$

$$\therefore y = \frac{500}{x},$$

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

当 $x=5$ 时, $y=100$, 故 A 不符合题意;

当 $y=125$ 时, $x=\frac{500}{125}=4$, 故 B 不符合题意;

$\therefore x>0, y>0$,

$\therefore$ 当 x 减小, 则 y 增大, 故 C 符合题意;

若 x 减小一半, 则 y 增大一倍, 表述正确, 故 D 不符合题意;

故选: C.

8. 若 a, b 是正整数, 且满足 $\underbrace{2^a + 2^a + \cdots + 2^a}_{8 \text{ 个 } 2^a \text{ 相加}} = \underbrace{2^b \times 2^b \times \cdots \times 2^b}_{8 \text{ 个 } 2^b \text{ 相乘}}$, 则 a 与 b 的关系正确的是 ()

A. $a+3=8b$

B. $3a=8b$

C. $a+3=b^8$

D. $3a=8+b$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了同底数幂的乘法, 幂的乘方的运算的应用, 熟练掌握知识点是解题的关键.

由题意得: $8 \times 2^a = (2^b)^8$, 利用同底数幂的乘法, 幂的乘方化简即可.

【详解】解: 由题意得: $8 \times 2^a = (2^b)^8$,

$\therefore 2^3 \times 2^a = 2^{8b}$,

$\therefore 3+a=8b$,

故选: A.

9. 淇淇在计算正数 a 的平方时, 误算成 a 与 2 的积, 求得的答案比正确答案小 1, 则 $a =$ ()

A. 1

B. $\sqrt{2}-1$

C. $\sqrt{2}+1$

D. 1 或 $\sqrt{2}+1$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的应用, 解一元二次方程, 熟练掌握知识点是解题的关键.

由题意得方程 $2a+1=a^2$, 利用公式法求解即可.

【详解】解: 由题意得: $2a+1=a^2$,

解得: $x=1+\sqrt{2}$ 或 $x=1-\sqrt{2}$ (舍)

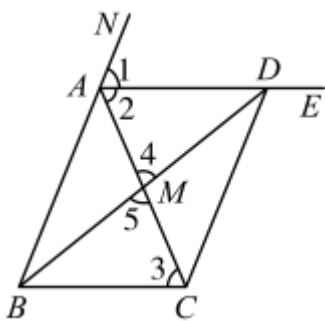
故选: C.

10. 下面是嘉嘉作业本上的一道习题及解答过程:

已知: 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, AE 平分 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle CAN$, 点 M 是 AC 的中点, 连接 BM 并延长交 AE 于点 D , 连接 CD .

求证: 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

证明：∵ $AB = AC$ ，∴ $\angle ABC = \angle 3$.
 ∴ $\angle CAN = \angle ABC + \angle 3$ ， $\angle CAN = \angle 1 + \angle 2$ ， $\angle 1 = \angle 2$ ，
 ∴ ①_____ .
 又∵ $\angle 4 = \angle 5$ ， $MA = MC$ ，
 ∴ $\triangle MAD \cong \triangle MCB$ (②_____) .
 ∴ $MD = MB$. ∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.



若以上解答过程正确，①，②应分别为（ ）

- A. $\angle 1 = \angle 3$ ，AAS
 B. $\angle 1 = \angle 3$ ，ASA
 C. $\angle 2 = \angle 3$ ，AAS
 D. $\angle 2 = \angle 3$ ，ASA

【答案】D

【解析】

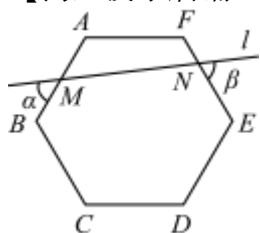
【分析】本题考查平行四边形的判定，全等三角形的判定与性质，根据等边对等角得 $\angle ABC = \angle 3$ ，根据三角形外角的性质及角平分线的定义可得 $\angle 2 = \angle 3$ ，证明 $\triangle MAD \cong \triangle MCB$ ，得到 $MD = MB$ ，再结合中点的定义得出 $MA = MC$ ，即可得证. 解题的关键是掌握：对角线互相平分的四边形是平行四边形.

【详解】证明：∵ $AB = AC$ ，∴ $\angle ABC = \angle 3$.
 ∴ $\angle CAN = \angle ABC + \angle 3$ ， $\angle CAN = \angle 1 + \angle 2$ ， $\angle 1 = \angle 2$ ，
 ∴ ① $\angle 2 = \angle 3$.
 又∵ $\angle 4 = \angle 5$ ， $MA = MC$ ，
 ∴ $\triangle MAD \cong \triangle MCB$ (② ASA) .
 ∴ $MD = MB$. ∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

故选：D.

11. 直线 l 与正六边形 $ABCDEF$ 的边 AB, EF 分别相交于点 M, N ，如图所示，则 $\alpha + \beta =$ ()

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】



- A. 115° B. 120° C. 135° D. 144°

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了多边形的内角和，正多边形的每个内角，邻补角，熟练掌握知识点是解决本题的关键.

先求出正六边形的每个内角为 120° ，再根据六边形 $MBCDEN$ 的内角和为 720° 即可求解 $\angle ENM + \angle NMB$ 的度数，最后根据邻补角的意义即可求解.

【详解】解：正六边形每个内角为：
$$\frac{(6-2) \times 180^\circ}{6} = 120^\circ,$$

而六边形 $MBCDEN$ 的内角和也为 $(6-2) \times 180^\circ = 720^\circ$,

$$\therefore \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle ENM + \angle NMB = 720^\circ,$$

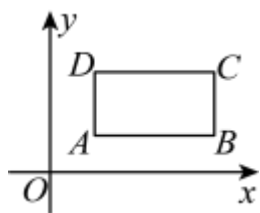
$$\therefore \angle ENM + \angle NMB = 720^\circ - 4 \times 120^\circ = 240^\circ,$$

$$\therefore \beta + \angle ENM + \alpha + \angle NMB = 180^\circ \times 2 = 360^\circ,$$

$$\therefore \alpha + \beta = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ,$$

故选：B.

12. 在平面直角坐标系中，我们把一个点的纵坐标与横坐标的比值称为该点的“特征值”. 如图，矩形 $ABCD$ 位于第一象限，其四条边分别与坐标轴平行，则该矩形四个顶点中“特征值”最小的是 ()



- A. 点 A B. 点 B C. 点 C D. 点 D

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查的是矩形的性质，坐标与图形，分式的值的大小比较，设 $A(a, b)$ ， $AB = m$ ，

$AD = n$ ，可得 $D(a, b+n)$ ， $B(a+m, b)$ ， $C(a+m, b+n)$ ，再结合新定义与分式的值的大小比较即可得到答案.

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

【详解】解：设 $A(a, b)$ ， $AB = m$ ， $AD = n$ ，

$\therefore$ 矩形 $ABCD$ ，

$\therefore AD = BC = n$ ， $AB = CD = m$ ，

$\therefore D(a, b+n)$ ， $B(a+m, b)$ ， $C(a+m, b+n)$ ，

$\therefore \frac{b}{a+m} < \frac{b}{a} < \frac{b+n}{a}$ ，而 $\frac{b}{a+m} < \frac{b+n}{a+m}$ ，

$\therefore$ 该矩形四个顶点中“特征值”最小的是点 B ；

故选：B.

13. 已知 A 为整式，若计算 $\frac{A}{xy+y^2} - \frac{y}{x^2+xy}$ 的结果为 $\frac{x-y}{xy}$ ，则 $A =$ ()

A. x

B. y

C. $x+y$

D. $x-y$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了分式的加减运算，分式的通分，平方差公式，熟练掌握分式的加减运算法则是解题的关键.

由题意得 $\frac{y}{x^2+xy} + \frac{x-y}{xy} = \frac{A}{xy+y^2}$ ，对 $\frac{y}{x^2+xy} + \frac{x-y}{xy}$ 进行通分化简即可.

【详解】解： $\therefore \frac{A}{xy+y^2} - \frac{y}{x^2+xy}$ 的结果为 $\frac{x-y}{xy}$ ，

$$\therefore \frac{y}{x^2+xy} + \frac{x-y}{xy} = \frac{A}{xy+y^2},$$

$$\therefore \frac{y^2}{xy(x+y)} + \frac{(x-y)(x+y)}{xy(x+y)} = \frac{x^2}{xy(x+y)} = \frac{x}{xy+y^2} = \frac{A}{xy+y^2},$$

$$\therefore A = x,$$

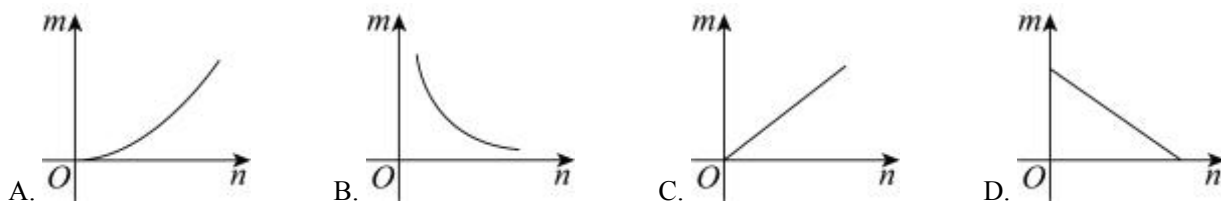
故选：A.

14. 扇文化是中华优秀传统文化的组成部分，在我国有着深厚的底蕴. 如图，某折扇张开的角度为 120°

时，扇面面积为 S 、该折扇张开的角度为 n° 时，扇面面积为 S_n ，若 $m = \frac{S_n}{S}$ ，则 m 与 n 关系的图象大致是 ()



【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】



【答案】C

【解析】

【分析】本题考查正比例函数的应用，扇形的面积，设该扇面所在圆的半径为 R ，根据扇形的面积公式表示出 $\pi R^2 = 3S$ ，进一步得出 $S_n = \frac{n\pi R^2}{360} = \frac{nS}{120}$ ，再代入 $m = \frac{S_n}{S}$ 即可得出结论。掌握扇形的面积公式是解题的关键。

【详解】解：设该扇面所在圆的半径为 R ，

$$S = \frac{120\pi R^2}{360} = \frac{\pi R^2}{3},$$

$$\therefore \pi R^2 = 3S,$$

$\therefore$ 该折扇张开的角度为 n° 时，扇面面积为 S_n ，

$$S_n = \frac{n\pi R^2}{360} = \frac{n}{360} \times \pi R^2 = \frac{n}{360} \times 3S = \frac{nS}{120},$$

$$\therefore m = \frac{S_n}{S} = \frac{\frac{nS}{120}}{S} = \frac{n}{120} = \frac{1}{120}n,$$

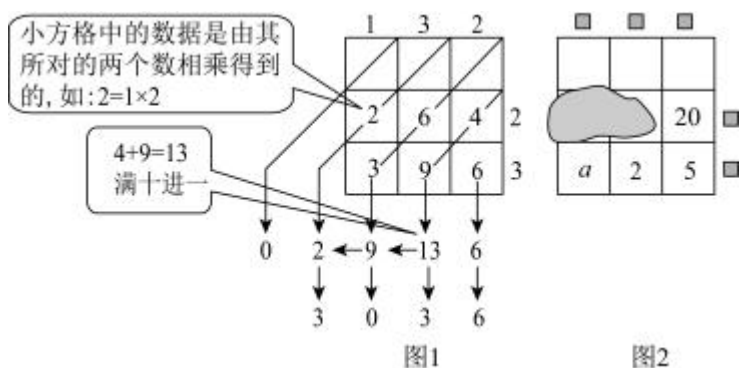
$\therefore m$ 是 n 的正比例函数，

$$\therefore n \geq 0,$$

$\therefore$ 它的图像是过原点的一条射线。

故选：C。

15. “铺地锦”是我国古代一种乘法运算方法，可将多位数乘法运算转化为一位数乘法和简单的加法运算。淇淇受其启发，设计了如图 1 所示的“表格算法”，图 1 表示 132×23 ，运算结果为 3036。图 2 表示一个三位数与一个两位数相乘，表格中部分数据被墨迹覆盖，根据图 2 中现有数据进行推断，正确的是（ ）



【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

A. “20”左边的数是 16

B. “20”右边的“□”表示 5

C. 运算结果小于 6000

D. 运算结果可以表示为 $4100a + 1025$

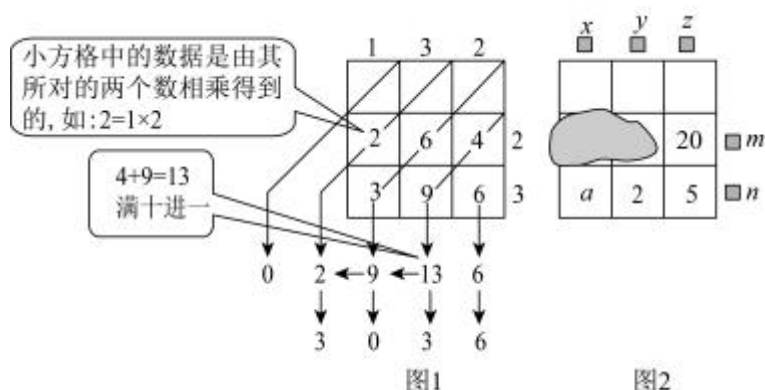
【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了整式的加法运算，整式的乘法运算，理解题意，正确的逻辑推理时解决本题的关键.

设一个三位数与一个两位数分别为 $100x+10y+z$ 和 $10m+n$ ，则 $mz=20, nz=5, ny=2, nx=a$ ，即 $m=4n$ ，可确定 $n=1, y=2$ 时，则 $m=4, z=5, x=a$ ，由题意可判断 A、B 选项，根据题意可得运算结果可以表示为： $1000(4a+1)+100a+25=4100a+1025$ ，故可判断 C、D 选项.

【详解】解：设一个三位数与一个两位数分别为 $100x+10y+z$ 和 $10m+n$ 如图：



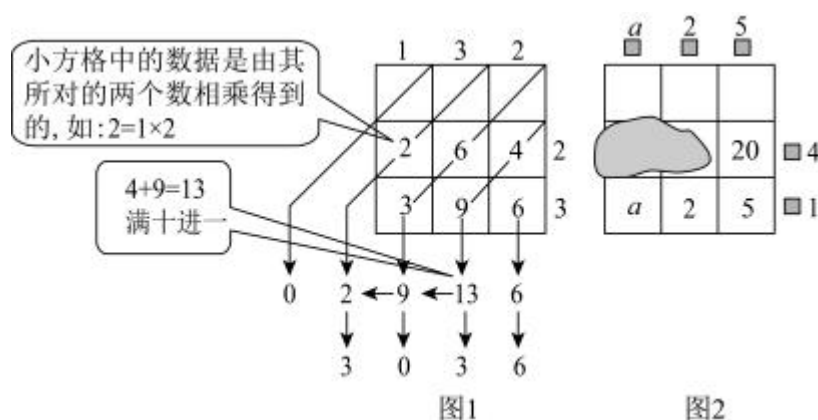
则由题意得：

$$mz=20, nz=5, ny=2, nx=a,$$

$$\therefore \frac{mz}{nz}=4, \text{ 即 } m=4n,$$

$\therefore$ 当 $n=2, y=1$ 时， $z=2.5$ 不是正整数，不符合题意，故舍；

当 $n=1, y=2$ 时，则 $m=4, z=5, x=a$ ，如图：

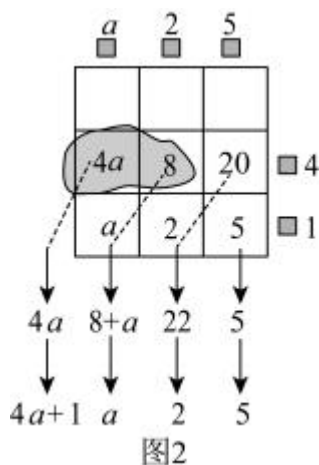


$\therefore$ A、“20”左边的数是 $2 \times 4 = 8$ ，故本选项不符合题意；

B、“20”右边的“□”表示 4，故本选项不符合题意；

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

∴ a 上面的数应为 $4a$ ，如图：



∴ 运算结果可以表示为： $1000(4a+1)+100a+25=4100a+1025$ ，

∴ D 选项符合题意，

当 $a=2$ 时，计算的结果大于 6000，故 C 选项不符合题意，

故选：D.

16. 平面直角坐标系中，我们把横、纵坐标都是整数，且横、纵坐标之和大于 0 的点称为“和点”. 将某“和点”平移，每次平移的方向取决于该点横、纵坐标之和除以 3 所得的余数（当余数为 0 时，向右平移；当余数为 1 时，向上平移；当余数为 2 时，向左平移），每次平移 1 个单位长度.

例：“和点” $P(2,1)$ 按上述规则连续平移 3 次后，到达点 $P_3(2,2)$ ，其平移过程如下：

$P(2,1) \xrightarrow[\text{余0}]{\text{右}} P_1(3,1) \xrightarrow[\text{余1}]{\text{上}} P_2(3,2) \xrightarrow[\text{余2}]{\text{左}} P_3(2,2)$

若“和点” Q 按上述规则连续平移 16 次后，到达点 $Q_{16}(-1,9)$ ，则点 Q 的坐标为 ()

- A. $(6,1)$ 或 $(7,1)$ B. $(15,-7)$ 或 $(8,0)$ C. $(6,0)$ 或 $(8,0)$ D. $(5,1)$ 或 $(7,1)$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了坐标内点的平移运动，熟练掌握知识点，利用反向运动理解是解决本题的关键.

先找出规律若“和点”横、纵坐标之和除以 3 所得的余数为 0 时，先向右平移 1 个单位，之后按照向上、向左，向上、向左不断重复的规律平移，按照 Q_{16} 的反向运动理解去分类讨论：① Q_{16} 先向右 1 个单位，不符合题意；② Q_{16} 先向下 1 个单位，再向右平移，当平移到第 15 次时，共计向下平移了 8 次，向右平移了 7 次，此时坐标为 $(6,1)$ ，那么最后一次若向右平移则为 $(7,1)$ ，若向左平移则为 $(5,1)$.

【详解】解：由点 $P_3(2,2)$ 可知横、纵坐标之和除以 3 所得的余数为 1，继而向上平移 1 个单位得到 $P_4(2,3)$ ，此时横、纵坐标之和除以 3 所得的余数为 2，继而向左平移 1 个单位得到 $P_4(1,3)$ ，此时横、

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

纵坐标之和除以 3 所得的余数为 1，又要向上平移 1 个单位……，因此发现规律为若“和点”横、纵坐标之和除以 3 所得的余数为 0 时，先向右平移 1 个单位，之后按照向上、向左，向上、向左不断重复的规律平移，

若“和点” Q 按上述规则连续平移 16 次后，到达点 $Q_{16}(-1,9)$ ，则按照“和点” Q_{16} 反向运动 16 次求点 Q 坐标理解，可以分为两种情况：

① Q_{16} 先向右 1 个单位得到 $Q_{15}(0,9)$ ，此时横、纵坐标之和除以 3 所得的余数为 0，应该是 Q_{15} 向右平移 1 个单位得到 Q_{16} ，故矛盾，不成立；

② Q_{16} 先向下 1 个单位得到 $Q_{15}(-1,8)$ ，此时横、纵坐标之和除以 3 所得的余数为 1，则应该向上平移 1 个单位得到 Q_{16} ，故符合题意，那么点 Q_{16} 先向下平移，再向右平移，当平移第 15 次时，共计向下平移了 8 次，向右平移了 7 次，此时坐标为 $(-1+7,9-8)$ ，即 $(6,1)$ ，那么最后一次若向右平移则为 $(7,1)$ ，若向左平移则为 $(5,1)$ ，

故选：D.

二、填空题（本大题共 3 个小题，共 10 分. 17 小题 2 分，18~19 小题各 4 分，每空 2 分）

17. 某校生物小组的 9 名同学各用 100 粒种子做发芽实验，几天后观察并记录种子的发芽数分别为：89, 73, 90, 86, 75, 86, 89, 95, 89，以上数据的众数为_____.

【答案】89

【解析】

【分析】本题考查了众数，众数是一组数据中次数出现最多的数.

根据众数的定义求解即可判断.

【详解】解：几天后观察并记录种子的发芽数分别为：89, 73, 90, 86, 75, 86, 89, 95, 89,

$\because$ 89 出现的次数最多，

$\therefore$ 以上数据的众数为 89.

故答案为：89.

18. 已知 a, b, n 均为正整数.

(1) 若 $n < \sqrt{10} < n+1$ ，则 $n =$ _____；

(2) 若 $n-1 < \sqrt{a} < n, n < \sqrt{b} < n+1$ ，则满足条件的 a 的个数总比 b 的个数少 _____ 个.

【答案】 ①. 3 ②. 2

【解析】

【分析】本题考查的是无理数的估算以及规律探究问题，掌握探究的方法是解本题的关键；

(1) 由 $3 < \sqrt{10} < 4$ 即可得到答案；

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

(2) 由 $n-1$, n , $n+1$ 为连续的三个自然数, $n-1 < \sqrt{a} < n, n < \sqrt{b} < n+1$, 可得 $\sqrt{(n-1)^2} < \sqrt{a} < \sqrt{n^2}$, $\sqrt{n^2} < \sqrt{b} < \sqrt{(n+1)^2}$, 再利用完全平方数之间的数据个数的特点探究规律即可得到答案.

【详解】解: (1) $\because 3 < \sqrt{10} < 4$, 而 $n < \sqrt{10} < n+1$,
 $\therefore n = 3$;

故答案为: 3;

(2) $\because a, b, n$ 均为正整数.

$\therefore n-1, n, n+1$ 为连续的三个自然数, 而 $n-1 < \sqrt{a} < n, n < \sqrt{b} < n+1$,

$\therefore \sqrt{(n-1)^2} < \sqrt{a} < \sqrt{n^2}$, $\sqrt{n^2} < \sqrt{b} < \sqrt{(n+1)^2}$,

观察 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots$,

而 $0^2 = 0, 1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9, 4^2 = 16$,

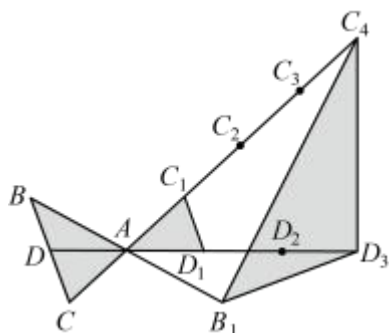
$\therefore (n-1)^2$ 与 n^2 之间的整数有 $(2n-2)$ 个,

n^2 与 $(n+1)^2$ 之间的整数有 $2n$ 个,

$\therefore$ 满足条件的 a 的个数总比 b 的个数少 $2n - (2n-2) = 2n - 2n + 2 = 2$ (个),

故答案为: 2.

19. 如图, $\triangle ABC$ 的面积为 2, AD 为 BC 边上的中线, 点 A, C_1, C_2, C_3 是线段 CC_4 的五等分点, 点 A, D_1, D_2 是线段 DD_3 的四等分点, 点 A 是线段 BB_1 的中点.



(1) $\triangle AC_1D_1$ 的面积为_____;

(2) $\triangle B_1C_4D_3$ 的面积为_____.

【答案】 ①. 1 ②. 7

【解析】

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = 1$$

【分析】(1) 根据三角形中线的性质得

$\triangle AC_1D_1 \cong \triangle ACD$ (SAS), 根据全等三角形的性质可得结论;

(2) 证明 $\triangle AB_1D_1 \cong \triangle ABD$ (SAS), 得 $S_{\triangle AB_1D_1} = S_{\triangle ABD} = 1$, 推出 C_1 、 D_1 、 B_1 三点共线, 得

$S_{\triangle AB_1C_1} = S_{\triangle AB_1D_1} + S_{\triangle AC_1D_1} = 2$, 继而得出 $S_{\triangle AB_1C_4} = 4S_{\triangle AB_1C_1} = 8$, $S_{\triangle AB_1D_3} = 3S_{\triangle AB_1D_1} = 3$, 证明

$\triangle C_3AD_3 \sim \triangle CAD$, 得 $S_{\triangle C_3AD_3} = 9S_{\triangle CAD} = 9$, 推出 $S_{\triangle AC_4D_3} = \frac{4}{3} S_{\triangle C_3AD_3} = 12$, 最后代入

$S_{\triangle B_1C_4D_3} = S_{\triangle AC_4D_3} + S_{\triangle AB_1D_3} - S_{\triangle AB_1C_4}$ 即可.

【详解】解: (1) 连接 B_1D_1 、 B_1D_2 、 B_1C_2 、 B_1C_3 、 C_3D_3 ,

$\therefore \triangle ABC$ 的面积为 2, AD 为 BC 边上的中线,

$$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

$\therefore$ 点 A , C_1 , C_2 , C_3 是线段 CC_4 的五等分点,

$$AC = AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = \frac{1}{5} CC_4$$

$\therefore$ 点 A , D_1 , D_2 是线段 DD_3 的四等分点,

$$AD = AD_1 = D_1D_2 = D_2D_3 = \frac{1}{4} DD_3$$

$\therefore$ 点 A 是线段 BB_1 的中点,

$$AB = AB_1 = \frac{1}{2} BB_1$$

在 $\triangle AC_1D_1$ 和 $\triangle ACD$ 中,

$$\begin{cases} AC_1 = AC \\ \angle C_1AD_1 = \angle CAD \\ AD_1 = AD \end{cases}$$

$\therefore \triangle AC_1D_1 \cong \triangle ACD$ (SAS),

$$S_{\triangle AC_1D_1} = S_{\triangle ACD} = 1, \quad \angle C_1D_1A = \angle CDA$$

$\therefore \triangle AC_1D_1$ 的面积为 1,

故答案为: 1;

(2) 在 $\triangle AB_1D_1$ 和 $\triangle ABD$ 中,

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$$\begin{cases} AB_1 = AB \\ \angle B_1AD_1 = \angle BAD \\ AD_1 = AD \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AB_1D_1 \cong \triangle ABD (\text{SAS}),$$

$$\therefore S_{\triangle AB_1D_1} = S_{\triangle ABD} = 1, \quad \angle B_1D_1A = \angle BDA,$$

$$\therefore \angle BDA + \angle CDA = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle B_1D_1A + \angle C_1D_1A = 180^\circ,$$

$$\therefore C_1, D_1, B_1 \text{ 三点共线},$$

$$\therefore S_{\triangle AB_1C_1} = S_{\triangle AB_1D_1} + S_{\triangle AC_1D_1} = 1 + 1 = 2,$$

$$\therefore AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4,$$

$$\therefore S_{\triangle AB_1C_4} = 4S_{\triangle AB_1C_1} = 4 \times 2 = 8,$$

$$\therefore AD_1 = D_1D_2 = D_2D_3, \quad S_{\triangle AB_1D_1} = 1,$$

$$\therefore S_{\triangle AB_1D_3} = 3S_{\triangle AB_1D_1} = 3 \times 1 = 3,$$

在 $\triangle AC_3D_3$ 和 $\triangle ACD$ 中,

$$\therefore \frac{AC_3}{AC} = 3 = \frac{AD_3}{AD}, \quad \angle C_3AD_3 = \angle CAD,$$

$$\therefore \triangle C_3AD_3 \sim \triangle CAD,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle C_3AD_3}}{S_{\triangle CAD}} = \left(\frac{AC_3}{AC} \right)^2 = 3^2 = 9,$$

$$\therefore S_{\triangle C_3AD_3} = 9S_{\triangle CAD} = 9 \times 1 = 9,$$

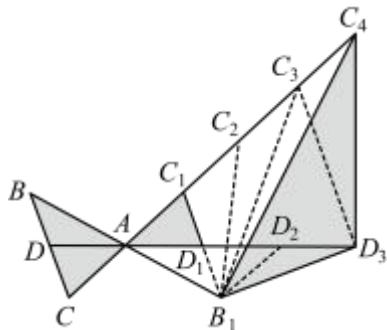
$$\therefore AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4,$$

$$\therefore S_{\triangle AC_4D_3} = \frac{4}{3}S_{\triangle C_3AD_3} = \frac{4}{3} \times 9 = 12,$$

$$\therefore S_{\triangle B_1C_4D_3} = S_{\triangle AC_4D_3} + S_{\triangle AB_1D_3} - S_{\triangle AB_1C_4} = 12 + 3 - 8 = 7,$$

$$\therefore \triangle B_1C_4D_3 \text{ 的面积为 } 7,$$

故答案为: 7.



【点睛】本题考查三角形中线的性质，全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，等分点的意义，三角形的面积。掌握三角形中线的性质是解题的关键。

三、解答题（本大题共 7 个小题，共 72 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

20. 如图，有甲、乙两条数轴。甲数轴上的三点 A, B, C 所对应的数依次为 $-4, 2, 32$ ，乙数轴上的三点 D, E, F 所对应的数依次为 $0, x, 12$ 。



$$\frac{AB}{AC}$$

(1) 计算 A, B, C 三点所对应的数的和，并求 $\frac{AB}{AC}$ 的值；

(2) 当点 A 与点 D 上下对齐时，点 B, C 恰好分别与点 E, F 上下对齐，求 x 的值。

【答案】 (1) $30, \frac{1}{6}$

(2) $x = 2$

【解析】

【分析】本题考查的是数轴上两点之间的距离的含义，一元一次方程的应用，理解题意是解本题的关键；

(1) 直接列式求解三个数的和即可，再分别计算 AB, AC ，从而可得答案；

(2) 由题意可得，对应线段是成比例的，再建立方程求解即可。

【小问 1 详解】

解：∵ 甲数轴上的三点 A, B, C 所对应的数依次为 $-4, 2, 32$ ，

$$\therefore -4 + 2 + 32 = 30, \quad AB = 2 - (-4) = 2 + 4 = 6, \quad AC = 32 - (-4) = 32 + 4 = 36,$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6};$$

【小问 2 详解】

解：∵ 点 A 与点 D 上下对齐时，点 B, C 恰好分别与点 E, F 上下对齐，

$$\therefore \frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC},$$

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$$\frac{x}{6} = \frac{12}{36},$$

解得： $x = 2$ ；

21. 甲、乙、丙三张卡片正面分别写有 $a+b, 2a+b, a-b$ ，除正面的代数式不同外，其余均相同.

第一次 第二次和	$a+b$	$2a+b$	$a-b$
$a+b$	$2a+2b$		$2a$
$2a+b$			
$a-b$	$2a$		

(1) 将三张卡片背面向上并洗匀，从中随机抽取一张，当 $a=1, b=-2$ 时，求取出的卡片上代数式的值为负数的概率；

(2) 将三张卡片背面向上并洗匀，从中随机抽取一张，放回后重新洗匀，再随机抽取一张. 请在表格中补全两次取出的卡片上代数式之和的所有可能结果（化为最简），并求出和为单项式的概率.

【答案】 (1) $\frac{1}{3}$

(2) 填表见解析, $\frac{4}{9}$

【解析】

【分析】 (1) 先分别求解三个代数式当 $a=1, b=-2$ 时的值，再利用概率公式计算即可；

(2) 先把表格补充完整，结合所有可能的结果数与符合条件的结果数，利用概率公式计算即可.

【小问 1 详解】

解：当 $a=1, b=-2$ 时，

$$a+b=-1, \quad 2a+b=0, \quad a-b=1-(-2)=3,$$

∴ 取出的卡片上代数式的值为负数的概率为： $\frac{1}{3}$ ；

【小问 2 详解】

解：补全表格如下：

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

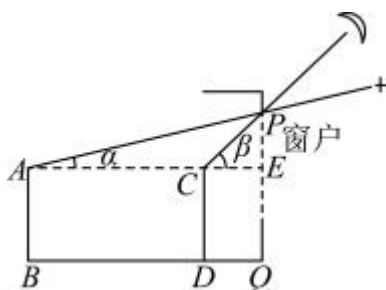
第一次 第二次和	$a+b$	$2a+b$	$a-b$
$a+b$	$2a+2b$	$3a+2b$	$2a$
$2a+b$	$3a+2b$	$4a+2b$	$3a$
$a-b$	$2a$	$3a$	$2a-2b$

∴所有等可能的结果数有9种，和为单项式的结果数有4种，

∴和为单项式的概率为 $\frac{4}{9}$.

【点睛】本题考查的是代数式的值，正负数的含义，多项式与单项式的概念，利用列表法求解简单随机事件的概率，掌握基础知识是解本题的关键.

22. 中国的探月工程激发了同学们对太空的兴趣. 某晚，淇淇在家透过窗户的最高点 P 恰好看到一颗星星，此时淇淇距窗户的水平距离 $BQ = 4\text{m}$ ，仰角为 α ；淇淇向前走了 3m 后到达点 D ，透过点 P 恰好看到月亮，仰角为 β ，如图是示意图. 已知，淇淇的眼睛与水平地面 BQ 的距离 $AB = CD = 1.6\text{m}$ ，点 P 到 BQ 的距离 $PQ = 2.6\text{m}$ ， AC 的延长线交 PQ 于点 E .（注：图中所有点均在同一平面）



- (1) 求 β 的大小及 $\tan \alpha$ 的值；
- (2) 求 CP 的长及 $\sin \angle APC$ 的值.

【答案】 (1) 45° , $\frac{1}{4}$

(2) $\sqrt{2}\text{ m}$, $\frac{3\sqrt{34}}{34}$

【解析】

【分析】本题考查的是解直角三角形的应用，理解仰角与俯角的含义以及三角函数的定义是解本题的关键；

(1) 根据题意先求解 $CE = PE = 1\text{ m}$ ，再结合等腰三角形的性质与正切的定义可得答案；

(2) 利用勾股定理先求解 $CP = \sqrt{2}\text{ m}$ ，如图，过 C 作 $CH \perp AP$ 于 H ，结合

$$\tan \alpha = \tan \angle PAE = \frac{CH}{AH} = \frac{1}{4}, \text{ 设 } CH = x \text{ m, 则 } AH = 4x \text{ m, 再建立方程求解 } x, \text{ 即可得到答案.}$$

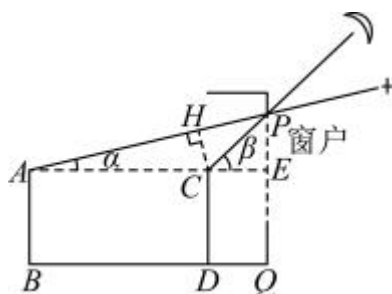
解: 由题意可得: $PQ \perp AE$, $PQ = 2.6 \text{ m}$, $AB = CD = EQ = 1.6 \text{ m}$.

$$\therefore CE = 4 - 3 = 1 \text{ (m)} \quad PE = 2.6 - 1.6 = 1 \text{ (m)} \quad \angle CEP = 90^\circ$$

$$\beta = \angle PCE = 45^\circ \quad \tan \alpha = \tan \angle PAE = \frac{PE}{AE} = \frac{1}{4};$$

解: $\because CE = PE = 1 \text{ m}, \angle CEP = 90^\circ,$

如图, 过 C 作 $CH \perp AP$ 于 H ,



$$\therefore \tan \alpha = \tan \angle PAE = \frac{CH}{AH} = \frac{1}{4}, \text{ 设 } CH = x \text{ m, 则 } AH = 4x \text{ m,}$$

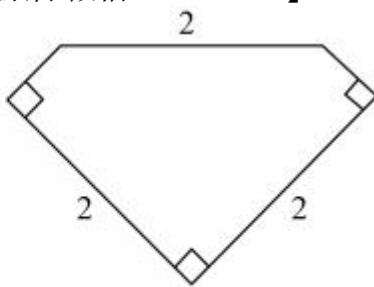
$$x^2 + (4x)^2 = AC^2 = 9$$

解得: $x = \frac{3\sqrt{17}}{17}$.

$$CH = \frac{3\sqrt{17}}{17} \text{ m.}$$

$$\sin \angle APC = \frac{CH}{CP} = \frac{\frac{3\sqrt{17}}{17}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3\sqrt{34}}{34}$$

(说明: 纸片不折叠, 拼接不重叠无缝隙无剩余)



操作 嘉嘉将图 1 所示的纸片通过裁剪, 拼成了钻石型五边形.

The diagram shows a composite figure ABCD. It consists of a rectangle ABCD with a V-shaped cutout at the top. The cutout is formed by two line segments meeting at point O. The left side of the cutout is bounded by points A, H, F, and E. The right side is bounded by points D, O, and C. The bottom boundary is BC. A dashed line segment EF is drawn, with a pair of scissors icon indicating a cut along it. The figure is divided into three regions: 1 (the bottom rectangular area), 2 (the area to the left of the cutout), and 3 (the area above the cutout). Points A, B, C, D, E, F, G, H, and O are labeled.

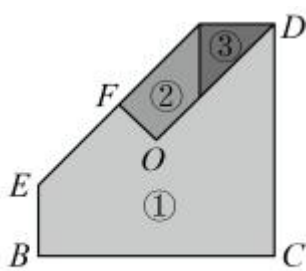


图 4

- (1) 直接写出线段 EF 的长;
- (2) 直接写出图 3 中所有与线段 BE 相等的线段, 并计算 BE 的长.

请你按照淇淇的说法设计一种方案：在图 5 所示纸片的 BC 边上找一点 P （可以借助刻度尺或圆规），画出裁剪线（线段 PQ ）的位置，并直接写出 BP 的长.

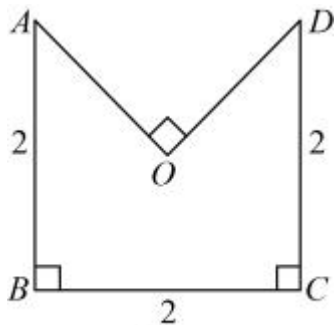


图 5

【答案】 (1) $EF=1$; (2) $BE=GE=AH=GH$, $BE=2-\sqrt{2}$; BP 的长为 $\sqrt{2}$ 或 $2-\sqrt{2}$.

【分析】本题考查的是正方形的性质，等腰直角三角形的判定与性质，勾股定理的应用，二次根式的混合运算，本题要求学生的操作能力要好，想象能力强，有一定的难度.

- (1) 如图, 过 G' 作 $G'K \perp FH'$ 于 K , 结合题意可得: 四边形 $FOG'K$ 为矩形, 可得 $FO = KG'$, 由拼接可得: $HF = FO = KG'$, 可得 $\triangle AHG$, $\triangle H'G'D$, $\triangle AFE$ 为等腰直角三角形, $\triangle G'KH'$ 为等腰直角

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

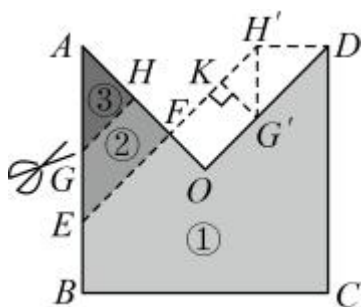
三角形，设 $H'K = KG' = x$ ，则 $H'G' = HD = \sqrt{2}x$ ，再进一步解答即可；

(2) 由 $\triangle AFE$ 为等腰直角三角形， $EF = AF = 1$ ；求解 $BE = 2 - \sqrt{2}$ ，再分别求解 GE, AH, GH ；可得答案，如图，以 B 为圆心， BO 为半径画弧交 BC 于 P' ，交 AB 于 Q' ，则直线 $P'Q'$ 为分割线，或以 C 为圆心， CO 为半径画弧，交 BC 于 P ，交 CD 于 Q ，则直线 PQ 为分割线，再进一步求解 BP 的长即可。

【详解】解：如图，过 G' 作 $G'K \perp FH'$ 于 K ，

结合题意可得：四边形 $FOG'K$ 为矩形，

$$\therefore FO = KG'$$



由拼接可得： $HF = FO = KG'$ ，

由正方形的性质可得： $\angle A = 45^\circ$ ，

$\therefore \triangle AHG$ ， $\triangle H'G'D$ ， $\triangle AFE$ 为等腰直角三角形，

$\therefore \triangle G'KH'$ 为等腰直角三角形，

设 $H'K = KG' = x$ ，

$$\therefore H'G' = HD = \sqrt{2}x,$$

$$\therefore AH = HG = \sqrt{2}x, \quad HF = FO = x,$$

$\therefore$ 正方形的边长为 2，

$$\therefore \text{对角线的长 } \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore OA = \sqrt{2},$$

$$\therefore x + x + \sqrt{2}x = \sqrt{2},$$

$$\text{解得： } x = \sqrt{2} - 1,$$

$$\therefore EF = AF = (\sqrt{2} + 1)x = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 1;$$

(2) $\therefore \triangle AFE$ 为等腰直角三角形， $EF = AF = 1$ ，

$$\therefore AE = \sqrt{2}EF = \sqrt{2},$$

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

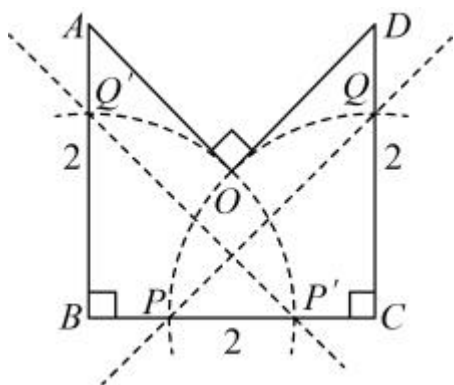
$$\therefore BE = 2 - \sqrt{2},$$

$$\therefore GE = H'G' = \sqrt{2}x = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2},$$

$$AH = GH = \sqrt{2}x = 2 - \sqrt{2},$$

$$\therefore BE = GE = AH = GH;$$

如图，以 B 为圆心， BO 为半径画弧交 BC 于 P' ，交 AB 于 Q' ，则直线 $P'Q'$ 为分割线，



此时 $BP' = \sqrt{2}$ ， $P'Q' = \sqrt{2+2} = 2$ ，符合要求，

或以 C 为圆心， CO 为半径画弧，交 BC 于 P ，交 CD 于 Q ，则直线 PQ 为分割线，

此时 $CP = CQ = \sqrt{2}$ ， $PQ = \sqrt{2+2} = 2$ ，

$$\therefore BP = 2 - \sqrt{2},$$

综上： BP 的长为 $\sqrt{2}$ 或 $2 - \sqrt{2}$ 。

24. 某公司为提高员工的专业能力，定期对员工进行技能测试，考虑多种因素影响，需将测试的原始成绩 x （分）换算为报告成绩 y （分）。已知原始成绩满分 150 分，报告成绩满分 100 分、换算规则如下：

$$\text{当 } 0 \leq x < p \text{ 时, } y = \frac{80x}{p};$$

$$\text{当 } p \leq x \leq 150 \text{ 时, } y = \frac{20(x-p)}{150-p} + 80.$$

（其中 p 是小于 150 的常数，是原始成绩的合格分数线，80 是报告成绩的合格分数线）

公司规定报告成绩为 80 分及 80 分以上（即原始成绩为 p 及 p 以上）为合格。

(1) 甲、乙的原始成绩分别为 95 分和 130 分，若 $p = 100$ ，求甲、乙的报告成绩；

(2) 丙、丁的报告成绩分别为 92 分和 64 分，若丙的原始成绩比丁的原始成绩高 40 分，请推算 p 的值；

(3) 下表是该公司 100 名员工某次测试的原始成绩统计表：

原始成绩（分）	95	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150
---------	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

人数	1	2	2	5	8	10	7	16	20	15	9	5
----	---	---	---	---	---	----	---	----	----	----	---	---

①直接写出这 100 名员工原始成绩的中位数；

②若①中的中位数换算成报告成绩为 90 分，直接写出该公司此次测试的合格率。

【答案】 (1) 甲、乙的报告成绩分别为 76, 92 分

(2) 125 (3) ①130; ②95%

【解析】

【分析】 (1) 当 $p = 100$ 时，甲的报告成绩为： $y = \frac{80 \times 95}{100} = 76$ 分，乙的报告成绩为：

$$y = \frac{20 \times (130 - 100)}{150 - 100} + 80 = 92 \text{ 分};$$

(2) 设丙的原始成绩为 x_1 分，则丁的原始成绩为 $(x_1 - 40)$ 分，① $0 \leq x_1 < p$ 时和② $p \leq x_1 - 40 \leq 150$ 时

均不符合题意，③ $0 \leq x_1 - 40 < p, p \leq x_1 \leq 150$ 时， $y_{\text{丙}} = 92 = \frac{20(x_1 - p)}{150 - p} + 80 \dots\dots ⑤$

$$y_{\text{丁}} = 64 = \frac{80(x_1 - 40)}{p} \dots\dots ⑥, \text{ 解得 } p = 125, x_1 = 140;$$

(3) ①共计 100 名员工，且成绩已经排列好，则中位数是第 50, 51 名员工成绩的平均数，由表格得第

50, 51 名员工成绩都是 130 分，故中位数为 130；②当 $p > 130$ 时，则 $90 = \frac{80 \times 130}{p}$ ，解得

$$p = \frac{1040}{9} < 130, \text{ 故不成立，舍；当 } p \leq 130 \text{ 时，则 } 90 = \frac{20(130 - p)}{150 - p} + 80, \text{ 解得 } p = 110, \text{ 符合题}$$

意，而由表格得到原始成绩为 110 及 110 以上的人数为 $100 - 5 = 95$ ，故合格率为：

$$\frac{95}{100} \times 100\% = 95\%$$

【小问 1 详解】

解：当 $p = 100$ 时，甲的报告成绩为： $y = \frac{80 \times 95}{100} = 76$ 分，

乙的报告成绩为： $y = \frac{20 \times (130 - 100)}{150 - 100} + 80 = 92$ 分；

【小问 2 详解】

解：设丙的原始成绩为 x_1 分，则丁的原始成绩为 $(x_1 - 40)$ 分，

$$\textcircled{1} 0 \leq x_1 < p \text{ 时, } y_{\text{丙}} = 92 = \frac{80x_1}{p} \dots\dots \textcircled{1} \quad y_{\text{丁}} = 64 = \frac{80(x_1 - 40)}{p} \dots\dots \textcircled{2}$$

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$$\frac{3200}{p} = 28$$

由①-②得 p ,

$$\therefore p = \frac{800}{7} ,$$

$$\therefore x_1 = \frac{92 \times \frac{800}{7}}{80} = \frac{920}{7} \approx 131 > p , \text{ 故不成立, 舍;}$$

$$\textcircled{2} p \leq x_1 - 40 \leq 150 \text{ 时, } y_{\text{丙}} = 92 = \frac{20(x_1 - p)}{150 - p} + 80 \dots\dots \textcircled{3} ,$$

$$y_{\text{丁}} = 64 = \frac{20(x_1 - 40 - p)}{150 - p} + 80 \dots\dots \textcircled{4} ,$$

$$\text{由} \textcircled{3} - \textcircled{4} \text{得: } 28 = \frac{800}{150 - p} ,$$

$$\therefore p = \frac{850}{7} ,$$

$$92 = \frac{20\left(x_1 - \frac{850}{7}\right)}{150 - \frac{850}{7}} + 80$$

$$\therefore x_1 = \frac{970}{7} ,$$

$$\therefore x_1 - 40 = \frac{690}{7} < p = \frac{850}{7} , \text{ 故不成立, 舍;}$$

$$\textcircled{3} 0 \leq x_1 - 40 < p, p \leq x_1 \leq 150 \text{ 时, } y_{\text{丙}} = 92 = \frac{20(x_1 - p)}{150 - p} + 80 \dots\dots \textcircled{5} ,$$

$$y_{\text{丁}} = 64 = \frac{80(x_1 - 40)}{p} \dots\dots \textcircled{6} ,$$

联立⑤⑥解得:

$$p = 125, x_1 = 140 , \text{ 且符合题意,}$$

综上所述 $p = 125$;

【小问 3 详解】

解: ①共计 100 名员工, 且成绩已经排列好,

$\therefore$ 中位数是第 50, 51 名员工成绩的平均数,

由表格得第 50, 51 名员工成绩都是 130 分,

$\therefore$ 中位数为 130;

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

②当 $p > 130$ 时，则 $90 = \frac{80 \times 130}{p}$ ，解得 $p = \frac{1040}{9} < 130$ ，故不成立，舍；

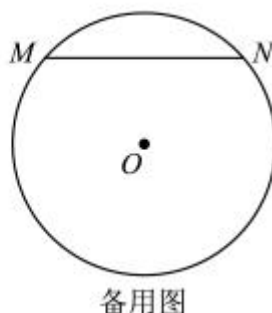
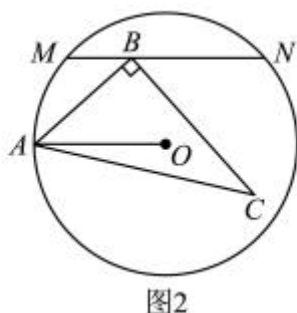
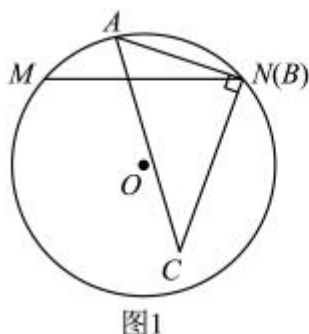
当 $p \leq 130$ 时，则 $90 = \frac{20(130-p)}{150-p} + 80$ ，解得 $p = 110$ ，符合题意，

$\therefore$ 由表格得到原始成绩为 110 及 110 以上的人数为 $100 - (1+2+2) = 95$ ，

$\therefore$ 合格率为： $\frac{95}{100} \times 100\% = 95\%$ 。

【点睛】本题考查了函数关系式，自变量与函数值，中位数的定义，合格率，解分式方程，熟练知识点，正确理解题意是解决本题的关键。

25. 已知 $\odot O$ 的半径为 3，弦 $MN = 2\sqrt{5}$ ， $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $BC = 3\sqrt{2}$ 。在平面上，先将 $\triangle ABC$ 和 $\odot O$ 按图 1 位置摆放（点 B 与点 N 重合，点 A 在 $\odot O$ 上，点 C 在 $\odot O$ 内），随后移动 $\triangle ABC$ ，使点 B 在弦 MN 上移动，点 A 始终在 $\odot O$ 上随之移动，设 $BN = x$ 。



(1) 当点 B 与点 N 重合时，求劣弧 $\widehat{AN}$ 的长；

(2) 当 $OA \parallel MN$ 时，如图 2，求点 B 到 OA 的距离，并求此时 x 的值；

(3) 设点 O 到 BC 的距离为 d 。

①当点 A 在劣弧 $\widehat{MN}$ 上，且过点 A 的切线与 AC 垂直时，求 d 的值；

②直接写出 d 的最小值。

【答案】 (1) π

(2) 点 B 到 OA 的距离为 2； 3

(3) ① $d = 3 - \sqrt{3}$ ； ② $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 (1) 如图，连接 OA ， OB ，先证明 $\triangle AOB$ 为等边三角形，再利用等边三角形的性质结合弧长公式可得答案；

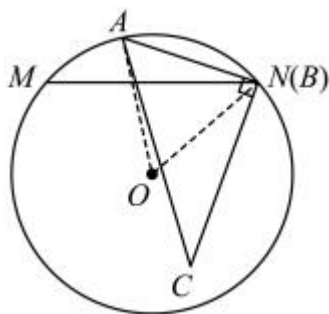
(2) 过 B 作 $BI \perp OA$ 于 I ，过 O 作 $CH \perp MN$ 于 H ，连接 MO ，证明四边形 $BIOH$ 是矩形，可得 $BH = OI$ ， $BI = OH$ ，再结合勾股定理可得答案；

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

(3) ①如图，由过点 A 的切线与 AC 垂直，可得 AC 过圆心，过 O 作 $OJ \perp BC$ 于 J ，过 O 作 $OK \perp AB$ 于 K ，而 $\angle ABC = 90^\circ$ ，可得四边形 $KOJB$ 为矩形，可得 $OJ = KB$ ，再进一步利用勾股定理与锐角三角函数可得答案；②如图，当 B 为 MN 中点时，过 O 作 $OL \perp B'C'$ 于 L ，过 O 作 $OJ \perp BC$ 于 J ， $OL > OJ$ ，此时 OJ 最短，如图，过 A 作 $AQ \perp OB$ 于 Q ，而 $AB = AO = 3$ ，证明 $BQ = OQ = 1$ ，求解 $AQ = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$ ，再结合等角的三角函数可得答案。

【小问 1 详解】

解：如图，连接 OA ， OB ，



$\therefore \odot O$ 的半径为 3， $AB = 3$ ，

$\therefore OA = OB = AB = 3$ ，

$\therefore \triangle AOB$ 为等边三角形，

$\therefore \angle AOB = 60^\circ$ ，

$\therefore \widehat{AN}$ 的长为 $\frac{60\pi \times 3}{180} = \pi$ ；

【小问 2 详解】

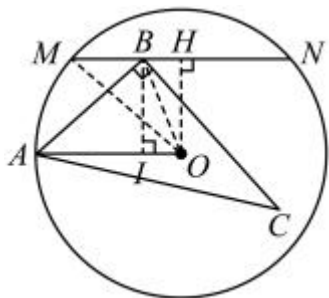
解：过 B 作 $BI \perp OA$ 于 I ，过 O 作 $CH \perp MN$ 于 H ，连接 MO ，

$\therefore OA \parallel MN$ ，

$\therefore \angle IBH = \angle BHO = \angle HOI = \angle BIO = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $BIOH$ 是矩形，

$\therefore BH = OI$ ， $BI = OH$ ，



$\therefore MN = 2\sqrt{5}$ ， $CH \perp MN$ ，

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$$\therefore MH = NH = \sqrt{5}, \text{ 而 } OM = 3,$$

$$\therefore OH = \sqrt{OM^2 - MH^2} = 2 = BI,$$

$\therefore$ 点 B 到 OA 的距离为 2;

$$\therefore AB = 3, BI \perp OA,$$

$$\therefore AI = \sqrt{AB^2 - BI^2} = \sqrt{5},$$

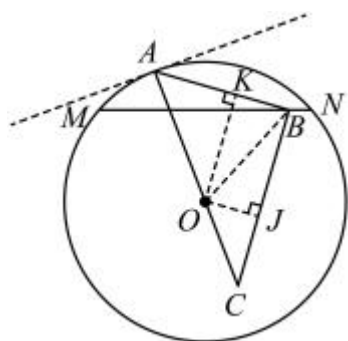
$$\therefore OI = OA - AI = 3 - \sqrt{5} = BH,$$

$$\therefore x = BN = BH + NH = 3 - \sqrt{5} + \sqrt{5} = 3;$$

【小问 3 详解】

解：①如图， $\therefore$ 过点 A 的切线与 AC 垂直，

$\therefore AC$ 过圆心，



过 O 作 $OJ \perp BC$ 于 J ，过 O 作 $OK \perp AB$ 于 K ，而 $\angle ABC = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $KOJB$ 为矩形，

$$\therefore OJ = KB,$$

$$\therefore AB = 3, BC = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore \cos \angle BAC = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AK}{AO},$$

$$\therefore AK = \sqrt{3},$$

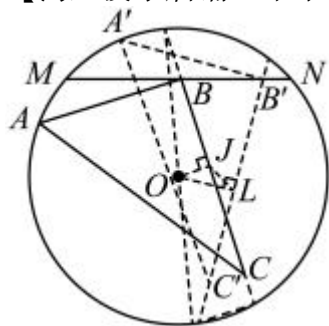
$$\therefore OJ = BK = 3 - \sqrt{3}, \text{ 即 } d = 3 - \sqrt{3};$$

②如图，当 B 为 MN 中点时，

过 O 作 $OL \perp B'C'$ 于 L ，过 O 作 $OJ \perp BC$ 于 J ，

$$\therefore \angle OJL > 90^\circ,$$

$\therefore OL > OJ$ ，此时 OJ 最短，



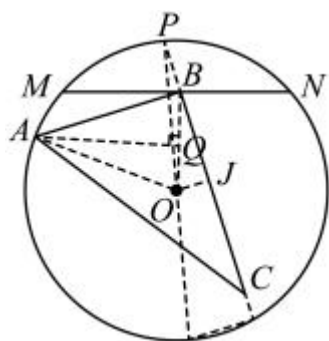
如图，过A作 $AQ \perp OB$ 于Q，而 $AB = AO = 3$ ，

$\therefore B$ 为 MN 中点，则 $OB \perp MN$ ，

$\therefore$ 由 (2) 可得 $OB = 2$ ，

$\therefore BQ = OQ = 1$ ，

$\therefore AQ = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$ ，



$\therefore \angle ABC = 90^\circ = \angle AQB$ ，

$\therefore \angle OBJ + \angle ABO = 90^\circ = \angle ABO + \angle BAQ$ ，

$\therefore \angle OBJ = \angle BAQ$ ，

$\therefore \tan \angle OBJ = \tan \angle BAQ$ ，

$\therefore \frac{OJ}{BJ} = \frac{BQ}{AQ} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ，

设 $OJ = m$ ，则 $BJ = 2\sqrt{2}m$ ，

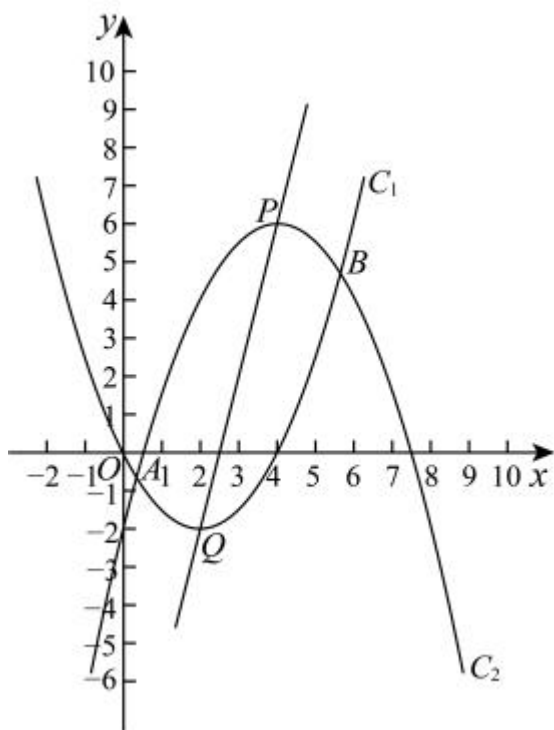
$\therefore m^2 + (2\sqrt{2}m)^2 = 2^2$ ，

解得： $m = \frac{2}{3}$ （不符合题意的根舍去），

$\therefore d$ 的最小值为 $\frac{2}{3}$ 。

【点睛】本题属于圆的综合题，难度很大，考查了勾股定理的应用，矩形的判定与性质，垂径定理的应用，锐角三角函数的应用，切线的性质，熟练的利用数形结合的方法，作出合适的辅助线是解本题的关键。

26. 如图，抛物线 $C_1: y = ax^2 - 2x$ 过点 $(4, 0)$ ，顶点为 Q 。抛物线 $C_2: y = -\frac{1}{2}(x-t)^2 + \frac{1}{2}t^2 - 2$ (其中 t 为常数，且 $t > 2$)，顶点为 P 。



(1) 直接写出 a 的值和点 Q 的坐标。

(2) 嘉嘉说：无论 t 为何值，将 C_1 的顶点 Q 向左平移 2 个单位长度后一定落在 C_2 上。

淇淇说：无论 t 为何值， C_2 总经过一个定点。

请选择其中一人的说法进行说理。

(3) 当 $t = 4$ 时，

①求直线 PQ 的解析式；

②作直线 $l \parallel PQ$ ，当 l 与 C_2 的交点到 x 轴的距离恰为 6 时，求 l 与 x 轴交点的横坐标。

(4) 设 C_1 与 C_2 的交点 A, B 的横坐标分别为 x_A, x_B ，且 $x_A < x_B$ 。点 M 在 C_1 上，横坐标为 $m (2 \leq m \leq x_B)$ 。点 N 在 C_2 上，横坐标为 $n (x_A \leq n \leq t)$ 。若点 M 是到直线 PQ 的距离最大的点，最大距离为 d ，点 N 到直线 PQ 的距离恰好也为 d ，直接用含 t 和 m 的式子表示 n 。

【答案】 (1) $a = \frac{1}{2}$, $Q(2, -2)$

(2) 两人说法都正确，理由见解析

(3) ① $y = 4x - 10$ ； ② $\frac{11}{2} - 2\sqrt{6}$ 或 $\frac{11}{2} + 2\sqrt{6}$

(4) $n = 2 + t - m$

【解析】

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

【分析】(1) 直接利用待定系数法求解抛物线的解析式，再化为顶点式即可得到顶点坐标；

(2) 把 $Q(2, -2)$ 向左平移 2 个单位长度得到对应点的坐标为： $(0, -2)$ ，再检验即可，再根据函数化为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + xt - 2$ ，可得函数过定点；

(3) ①先求解 P 的坐标，再利用待定系数法求解一次函数的解析式即可；②如图，当

$C_2: y = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 6 = -6$ (等于 6 两直线重合不符合题意)，可得 $x = 4 \pm 2\sqrt{6}$ ，可得交点

$J(4-2\sqrt{6}, -6)$ ，交点 $K(4+2\sqrt{6}, 6)$ ，再进一步求解即可；

(4) 如图，由题意可得 C_2 是由 C_1 通过旋转 180° ，再平移得到的，两个函数图象的形状相同，如图，连接 AB 交 PQ 于 L ，连接 AQ ， BQ ， AP ， BP ，可得四边形 $APBQ$ 是平行四边形，当点 M 是到直线 PQ 的距离最大的点，最大距离为 d ，点 N 到直线 PQ 的距离恰好也为 d ，此时 M 与 B 重合， N 与 A 重合，再进一步利用中点坐标公式解答即可。

【小问 1 详解】

解：∵ 抛物线 $C_1: y = ax^2 - 2x$ 过点 $(4, 0)$ ，顶点为 Q 。

$$\therefore 16a - 8 = 0,$$

$$\text{解得: } a = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{抛物线为: } y = \frac{1}{2}x^2 - 2x = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 2,$$

$$\therefore Q(2, -2);$$

【小问 2 详解】

解：把 $Q(2, -2)$ 向左平移 2 个单位长度得到对应点的坐标为： $(0, -2)$ ，

当 $x = 0$ 时，

$$\therefore C_2: y = -\frac{1}{2}(x-t)^2 + \frac{1}{2}t^2 - 2 = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^2 - 2 = -2,$$

$$\therefore (0, -2) \text{ 在 } C_2 \text{ 上,}$$

∴ 嘉嘉说法正确；

$$\therefore C_2: y = -\frac{1}{2}(x-t)^2 + \frac{1}{2}t^2 - 2$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + xt - 2,$$

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

当 $x=0$ 时, $y=-2$,

$$\therefore C_2: y = -\frac{1}{2}(x-t)^2 + \frac{1}{2}t^2 - 2 \text{ 过定点 } (0, -2);$$

$\therefore$ 淇淇说法正确;

【小问 3 详解】

解: ①当 $t=4$ 时,

$$C_2: y = -\frac{1}{2}(x-t)^2 + \frac{1}{2}t^2 - 2 = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 6,$$

$\therefore$ 顶点 $P(4, 6)$, 而 $Q(2, -2)$,

设 PQ 为 $y = ex + f$,

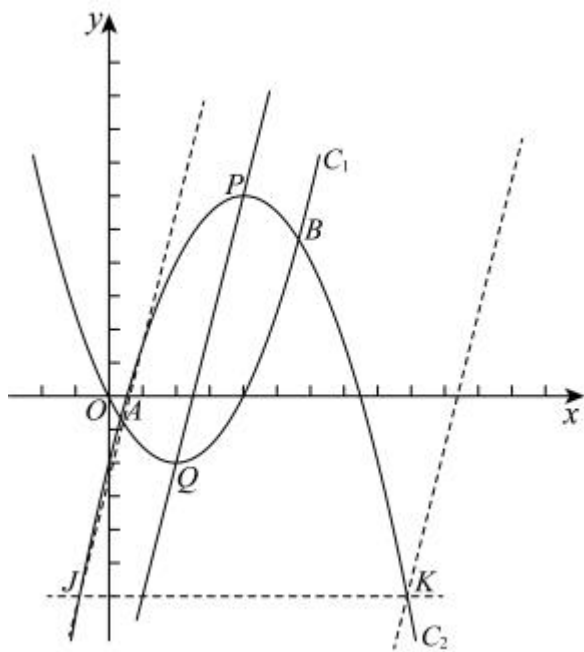
$$\therefore \begin{cases} 4e + f = 6 \\ 2e + f = -2 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} e = 4 \\ f = -10 \end{cases},$$

$\therefore PQ$ 为 $y = 4x - 10$;

②如图, 当 $C_2: y = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 6 = -6$ (等于 6 两直线重合不符合题意),

$$\therefore x = 4 \pm 2\sqrt{6},$$



$\therefore$ 交点 $J(4-2\sqrt{6}, -6)$, 交点 $K(4+2\sqrt{6}, 6)$,

由直线 $l \parallel PQ$, 设直线 l 为 $y = 4x + b$,

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$$\therefore 4(4-2\sqrt{6})+b=-6,$$

$$\text{解得: } b=8\sqrt{6}-22,$$

$$\therefore \text{直线 } l \text{ 为: } y=4x+8\sqrt{6}-22,$$

$$\text{当 } y=4x+8\sqrt{6}-22=0 \text{ 时, } x=\frac{11}{2}-2\sqrt{6},$$

$$\text{此时直线 } l \text{ 与 } x \text{ 轴交点的横坐标为 } \frac{11}{2}-2\sqrt{6},$$

$$\text{同理当直线 } l \text{ 过点 } K(4+2\sqrt{6}, 6),$$

$$\text{直线 } l \text{ 为: } y=4x-8\sqrt{6}-22,$$

$$\text{当 } y=4x-8\sqrt{6}-22=0 \text{ 时, } x=\frac{11}{2}+2\sqrt{6},$$

$$\text{此时直线 } l \text{ 与 } x \text{ 轴交点的横坐标为 } \frac{11}{2}+2\sqrt{6},$$

【小问 4 详解】

$$\text{解: 如图, } \therefore y=\frac{1}{2}(x-2)^2-2, \quad C_2: y=-\frac{1}{2}(x-t)^2+\frac{1}{2}t^2-2,$$

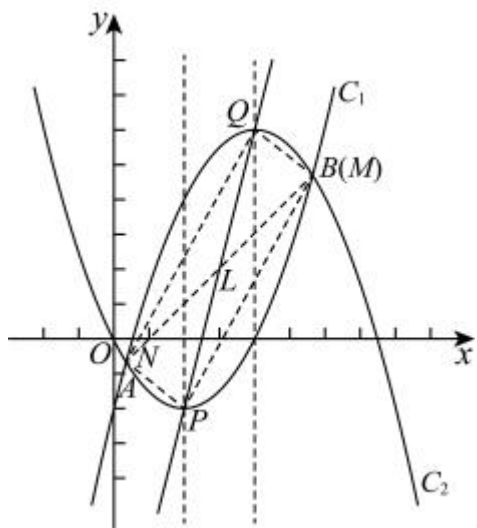
$\therefore C_2$ 是由 C_1 通过旋转 180° , 再平移得到的, 两个函数图象的形状相同,

如图, 连接 AB 交 PQ 于 L , 连接 AQ , BQ , AP , BP ,

$\therefore$ 四边形 $APBQ$ 是平行四边形,

当点 M 是到直线 PQ 的距离最大的点, 最大距离为 d , 点 N 到直线 PQ 的距离恰好也为 d ,

此时 M 与 B 重合, N 与 A 重合,



【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$$\therefore P(2, -2), Q\left(t, \frac{1}{2}t^2 - 2\right),$$

$$\therefore L \text{ 的横坐标为 } \frac{2+t}{2},$$

$$\therefore M\left(m, \frac{1}{2}m^2 - 2m\right), N\left[n, -\frac{1}{2}(n-t)^2 + \frac{1}{2}t^2 - 2\right],$$

$$\therefore L \text{ 的横坐标为 } \frac{m+n}{2},$$

$$\therefore \frac{m+n}{2} = \frac{2+t}{2},$$

$$\text{解得: } n = 2 + t - m;$$

【点睛】 本题考查的是利用待定系数法求解二次函数的解析式，二次函数的性质，一次函数的综合应用，二次函数的平移与旋转，以及特殊四边形的性质，理解题意，利用数形结合的方法解题是关键.