

江西省 2024 年初中学业水平考试

数学试题卷

说明：1. 本试题卷满分 120 分，考试时间 120 分钟.

2. 请按试题序号在答题卡相应位置作答，答在试题卷或其它位置无效.

一、单项选择题（本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）在每小题列出的四个备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其代码填涂在答题卡相应位置. 错选、多选或未选均不得分.

1. 实数 -5 的相反数是 ()

- A. 5 B. -5 C. $\frac{1}{5}$ D. $-\frac{1}{5}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了相反数的判断，根据相反数的定义解答即可.

【详解】 -5 的相反数是 5.

故选：A.

2. “长征是宣言书，长征是宣传队，长征是播种机”，二万五千里长征是中国历史上的伟大壮举，也是人类史上的奇迹，将 25000 用科学记数法可表示为 ()

- A. 0.25×10^6 B. 2.5×10^5 C. 2.5×10^4 D. 25×10^3

【答案】C

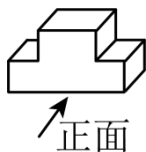
【解析】

【分析】此题主要考查了科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 ≥ 10 时， n 是正整数.

【详解】解：将 25000 用科学记数法可表示为 2.5×10^4 ，

故选：C.

3. 如图所示的几何体，其主视图为 ()





【答案】B

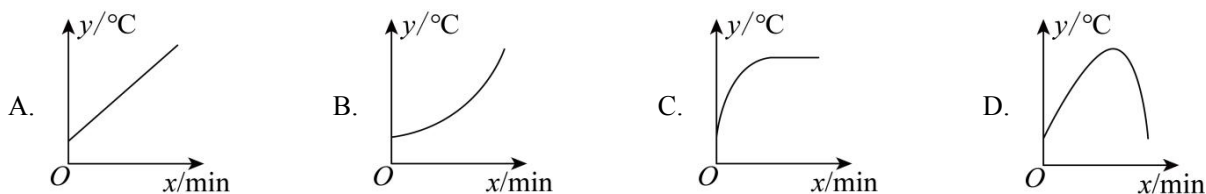
【解析】

【分析】根据从正面看得到的图形是主视图，可得答案.

本题主要考查常见几何体的三视图，解题的关键是熟练掌握主视图是从物体正面看到的图形.

【详解】解：从正面看到的是两个长方形，上面一个小的，下面一个大的，
故选：B.

4. 将常温中的温度计插入一杯 60°C 的热水（恒温）中，温度计的读数 $y(^{\circ}\text{C})$ 与时间 $x(\text{min})$ 的关系用图象可近似表示为（ ）



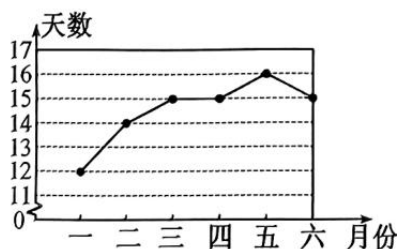
【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了函数图象，根据温度计上升到一定的温度后不变，可得答案；注意温度计的温度升高到 60°C 时温度不变.

【详解】解：将常温中的温度计插入一杯 60°C （恒温）的热水中，注意温度计的温度升高到 60°C 时温度不变，故 C 选项图象符合条件，
故选：C.

5. 如图是某地去年一至六月每月空气质量为优的天数的折线统计图，关于各月空气质量为优的天数，下列结论错误的是（ ）



A. 五月份空气质量为优的天数是 16 天

B. 这组数据的众数是 15 天

C. 这组数据的中位数是 15 天

D. 这组数据的平均数是 15 天

【答案】D

【解析】

【分析】根据折线统计图及中位数、众数、平均数的意义逐项判断即可.

【详解】解：观察折线统计图知，五月份空气质量为优的天数是 16 天，故选项 A 正确，不符合题意；

15 出现了 3 次，次数最多，即众数是 15 天，故选项 B 正确，不符合题意；

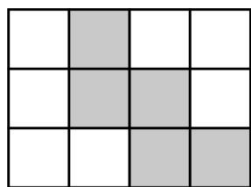
把数据按从低到高排列，位于中间的是 15，15，即中位数为 15 天，故选项 C 正确，不符合题意；

这组数据的平均数为： $\frac{1}{6} \times (12 + 14 + 15 \times 3 + 16) = 14.5$ ，故选项 D 错误，符合题意；

故选：D.

【点睛】本题考查了折线统计图、一组数据的中位数、众数、平均数等知识，掌握以上基础知识是解本题的关键.

6. 如图是 4×3 的正方形网格，选择一空白小正方形，能与阴影部分组成正方体展开图的方法有（ ）



A. 1 种

B. 2 种

C. 3 种

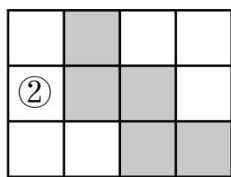
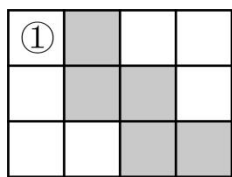
D. 4 种

【答案】B

【解析】

【分析】此题主要考查了几何体的展开图，关键是掌握正方体展开图的特点，依据正方体的展开图的结构特征进行判断，即可得出结论.

【详解】解：如图所示：



共有 2 种方法，

故选：B.

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

7. 计算： $(-1)^2 = \underline{\quad}$.

【答案】1

【解析】

【分析】根据乘方运算法则进行计算即可.

【详解】解： $(-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1$.

故答案为：1.

【点睛】本题主要考查了有理数的乘方运算，熟练掌握乘方运算法则，是解题的关键.

8. 因式分解： $a^2 + 2a =$ _____.

【答案】 $a(a+2)$

【解析】

【详解】根据分解因式提取公因式法，将方程 a^2+2a 提取公因式为 $a(a+2)$. 故 $a^2+2a=a(a+2)$.

故答案是 $a(a+2)$.

9. 在平面直角坐标系中，将点 $A(1,1)$ 向右平移 2 个单位长度，再向上平移 3 个单位长度得到点 B ，则点 B 的坐标为_____.

【答案】 $(3,4)$

【解析】

【分析】本题考查了坐标与图形变化—平移. 利用点平移的坐标规律，把 A 点的横坐标加 2，纵坐标加 3 即可得到点 B 的坐标.

【详解】解： $\because$ 点 $A(1,1)$ 向右平移 2 个单位长度，再向上平移 3 个单位长度得到点 B ,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(1+2, 1+3)$ ，即 $(3,4)$.

故答案为： $(3,4)$.

10. 观察 $a, a^2, a^3, a^4, \dots$ ，根据这些式子的变化规律，可得第 100 个式子为_____.

【答案】 a^{100}

【解析】

【分析】此题考查了单项式规律探究. 分别找出系数和次数的规律，据此判断出第 n 个式子是多少即可.

【详解】解： $\because a, a^2, a^3, a^4, \dots$,

$\therefore$ 第 n 个单项式的系数是 1;

$\therefore$ 第 1 个、第 2 个、第 3 个、第 4 个单项式的次数分别是 1、2、3、4、 $\dots$,

$\therefore$ 第 n 个式子是 a^n .

$\therefore$ 第 100 个式子是 a^{100} .

故答案为： a^{100} .

11. 将图1所示的七巧板，拼成图2所示的四边形 $ABCD$ ，连接 AC ，则 $\tan \angle CAB =$ _____.

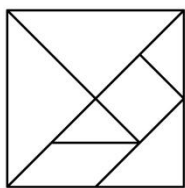


图1

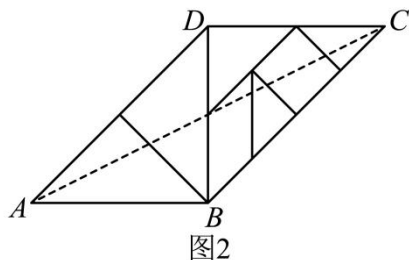


图2

【答案】 $\frac{1}{2}$ ## 0.5

【解析】

【分析】 本题考查了等腰直角三角形的性质，正方形的性质，勾股定理，三角函数，如图1，设等腰直角 $\triangle MNQ$ 的直角边为 a ，利用图形的位置关系求出大正方形的边长和大等腰直角三角形的直角边长，进而根据正切的定义即可求解，掌握等腰直角三角形和正方形的性质是解题的关键.

【详解】 解：如图1，设等腰直角 $\triangle MNQ$ 的直角边为 a ，则 $MQ = \sqrt{2}a$ ，小正方形的边长为 a ，

$$\therefore MP = 2a,$$

$$\therefore EM = \sqrt{(2a)^2 + (2a)^2} = 2\sqrt{2}a,$$

$$\therefore MT = EM = 2\sqrt{2}a,$$

$$\therefore QT = 2\sqrt{2}a - \sqrt{2}a = \sqrt{2}a,$$

如图2，过点 C 作 $CH \perp AB$ 的延长线于点 H ，则 $CH = BD$ ， $BH = CD$ ，

由图（1）可得， $AB = BD = 2\sqrt{2}a$ ， $CD = \sqrt{2}a + \sqrt{2}a = 2\sqrt{2}a$ ，

$$\therefore CH = 2\sqrt{2}a, \quad BH = 2\sqrt{2}a,$$

$$\therefore AH = 2\sqrt{2}a + 2\sqrt{2}a = 4\sqrt{2}a,$$

$$\therefore \tan \angle CAB = \frac{CH}{AH} = \frac{2\sqrt{2}a}{4\sqrt{2}a} = \frac{1}{2},$$

故答案为： $\frac{1}{2}$.

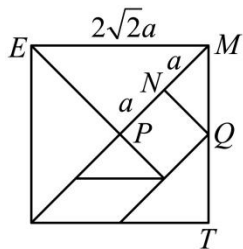


图1

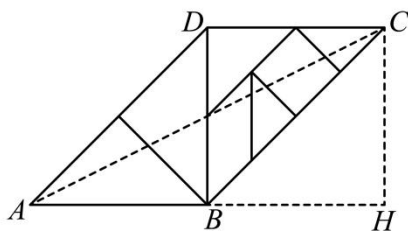
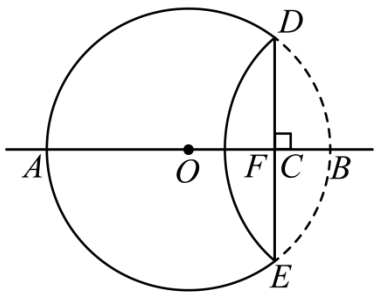


图2

12. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， $AB = 2$ ，点 C 在线段 AB 上运动，过点 C 的弦 $DE \perp AB$ ，将 $\widehat{DBE}$ 沿 DE 翻折交直线 AB 于点 F ，当 DE 的长为正整数时，线段 FB 的长为_____.



【答案】 $2 - \sqrt{3}$ 或 $2 + \sqrt{3}$ 或 2

【解析】

【分析】 本题考查了垂径定理，勾股定理，折叠的性质，根据 $DE \leq AB$ ，可得 $DE = 1$ 或 2，利用勾股定理进行解答即可，进行分类讨论是解题的关键.

【详解】 解： $\because AB$ 为直径， DE 为弦，

$\therefore DE \leq AB$ ，

$\therefore$ 当 DE 的长为正整数时， $DE = 1$ 或 2，

当 $DE = 2$ 时，即 DE 为直径，

$\therefore DE \perp AB$

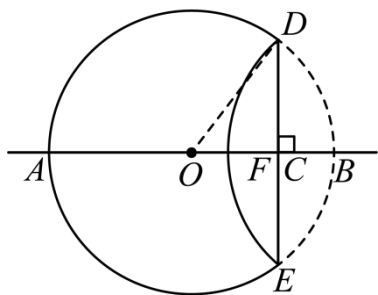
$\therefore$ 将 $\widehat{DBE}$ 沿 DE 翻折交直线 AB 于点 F ，此时 F 与点 A 重合，

故 $FB = 2$ ；

当 $DE = 1$ 时，且在点 C 在线段 OB 之间，

如图，连接 OD ，

此时 $OD = \frac{1}{2}AB = 1$ ，



$$\because DE \perp AB,$$

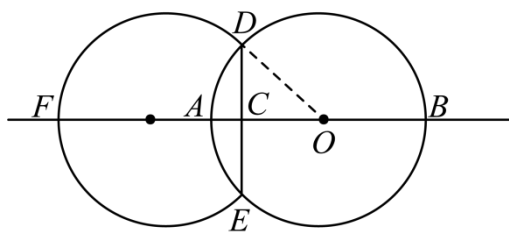
$$\therefore DC = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2},$$

$$\therefore OC = \sqrt{OD^2 - DC^2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore BC = OB - OC = \frac{2 - \sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore BF = 2BC = 2 - \sqrt{3};$$

当 $DE = 1$ 时，且点 C 在线段 OA 之间，连接 OD ，



$$\text{同理可得 } BC = \frac{2 + \sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore BF = 2BC = 2 + \sqrt{3},$$

综上，可得线段 FB 的长为 $2 - \sqrt{3}$ 或 $2 + \sqrt{3}$ 或 2 ，

故答案为： $2 - \sqrt{3}$ 或 $2 + \sqrt{3}$ 或 2 。

三、解答题（本大题共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

13. (1) 计算： $\pi^0 + |-5|$ ；

(2) 化简： $\frac{x}{x-8} - \frac{8}{x-8}$ 。

【答案】 (1) 6； (2) 1

【解析】

【分析】 题目主要考查零次幂、绝对值的化简，分式的加减运算，熟练掌握运算法则是解题关键。

(1) 先计算零次幂及绝对值化简，然后计算加减法即可；

(2) 直接进行分式的减法运算即可.

【详解】解：(1) $\pi^0 + |-5|$

$$=1+5$$

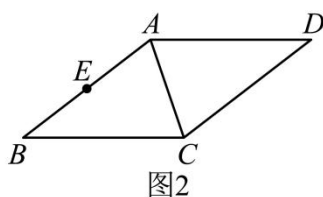
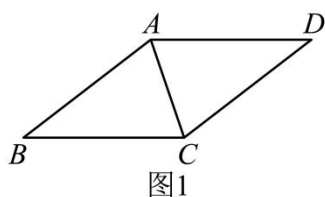
$$=6;$$

$$(2) \frac{x}{x-8} - \frac{8}{x-8}$$

$$= \frac{x-8}{x-8}$$

$$=1.$$

14. 如图， AC 为菱形 $ABCD$ 的对角线，请仅用无刻度的直尺按要求完成以下作图（保留作图痕迹）



(1) 如图1，过点 B 作 AC 的垂线；

(2) 如图2，点 E 为线段 AB 的中点，过点 B 作 AC 的平行线.

【答案】(1) 作图见解析；

(2) 作图见解析.

【解析】

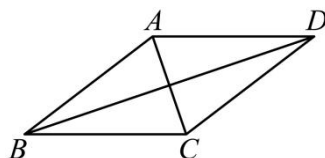
【分析】(1) 作直线 BD ，由菱形的性质可得 $BD \perp AC$ ，即 BD 为 AC 的垂线；

(2) 连接 CE 并延长，与 DA 的延长线相交于点 M ，作直线 BM ，因为点 E 为线段 AB 的中点，所以 $AE = BE$ ，因为 $AM \parallel BC$ ，所以 $\angle EAM = \angle EBC$ ， $\angle EMA = \angle ECB$ ，故可得 $\triangle AEM \cong \triangle BEC$ ，得到 $ME = CE$ ，所以四边形 $ACBM$ 为平行四边形，即 $BM \parallel AC$ ；

本题考查了菱形的性质，平行四边形的判定，掌握菱形的性质及平行四边形的判定方法是解题的关键.

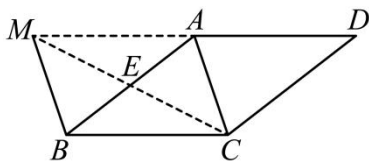
【小问1详解】

解：如图， BD 即为 AC 所求；



【小问2详解】

解：如图， BM 即为所求.



15. 某校一年级开设人数相同的 A , B , C 三个班级, 甲、乙两位学生是该校一年级新生, 开学初学校对所有一年级新生进行电脑随机分班.

- (1) “学生甲分到 A 班” 的概率是_____;
- (2) 请用画树状图法或列表法, 求甲、乙两位新生分到同一个班的概率.

【答案】 (1) $\frac{1}{3}$

(2) 甲、乙两位新生分到同一个班的概率为 $\frac{1}{3}$.

【解析】

【分析】 本题考查的是求简单事件的概率和两步操作事件的概率, 用表格或树状图表示出总结果数是解答此类问题的关键.

- (1) 根据概率公式计算可得;
- (2) 用画树状图列出所有的等可能结果, 从中确定符合事件的结果, 根据概率公式计算可得.

【小问 1 详解】

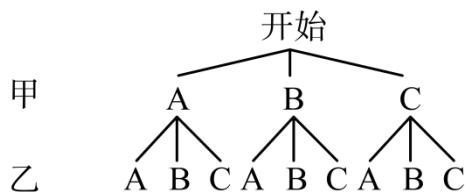
解: 有 A , B , C 三个班级, “学生甲分到 A 班” 有一种情况,

则 “学生甲分到 A 班” 的概率是 $\frac{1}{3}$,

故答案为: $\frac{1}{3}$;

【小问 2 详解】

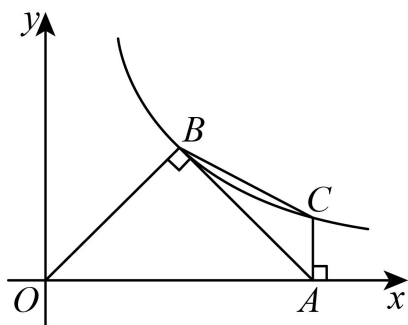
解: 画树状图如图:



共有 9 个等可能的结果, 甲、乙两位新生分到同一个班的有 3 种情况,

$\therefore$ 甲、乙两位新生分到同一个班的概率为 $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

16. 如图, $\triangle AOB$ 是等腰直角三角形, $\angle ABO = 90^\circ$, 双曲线 $y = \frac{k}{x} (k > 0, x > 0)$ 经过点 B , 过点 $A(4, 0)$ 作 x 轴的垂线交双曲线于点 C , 连接 BC .



- (1) 点 B 的坐标为_____；
 (2) 求 BC 所在直线的解析式.

【答案】(1) $(2,2)$

(2) $y = -\frac{1}{2}x + 3$

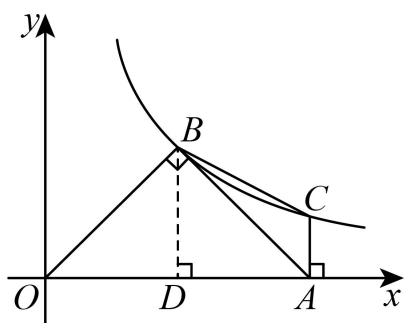
【解析】

【分析】题目主要考查一次函数与反比例函数综合问题，等腰三角形的性质，熟练掌握一次函数与反比例函数的相应性质是解题关键.

- (1) 过点 B 作 $BD \perp x$ 轴，根据等腰直角三角形的性质得出 $BD = OD = 2$ ，即可确定点 B 的坐标；
 (2) 根据点 $B(2,2)$ 确定反比例函数解析式，然后即可得出 $C(4,1)$ ，再由待定系数法确定一次函数解析式即可.

【小问 1 详解】

解：过点 B 作 $BD \perp x$ 轴于 D ，如图所示：



$\because \triangle AOB$ 是等腰直角三角形， $\angle ABO = 90^\circ$ ， $A(4,0)$ ，

$\therefore OA = 4$ ，

$\therefore BD = OD = AD = 2$ ，

$\therefore B(2,2)$ ，

故答案为： $(2,2)$ ；

【小问 2 详解】

由 (1) 得 $B(2,2)$ ，代入 $y = \frac{k}{x} (k > 0, x > 0)$ ，

得 $k = 4$ ，

$$\therefore y = \frac{4}{x},$$

$\therefore$ 过点 $A(4,0)$ 作 x 轴的垂线交双曲线于点 C ，

$\therefore$ 当 $x = 4$ 时， $y = 1$ ，

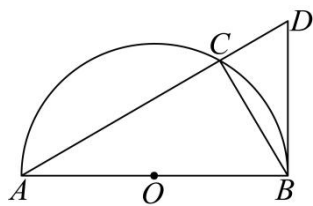
$\therefore C(4,1)$ ，

设直线 BC 的解析式为 $y = k_1x + b$ ，将点 B 、 C 代入得：

$$\begin{cases} 2 = 2k_1 + b \\ 1 = 4k_1 + b \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k_1 = -\frac{1}{2} \\ b = 3 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ 。

17. 如图， AB 是半圆 O 的直径，点 D 是弦 AC 延长线上一点，连接 BD ， BC ， $\angle D = \angle ABC = 60^\circ$ 。



(1) 求证： BD 是半圆 O 的切线；

(2) 当 $BC = 3$ 时，求 $\widehat{AC}$ 的长。

【答案】(1) 见解析 (2) 2π

【解析】

【分析】本题考查了直径所对的圆周角为直角，等边三角形的判定和性质，弧长公式，熟知相关性质和计算公式是解题的关键。

(1) 根据直径所对的圆周角为直角结合已知条件，可得 $\angle CAB = 30^\circ$ ，即可得 $\angle ABD = 90^\circ$ ，进而可证得结论；

(2) 连接 OC ，证明 $\triangle OBC$ 为等边三角形，求得 $\angle AOC = 120^\circ$ ，利用弧长公式即可解答。

【小问 1 详解】

证明： $\because AB$ 是半圆 O 的直径，

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$ ，

$$\because \angle D = \angle ABC = 60^\circ,$$

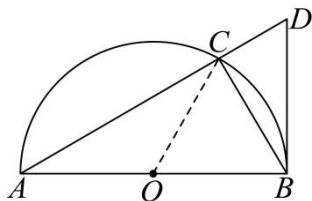
$$\therefore \angle CAB = 90^\circ - \angle ABC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = 180^\circ - \angle CAB - \angle D = 90^\circ,$$

$\therefore BD$ 是半圆 O 的切线;

【小问 2 详解】

解: 如图, 连接 OC ,



$$\because OC = OB, \angle CBA = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle OCB$ 为等边三角形,

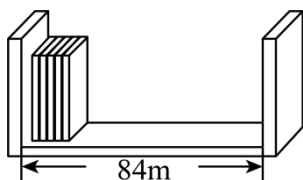
$$\therefore \angle COB = 60^\circ, \quad OC = CB = 3,$$

$$\therefore \angle AOC = 180^\circ - \angle COB = 120^\circ,$$

$$\therefore l_{AC} = \frac{120}{360} \times 2\pi \times 3 = 2\pi.$$

四、解答题 (本大题共 3 小题, 每小题 8 分, 共 24 分)

18. 如图, 书架宽 84cm, 在该书架上按图示方式摆放数学书和语文书, 已知每本数学书厚 0.8cm, 每本语文书厚 1.2cm.



(1) 数学书和语文书共 90 本恰好摆满该书架, 求书架上数学书和语文书各多少本;

(2) 如果书架上已摆放 10 本语文书, 那么数学书最多还可以摆多少本?

【答案】(1) 书架上有数学书 60 本, 语文书 30 本.

(2) 数学书最多还可以摆 90 本

【解析】

【分析】本题主要考查了一元一次方程及不等式的应用, 解题的关键是正确理解题意, 找出题目中的等量关系, 设出未知数, 列出方程.

(1) 首先设这层书架上数学书有 x 本, 则语文书有 $(90-x)$ 本, 根据题意可得等量关系: x 本数学书的厚度 $+(90-x)$ 本语文书的厚度 $= 84$, 根据等量关系列出方程求解即可;

(2) 设数学书还可以摆 m 本，根据题意列出不等式求解即可.

【小问 1 详解】

解：设书架上数学书有 x 本，由题意得：

$$0.8x + 1.2(90 - x) = 84,$$

解得： $x = 60$,

$$90 - x = 30 .$$

$\therefore$ 书架上有数学书 60 本，语文书 30 本.

【小问 2 详解】

设数学书还可以摆 m 本，

根据题意得： $1.2 \times 10 + 0.8m \leq 84$,

解得： $m \leq 90$,

$\therefore$ 数学书最多还可以摆 90 本.

19. 图 1 是世界第一“大碗”——景德镇昌南里文化艺术中心主体建筑，其造型灵感来自于宋代湖田窑影青斗笠碗，寓意“万瓷之母”，如图 2，“大碗”的主视图由“大碗”主体 $ABCD$ 和矩形碗底 $BEFC$ 组成，已知 $AD \parallel EF$ ， AM ， DN 是太阳光线， $AM \perp MN$ ， $DN \perp MN$ ，点 M ， E ， F ， N 在同一条直线上，经测量 $ME = FN = 20.0\text{m}$ ， $EF = 40.0\text{m}$ ， $BE = 2.4\text{m}$ ， $\angle ABE = 152^\circ$. (结果精确到 0.1m)



图1

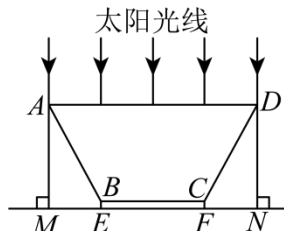


图2

(1) 求“大碗”的口径 AD 的长；

(2) 求“大碗”的高度 AM 的长. (参考数据: $\sin 62^\circ \approx 0.88$, $\cos 62^\circ \approx 0.47$, $\tan 62^\circ \approx 1.88$)

【答案】(1) “大碗”的口径 AD 的长为 80.0m；

(2) “大碗”的高度 AM 的长为 40.0m.

【解析】

【分析】本题考查了解直角三角形的应用，正确引出辅助线解决问题是解题的关键.

(1) 证明四边形 $AMND$ 是矩形，利用 $AD = ME + EF + FD$ ，代入数据计算即可求解；

(2) 延长 EB 交 AD 于点 H ，求得 $\angle HAB = 62^\circ$ ，利用正切函数的定义得到 $\frac{BH}{AH} = \tan 62^\circ \approx 1.88$ ，求得 BH 的长，据此求解即可.

【小问 1 详解】

解：∵ $AD \parallel EF$ ， $AM \perp MN$ ， $DN \perp MN$ ，

∴ 四边形 $AMND$ 是矩形，

$$\therefore AD = ME + EF + FD = 20.0 + 40.0 + 20.0 = 80.0(\text{m}),$$

答：“大碗”的口径 AD 的长为 80.0m ；

【小问 2 详解】

解：延长 EB 交 AD 于点 H ，如图，

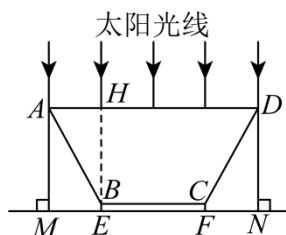


图2

∵ 矩形碗底 $BEFC$ ，

∴ $EH \perp AD$ ，

∴ 四边形 $AMEH$ 是矩形，

∴ $\angle ABE = 152^\circ$ ，

∴ $\angle ABH = 180^\circ - \angle ABE = 28^\circ$ ， $\angle HAB = 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ$ ，

$$\therefore \frac{BH}{AH} = \tan 62^\circ \approx 1.88,$$

$$\therefore BH = 20.0 \times 1.88 \approx 37.6(\text{m}),$$

$$\therefore AM = EH = BH + BE = 37.6 + 2.4 = 40.0(\text{m}),$$

答：“大碗”的高度 AM 的长为 40.0m 。

20 追本溯源：

题（1）来自于课本中的习题，请你完成解答，提炼方法并完成题（2）。

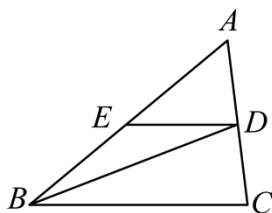


图1

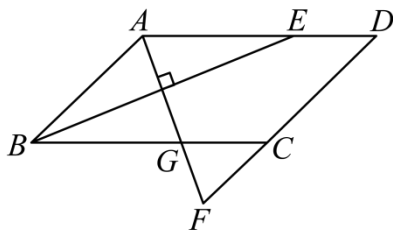


图2

（1）如图 1，在 $\triangle ABC$ 中， BD 平分 $\angle ABC$ ，交 AC 于点 D ，过点 D 作 BC 的平行线，交 AB 于点 E ，请判断 $\triangle BDE$ 的形状，并说明理由。

方法应用：

(2) 如图 2，在 $ABCD$ 中， BE 平分 $\angle ABC$ ，交边 AD 于点 E ，过点 A 作 $AF \perp BE$ 交 DC 的延长线于点 F ，交 BC 于点 G 。

①图中一定是等腰三角形的有 ()

A. 3 个 B. 4 个 C. 5 个 D. 6 个

②已知 $AB = 3$ ， $BC = 5$ ，求 CF 的长。

【答案】(1) $\triangle BDE$ 是等腰三角形；理由见解析；(2) ①B；② $CF = 2$ 。

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的性质和等腰三角形的判定和性质等知识，熟练掌握平行四边形的性质和等腰三角形的判定是解题的关键；

(1) 利用角平分线的定义得到 $\angle ABD = \angle CBD$ ，利用平行线的性质得到 $\angle BDE = \angle CBD$ ，推出 $\angle BDE = \angle ABD$ ，再等角对等边即可证明 $\triangle BDE$ 是等腰三角形；

(2) ①同 (1) 利用等腰三角形的判定和性质可以得到四个等腰三角形；

②由①得 $DA = DF$ ，利用平行四边形的性质即可求解。

【详解】解：(1) $\triangle BDE$ 是等腰三角形；理由如下：

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$ ，

$\therefore \angle ABD = \angle CBD$ ，

$\because DE \parallel BC$ ，

$\therefore \angle BDE = \angle CBD$ ，

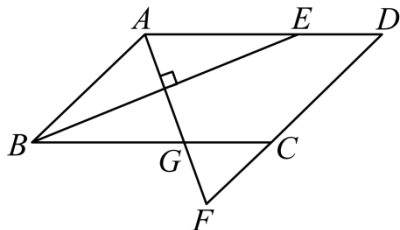
$\therefore \angle BDE = \angle ABD$ ，

$\therefore EB = ED$ ，

$\therefore \triangle BDE$ 是等腰三角形；

(2) ① $\because ABCD$ 中，

$\therefore AE \parallel BC$ ， $AB \parallel CD$ ，



同 (1) $\angle ABE = \angle CBE = \angle AEB$ ，

$\therefore AB = AE$ ，

$\because AF \perp BE$ ，

$$\therefore \angle BAF = \angle EAF,$$

$$\because AE \parallel BC, AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle BGA = \angle EAF, \angle BAF = \angle F,$$

$$\therefore \angle BGA = \angle CGF,$$

$$\therefore \angle BGA = \angle BAG, \angle DAF = \angle F, \angle CGF = \angle F,$$

$$\therefore AB = AG, DA = DF, CG = CF,$$

即 $\triangle ABE$ 、 $\triangle ABG$ 、 $\triangle ADF$ 、 $\triangle CGF$ 是等腰三角形；共有四个，

故选：B.

$$\textcircled{2} \because ABCD \text{ 中, } AB = 3, BC = 5,$$

$$\therefore AB = CD = 3, BC = AD = 5,$$

由①得 $DA = DF$,

$$\therefore CF = DF - CD = 5 - 3 = 2.$$

五、解答题（本大题共 2 小题，每小题 9 分，共 18 分）

21. 近年来，我国肥胖人群的规模快速增长，目前，国际上常用身体质量指数（Body Mass Index，缩写 BMI）

来衡量人体胖瘦程度，其计算公式是 $BMI = \frac{\text{体重(单位: kg)}}{\text{身高}^2(\text{单位: m}^2)}$ ，中国人的 BMI 数值标准为：BMI < 18.5

为偏瘦； $18.5 \leq BMI < 24$ 为正常； $24 \leq BMI < 28$ 为偏胖； $BMI \geq 28$ 为肥胖. 某数学兴趣小组对本校七年级学生的胖瘦程度进行统计调查，从该校所有七年级学生中随机抽出 10 名男生、10 名女生，测得他们的身高和体重值，并计算出相应的 BMI 数值，再参照 BMI 数值标准分成四组：A. $16 \leq BMI < 20$ ；

B. $20 \leq BMI < 24$ ；C. $24 \leq BMI < 28$ ；D. $28 \leq BMI < 32$. 将所得数据进行收集、整理、描述.

收集数据

七年级 10 名男生数据统计表

编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
身高 (m)	1.56	1.50	1.66	1.58	1.50	1.70	1.51	1.42	1.59	1.72
体重 (kg)	52.5	49.5	45.6	40.3	55.2	56.1	48.5	42.8	67.2	90.5

<i>BMI</i>	21.6	<i>s</i>	16.5	16.1	24.5	19.4	21.3	21.2	26.6	30.6
------------	------	----------	------	------	------	------	------	------	------	------

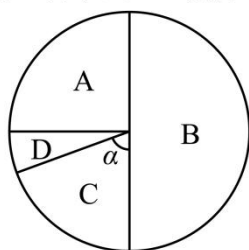
七年级 10 名女生数据统计表

编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
身高 (m)	1.46	1.62	1.55	1.65	1.58	1.67	1.55	1.46	1.53	1.62
体重 (kg)	46.4	49.0	61.5	56.5	52.9	75.5	50.3	47.6	52.4	46.8
<i>BMI</i>	21.8	18.7	25.6	20.8	21.2	27.1	20.9	22.3	22.4	17.8

整理、描述数据

七年级 20 名学生 *BMI* 频数分布表

组别	<i>BMI</i>	男生频数	女生频数
<i>A</i>	$16 \leq BMI < 20$	3	2
<i>B</i>	$20 \leq BMI < 24$	4	6
<i>C</i>	$24 \leq BMI < 28$	<i>t</i>	2
<i>D</i>	$28 \leq BMI < 32$	1	0

七年级20名学生*BMI*扇形统计图

应用数据

(1) $s = \underline{\hspace{2cm}}$, $t = \underline{\hspace{2cm}}$ $a = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 已知该校七年级有男生 260 人, 女生 240 人.

①估计该校七年级男生偏胖的人数;

②估计该校七年级学生 $BMI \geq 24$ 的人数

(3) 根据以上统计数据, 针对该校七年级学生的胖瘦程度, 请你提出一条合理化建议.

【答案】(1) 22; 2; 72° ;

(2) ① 52 人; ② 126 人

(3) 见解析

【解析】

【分析】题目主要考查统计调查表及扇形统计图, 结合图形, 熟练掌握用样本估计总体是解题关键.

(1) 根据题中公式直接计算即可得 s ; 结合统计表确定 t ; 结合扇形统计图用 360 度乘以男女生所占比例即可;

(2) ①用男生总人数乘以相应比例即可; ②分别用男女生总人数乘以各自所占比例即可;

(3) 合理即可.

【小问 1 详解】

解: 根据题意: $s = \frac{49.5}{1.5^2} = 22$,

由统计表得: $24 \leq BMI < 28$ 内, $t = 2$;

$\therefore a = 360^\circ \times \frac{2+2}{20} = 72^\circ$,

故答案为: 22; 2; 72° ;

【小问 2 详解】

①男生偏胖的人数为: $260 \times \frac{2}{10} = 52$ (人);

②七年级学生 $BMI \geq 24$ 的人数为: $260 \times \frac{2+1}{10} + 240 \times \frac{2}{10} = 126$ (人);

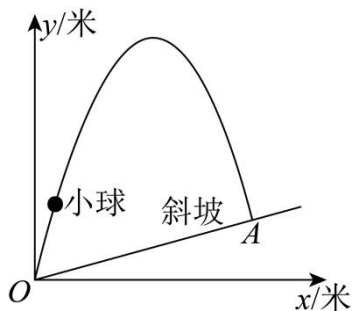
【小问 3 详解】

对学校学生进行合理、健康的饮食习惯的培养, 加强体育锻炼.

22. 如图, 一小球从斜坡 O 点以一定的方向弹出球的飞行路线可以用二次函数 $y = ax^2 + bx$ ($a < 0$) 刻画,

斜坡可以用一次函数 $y = \frac{1}{4}x$ 刻画, 小球飞行的水平距离 x (米) 与小球飞行的高度 y (米) 的变化规律如下表:

x	0	1	2	m	4	5	6	7	...
y	0	$\frac{7}{2}$	6	$\frac{15}{2}$	8	$\frac{15}{2}$	n	$\frac{7}{2}$	...



(1) ① $m = \underline{\hspace{2cm}}$, $n = \underline{\hspace{2cm}}$;

②小球的落点是 A , 求点 A 的坐标.

(2) 小球飞行高度 y (米) 与飞行时间 t (秒) 满足关系 $y = -5t^2 + vt$.

①小球飞行的最大高度为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 米;

②求 v 的值.

【答案】 (1) ① 3, 6; ② $\left(\frac{15}{2}, \frac{15}{8}\right)$;

(2) ① 8, ② $v = 4\sqrt{10}$

【解析】

【分析】 本题主要考查二次函数的应用以及从图象和表格中获取数据,

(1) ①由抛物线的顶点坐标为 $(4, 8)$ 可建立关于 a, b 的二元一次方程组, 求出 a, b 的值即可; ②联立两函数解析式求解, 可求出交点 A 的坐标;

(2) ①根据第一问可知最大高度为 8 米;

②将小球飞行高度与飞行时间的函数关系式化简为顶点式即可求得 v 值.

【小问 1 详解】

解: ①根据小球飞行的水平距离 x (米) 与小球飞行的高度 y (米) 的变化规律表可知: 抛物线顶点坐标为 $(4, 8)$,

$$\therefore \begin{cases} -\frac{b}{2a} = 4 \\ \frac{-b^2}{4a} = 8 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = -\frac{1}{2}, \\ b = 4 \end{cases},$$

$\therefore$ 二次函数解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x$,

$$\text{当 } y = \frac{15}{2} \text{ 时, } -\frac{1}{2}x^2 + 4x = \frac{15}{2},$$

解得: $x = 3$ 或 $x = 5$ (舍去),

$$\therefore m = 3,$$

$$\text{当 } x = 6 \text{ 时, } n = y = -\frac{1}{2} \times 6^2 + 4 \times 6 = 6,$$

故答案为: 3, 6.

$$\text{②联立得: } \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x \\ y = \frac{1}{4}x \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = \frac{15}{2} \\ y = \frac{15}{8} \end{cases},$$

$$\therefore \text{点 } A \text{ 的坐标是 } \left(\frac{15}{2}, \frac{15}{8}\right),$$

【小问 2 详解】

①由题干可知小球飞行最大高度为 8 米,

故答案为: 8;

$$\text{② } y = -5t^2 + vt = -5\left(t - \frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v^2}{20},$$

$$\text{则 } \frac{v^2}{20} = 8,$$

$$\text{解得 } v = 4\sqrt{10} \text{ (负值舍去).}$$

六、解答题 (本大题共 12 分)

23. 综合与实践

如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 点 D 是斜边 AB 上的动点 (点 D 与点 A 不重合), 连接 CD , 以 CD 为直角边在 CD

的右侧构造 $\text{Rt}\triangle CDE$, $\angle DCE = 90^\circ$, 连接 BE , $\frac{CE}{CD} = \frac{CB}{CA} = m$.

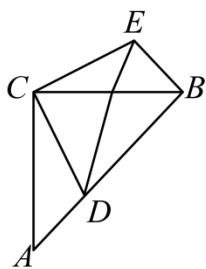


图1

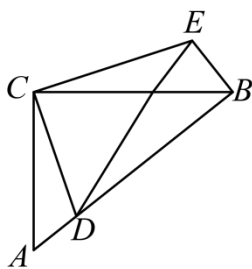


图2

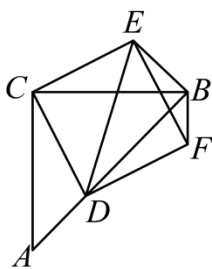


图3

特例感知

(1) 如图 1, 当 $m=1$ 时, BE 与 AD 之间的位置关系是_____, 数量关系是_____;

类比迁移

(2) 如图 2, 当 $m \neq 1$ 时, 猜想 BE 与 AD 之间的位置关系和数量关系, 并证明猜想.

拓展应用

(3) 在 (1) 的条件下, 点 F 与点 C 关于 DE 对称, 连接 DF , EF , BF , 如图 3. 已知 $AC=6$, 设 $AD=x$, 四边形 $CDFE$ 的面积为 y .

①求 y 与 x 的函数表达式, 并求出 y 的最小值;

②当 $BF=2$ 时, 请直接写出 AD 的长度.

【答案】 (1) $AD \perp BE$, $AD = BE$ (2) BE 与 AD 之间的位置关系是 $AD \perp BE$, 数量关系是 $\frac{BE}{AD} = m$;

(3) ① y 与 x 的函数表达式 $y = (x - 3\sqrt{2})^2 + 18$ ($0 < x \leq 6\sqrt{2}$), 当 $x = 3\sqrt{2}$ 时, y 的最小值为 18; ②当 $BF=2$ 时, AD 为 $2\sqrt{2}$ 或 $4\sqrt{2}$.

【解析】

【分析】 (1) 先证明 $\angle ACD = \angle BCE$, $CD = CE$, $CB = CA$, 可得 $\triangle ACD \cong \triangle BCE$; 再结合全等三角形的性质可得结论;

(2) 先证明 $\angle ACD = \angle BCE$, $\angle A + \angle ABC = 90^\circ$, 结合 $\frac{CE}{CD} = \frac{CB}{CA} = m$, 可得 $\triangle ACD \sim \triangle BCE$; 再结合相似三角形的性质可得结论;

(3) ①先证明四边形 $CDFE$ 为正方形, 如图, 过 C 作 $CH \perp AB$ 于 H , 可得 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 6\sqrt{2}$, $CH = AH = BH = 3\sqrt{2}$, 再分情况结合勾股定理可得函数解析式, 结合函数性质可得最小值; ②如图, 连接 OC , OB , OF , 证明 $OC = OD = OF = OE = OB$, 可得 D, C, E, B, F 在 $\odot O$ 上, 且 CF 为直径, 则 $\angle CBF = 90^\circ$, 过 O 作 $OK \perp BC$ 于 K , 过 O 作 $OG \perp BF$ 于 G , 求解正方形面积为 $\frac{1}{2} \times (2\sqrt{10})^2 = 20$, 结合 $y = CD^2 = (x - 3\sqrt{2})^2 + 18 = 20$, 再解方程可得答案.

【详解】解：(1) $\because \angle DCE = 90^\circ = \angle ACB$,

$$\therefore \angle ACD = \angle BCE, \quad \angle A + \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \frac{CE}{CD} = \frac{CB}{CA} = m = 1,$$

$$\therefore CD = CE, \quad CB = CA,$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE;$$

$$\therefore AD = BE, \quad \angle CAD = \angle CBE,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle ABC + \angle CBE = \angle ABC + \angle CAD = 90^\circ,$$

$$\therefore AD \perp BE,$$

$$\therefore BE \text{ 与 } AD \text{ 之间的位置关系是 } AD \perp BE, \text{ 数量关系是 } AD = BE;$$

(2) BE 与 AD 之间的位置关系是 $AD \perp BE$, 数量关系是 $\frac{BE}{AD} = m$; 理由如下:

$$\therefore \angle DCE = 90^\circ = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle BCE, \quad \angle A + \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \frac{CE}{CD} = \frac{CB}{CA} = m,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle BCE;$$

$$\therefore \frac{BE}{AD} = \frac{BC}{AC} = m, \quad \angle CAD = \angle CBE,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle ABC + \angle CBE = \angle ABC + \angle CAD = 90^\circ,$$

$$\therefore AD \perp BE,$$

$$\therefore BE \text{ 与 } AD \text{ 之间的位置关系是 } AD \perp BE, \text{ 数量关系是 } \frac{BE}{AD} = m;$$

(3) 由 (1) 得: $CD = CE$, $CB = CA$, $\angle DCE = 90^\circ = \angle ACB$,

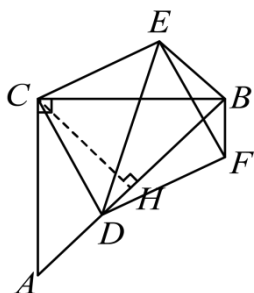
$\therefore \triangle ABC$, $\triangle CDE$ 都为等腰直角三角形;

$\therefore$ 点 F 与点 C 关于 DE 对称,

$\therefore \triangle DFE$ 为等腰直角三角形; $CE = CD = EF = DF$,

$\therefore$ 四边形 $CDFE$ 为正方形,

如图, 过 C 作 $CH \perp AB$ 于 H ,



$$\because AC = BC = 6, \angle ACB = 90^\circ,$$

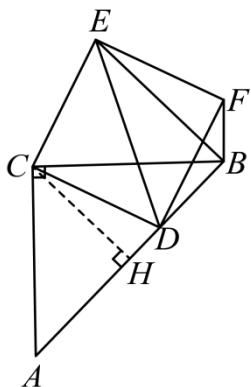
$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 6\sqrt{2}, \quad CH = AH = BH = 3\sqrt{2},$$

当 $0 < x \leq 3\sqrt{2}$ 时,

$$\therefore DH = 3\sqrt{2} - x,$$

$$\therefore y = CD^2 = (3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2} - x)^2 = (x - 3\sqrt{2})^2 + 18,$$

如图, 当 $3\sqrt{2} < x \leq 6\sqrt{2}$ 时,



此时 $DH = x - 3\sqrt{2}$,

$$\text{同理可得: } y = CD^2 = (x - 3\sqrt{2})^2 + 18,$$

$$\therefore y \text{ 与 } x \text{ 的函数表达式为 } y = (x - 3\sqrt{2})^2 + 18 \quad (0 < x \leq 6\sqrt{2}),$$

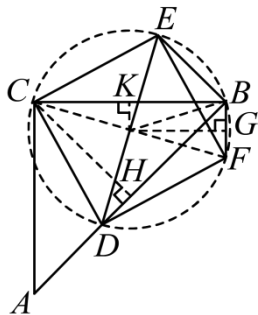
当 $x = 3\sqrt{2}$ 时, y 的最小值为 18;

②如图, $\because AD \perp BE$, 正方形 $CDFE$, 记正方形的中心为 O ,

$$\therefore \angle DBE = \angle DFE = \angle CDF = 90^\circ,$$

连接 OC , OB , OF ,

$$\therefore OC = OD = OF = OE = OB,$$



$\therefore D, C, E, B, F$ 在 $\odot O$ 上, 且 CF 为直径,

$$\therefore \angle CBF = 90^\circ,$$

过 O 作 $OK \perp BC$ 于 K , 过 O 作 $OG \perp BF$ 于 G ,

$$\therefore BK = \frac{1}{2}BC = 3, \quad BG = \frac{1}{2}BF = 1,$$

$$\therefore OB = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} ,$$

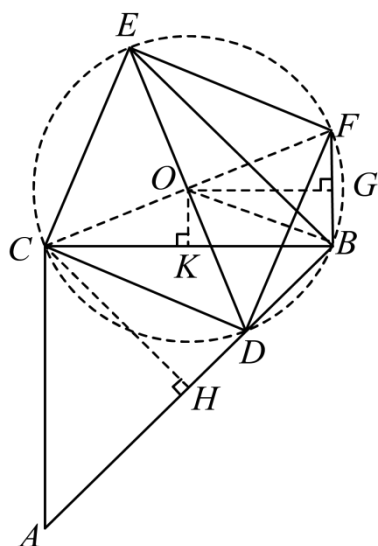
$$\therefore DE = 2OB = 2\sqrt{10},$$

$$\therefore \text{正方形面积为} \frac{1}{2} \times (2\sqrt{10})^2 = \frac{1}{2} \times 40 = 20,$$

$$\therefore y = CD^2 = (x - 3\sqrt{2})^2 + 18 = 20,$$

解得: $x_1 = 2\sqrt{2}$, $x_2 = 4\sqrt{2}$, 经检验都符合题意,

如图,



综上: 当 $BF = 2$ 时, AD 为 $2\sqrt{2}$ 或 $4\sqrt{2}$.

【点睛】本题考查的是全等三角形的判定与性质，正方形的判定与性质，勾股定理的应用，相似三角形的判定与性质，直角三角形斜边上的中线的性质，二次函数的性质，圆的确定及圆周角定理的应用，本题难度较大，作出合适的辅助线是解本题的关键.