

连云港市 2024 年初中学业水平考试

数学试题

一、选择题（本大题共有 8 小题，每小题 3 分，共 24 分在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，请将正确选项前的字母代号填涂在答题卡相应位置上）

1. $-\frac{1}{2}$ 的相反数是 ()

A. -2

B. 2

C. $-\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据相反数的性质，互为相反数的两个数的和为 0 即可求解.

【详解】解：因为 $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$,

所以 $-\frac{1}{2}$ 的相反数是 $\frac{1}{2}$.

故选：D.

【点睛】本题考查求一个数的相反数，掌握相反数的性质是解题关键.

2. 2024 年 5 月，全国最大的海上光伏项目获批落地连云港，批准用海面积约 28000 亩，总投资约 90 亿元. 其中数据“28000”用科学记数法可以表示为 ()

A. 28×10^3

B. 2.8×10^4

C. 2.8×10^3

D. 0.28×10^5

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查科学记数法，根据科学记数法的表示方法： $a \times 10^n$, $1 \leq |a| < 10$, n 为整数，进行表示即可.

【详解】解： $28000 = 2.8 \times 10^4$;

故选：B.

3. 下列运算结果等于 a^6 的是 ()

A. $a^3 + a^3$

B. $a \cdot a^6$

C. $a^8 \div a^2$

D. $(-a^2)^3$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查整式的运算，根据合并同类项，同底数幂的乘除法法则，积的乘方和幂的乘方法则，逐一

进行计算判断即可.

【详解】解：A、 $a^3 + a^3 = 2a^3$ ，不符合题意；

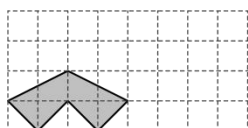
B、 $a \cdot a^6 = a^7$ ，不符合题意；

C、 $a^8 \div a^2 = a^6$ ，符合题意；

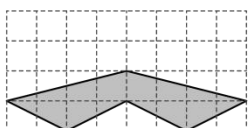
D、 $(-a^2)^3 = -a^6$ ，不符合题意；

故选：C.

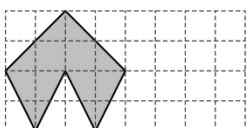
4. 下列网格中各个小正方形的边长均为 1，阴影部分图形分别记作甲、乙、丙、丁，其中是相似形的为（ ）



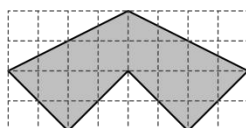
甲



乙



丙



丁

A. 甲和乙

B. 乙和丁

C. 甲和丙

D. 甲和丁

【答案】D

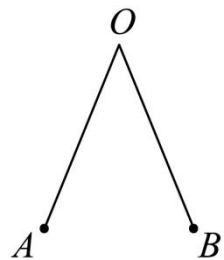
【解析】

【分析】本题考查相似图形，根据对应角相等，对应边对应成比例的图形是相似图形结合正方形的性质，进行判断即可.

【详解】解：由图可知，只有选项甲和丁中的对应角相等，且对应边对应成比例，它们的形状相同，大小不同，是相似形.

故选 D.

5. 如图，将一根木棒的一端固定在 O 点，另一端绑一重物. 将此重物拉到 A 点后放开，让此重物由 A 点摆动到 B 点. 则此重物移动路径的形状为（ ）



A. 倾斜直线

B. 抛物线

C. 圆弧

D. 水平直线

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查动点的移动轨迹，根据题意，易得重物移动的路径为一段圆弧.

【详解】解：在移动的过程中木棒的长度始终不变，故点 A 的运动轨迹是以 O 为圆心， OA 为半径的一段

圆弧，

故选：C.

6. 下列说法正确的是（ ）

- A. 10 张票中有 1 张奖票，10 人去摸，先摸的人摸到奖票的概率较大
- B. 从 1, 2, 3, 4, 5 中随机抽取一个数，取得偶数的可能性较大
- C. 小强一次掷出 3 颗质地均匀的骰子，3 颗全是 6 点朝上是随机事件
- D. 抛一枚质地均匀的硬币，正面朝上的概率为 $\frac{1}{2}$ ，连续抛此硬币 2 次必有 1 次正面朝上

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查事件发生的可能性与概率. 由题意根据事件的可能性以及事件发生的概率对各选项进行依次判断即可.

【详解】解：A、“10 张票中有 1 张奖票，10 人去摸，先摸的人摸到奖票的概率一样”，故该选项错误，不符合题意；

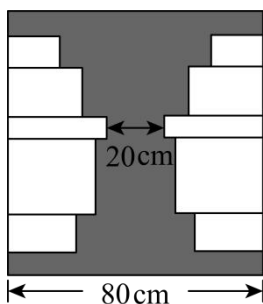
B、从 1, 2, 3, 4, 5 中随机抽取一个数，奇数有 3 个，偶数有 2 个，取得奇数的可能性较大，故该选项错误，不符合题意；

C、“小强一次掷出 3 颗质地均匀的骰子，3 颗全是 6 点朝上是随机事件”，故该选项正确，符合题意；

D、抛一枚质地均匀的硬币，正面朝上的概率为 $\frac{1}{2}$ ，连续抛此硬币 2 次有可能有 1 次正面朝上，故该选项错误，不符合题意；

故选：C.

7. 如图，正方形中有一个由若干个长方形组成的对称图案，其中正方形边长是 80cm，则图中阴影图形的周长是（ ）



- A. 440cm
- B. 320cm
- C. 280cm
- D. 160cm

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查平移的性质，利用平移的性质将阴影部分的周长转化为边长是 80cm 的正方形的周长加上

边长是80cm的正方形的两条边长再减去 $2 \times 20\text{cm}$ ，由此解答即可.

【详解】解：由图可得：阴影部分的周长为边长是80cm的正方形的周长加上边长是80cm的正方形的两条边长再减去 $2 \times 20\text{cm}$ ，

$\therefore$ 阴影图形的周长是： $4 \times 80 + 2 \times 80 - 2 \times 20 = 440\text{cm}$ ，

故选：A.

8. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数, $a < 0$) 的顶点为 $(1, 2)$. 小烨同学得出以下结论: ① $abc < 0$;

② 当 $x > 1$ 时, y 随 x 的增大而减小; ③ 若 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个根为 3, 则 $a = -\frac{1}{2}$; ④ 抛物线 $y = ax^2 + 2$

是由抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 向左平移 1 个单位, 再向下平移 2 个单位得到的. 其中一定正确的是 ()

A. ①②

B. ②③

C. ③④

D. ②④

【答案】B

【解析】

【分析】根据抛物线的顶点公式可得 $-\frac{b}{2a} = 1$, 结合 $a < 0$, $a + b + c = 2$, 由此可判断①; 由二次函数的增减性可判断②; 用 a 表示 b, c 的值, 再解方程即可判断③, 由平移法则即可判断④.

【详解】解：根据题意可得： $-\frac{b}{2a} = 1$,

$$\therefore -\frac{b}{2} = a,$$

$$\because a < 0,$$

$$\therefore -\frac{b}{2} < 0 \text{ 即 } b > 0,$$

$$\because a + b + c = 2, \quad b = -2a$$

$$\therefore c = 2 - a - b = 2 + a,$$

$\therefore c$ 的值可正也可负,

$\therefore$ 不能确定 abc 的正负; 故①错误;

$$\because a < 0,$$

$\therefore$ 抛物线开口向下, 且关于直线 $x = 1$ 对称,

当 $x > 1$ 时, y 随 x 的增大而减小; 故②正确;

$$\because b = -2a, c = 2 + a,$$

$$\therefore \text{抛物线为 } y = ax^2 - 2ax + 2 + a,$$

$$\because 0 = 9a - 6a + 2 + a,$$

$\therefore a = -\frac{1}{2}$, 故③正确;

$\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c = a(x-1)^2 + 2$,

将 $y = a(x-1)^2 + 2$ 向左平移 1 个单位得: $y = a(x-1+1)^2 + 2 = ax^2 + 2$,

$\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 + 2$ 是由抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 向左平移 1 个单位得到的, 故④错误;

$\therefore$ 正确的有②③,

故选: B.

【点睛】本题考查了二次函数的性质, 二次函数的平移, 二次函数图象上点的坐标特征, 二次函数与一元二次方程, 一元二次方程的解的定义, 用 a 表示 b 、 c 的值是本题的关键.

二、填空题 (本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分. 不需要写出解答过程, 请把答案直接填写在答题卡相应位置上)

9. 如果公元前 121 年记作 -121 年, 那么公元后 2024 年应记作_____年.

【答案】+2024

【解析】

【分析】本题考查正负数的意义, 根据正负数表示一对相反意义的量, 公元前为负, 则公元后为正, 进行作答即可.

【详解】解: 公元前 121 年记作 -121 年, 那么公元后 2024 年应记作 +2024 年;

故答案为: +2024.

10. 若式子 $\sqrt{x-2}$ 在实数范围内有意义, 则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq 2$

【解析】

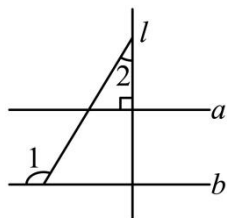
【详解】根据二次根式被开方数必须是非负数的条件,

要使 $\sqrt{x-2}$ 在实数范围内有意义, 必须 $x-2 \geq 0$,

$\therefore x \geq 2$.

故答案为: $x \geq 2$

11. 如图, 直线 $a \parallel b$, 直线 $l \perp a$, $\angle 1 = 120^\circ$, 则 $\angle 2 =$ _____°.



【答案】 30

【解析】

【分析】 本题考查平行线的性质，三角形的外角，根据两直线平行，同位角相等，求出 $\angle 3$ 的度数，外角的性质，得到 $\angle 3 = 90^\circ + \angle 2$ ，即可求出 $\angle 2$ 的度数.

【详解】 解： $\because a \parallel b$,

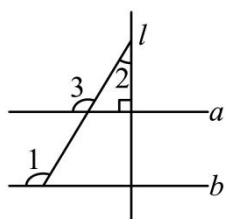
$$\therefore \angle 3 = \angle 1 = 120^\circ,$$

$$\because l \perp a,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 2 + 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = 30^\circ;$$

故答案为： 30.



12. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - x + c = 0$ 有两个相等的实数根，则 c 的值为_____.

【答案】 $\frac{1}{4}$ ## 0.25

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根的个数与根的判别式的关系. 根据题意得 $\Delta = 2^2 - 4c = 0$ ，进行计算即可得.

【详解】 解： 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - x + c = 0$ 有两个相等的实数根，

$$\Delta = 1^2 - 4c = 0,$$

$$\therefore c = \frac{1}{4},$$

故答案为： $\frac{1}{4}$.

13. 杠杆平衡时，“阻力×阻力臂=动力×动力臂”. 已知阻力和阻力臂分别为1600N和0.5m，动力为 $F(\text{N})$ ，动力臂为 $l(\text{m})$. 则动力 F 关于动力臂 l 的函数表达式为_____.

【答案】 $F = \frac{800}{l}$

【解析】

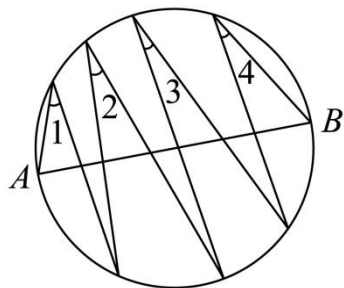
【分析】 本题考查了根据实际问题列反比例函数关系式，根据题意可得 $l \cdot F = 1600 \times 0.5$ ，进而即可求解，掌握杠杆原理是解题的关键.

【详解】 解：由题意可得， $l \cdot F = 1600 \times 0.5$ ，

$$\therefore l = 800F, \text{ 即 } F = \frac{800}{l},$$

故答案为： $F = \frac{800}{l}$.

14. 如图， AB 是圆的直径， $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 、 $\angle 4$ 的顶点均在 AB 上方的圆弧上， $\angle 1$ 、 $\angle 4$ 的一边分别经过点 A 、 B ，则 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 =$ _____ $^\circ$.



【答案】 90

【解析】

【分析】 本题考查圆周角定理，根据半圆的度数为 180° ，同弧所对的圆周角是圆心角的一半，进行求解即可.

【详解】 $\because AB$ 是圆的直径，

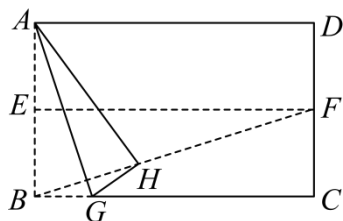
$\therefore AB$ 所对的弧是半圆，所对圆心角的度数为 180° ，

$\therefore \angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 、 $\angle 4$ 所对的弧的和为半圆，

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ,$$

故答案为： 90.

15. 如图，将一张矩形纸片 $ABCD$ 上下对折，使之完全重合，打开后，得到折痕 EF ，连接 BF . 再将矩形纸片折叠，使点 B 落在 BF 上的点 H 处，折痕为 AG . 若点 G 恰好为线段 BC 最靠近点 B 的一个五等分点， $AB = 4$ ，则 BC 的长为_____.



【答案】 $2\sqrt{10}$

【解析】

【分析】 本题考查矩形折叠，勾股定理，解直角三角形，设 AG 与 BF 交于点 M ， $BG = a$ ，则： $BC = 5a$ ，勾股定理求出 AG, BF ，等积法求出 BM ，根据 $\cos \angle FBC = \frac{BM}{BG} = \frac{BC}{BF}$ ，列出方程进行求解即可。

【详解】 解： 设 AG 与 BF 交于点 M ，

$\because$ 矩形 $ABCD$ ，

$\therefore \angle ABC = \angle C = 90^\circ, AB = CD = 4$ ，

$\because$ 翻折，

$\therefore CF = \frac{1}{2}CD = 2, AG \perp BH$ ，

设 $BG = a$ ，则： $BC = 5a$ ，

$\therefore AG = \sqrt{AB^2 + BG^2} = \sqrt{16 + a^2}$ ， $BF = \sqrt{BC^2 + CF^2} = \sqrt{25a^2 + 4}$ ，

$\because S_{\triangle ABG} = \frac{1}{2}AB \cdot BG = \frac{1}{2}AG \cdot BM$ ，

$\therefore BM = \frac{AB \cdot BG}{AG} = \frac{4a}{\sqrt{a^2 + 16}}$ ，

$\because \angle BMG = \angle C = 90^\circ$ ，

$\therefore \cos \angle FBC = \frac{BM}{BG} = \frac{BC}{BF}$ ，

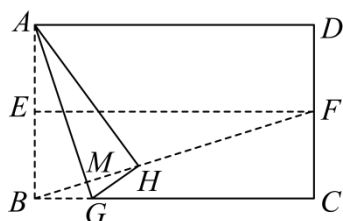
$\therefore BM \cdot BF = BG \cdot BC$ ，

$\therefore \frac{4a}{\sqrt{a^2 + 16}} \cdot \sqrt{25a^2 + 4} = a \cdot 5a$ ，

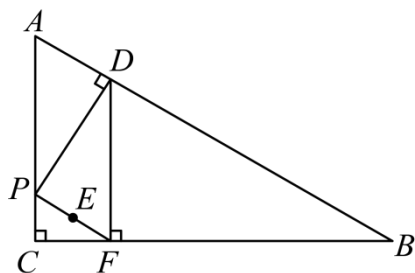
解得： $a = \frac{2}{5}\sqrt{10}$ ，经检验 $a = \frac{2}{5}\sqrt{10}$ 是原方程的解，

$\therefore BC = 5a = 2\sqrt{10}$ ；

故答案为： $2\sqrt{10}$ 。



16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ， $AC = 2$ ．点 P 在边 AC 上，过点 P 作 $PD \perp AB$ ，垂足为 D ，过点 D 作 $DF \perp BC$ ，垂足为 F ．连接 PF ，取 PF 的中点 E ．在点 P 从点 A 到点 C 的运动过程中，点 E 所经过的路径长为_____．

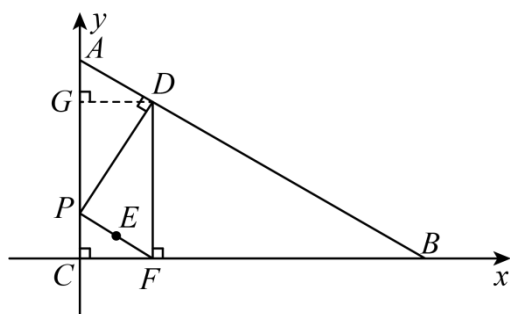


【答案】 $\frac{\sqrt{19}}{4}$ $\frac{1}{4}\sqrt{19}$

【解析】

【分析】 本题考查含 30° 度角的直角三角形，一次函数与几何的综合应用，矩形的判定和性质，两点间的距离，以 C 为原点，建立如图所示的坐标系，设 $AP = a$ ，则 $CP = 2 - a$ ，利用含 30° 度角的直角三角形的性质，求出点 E 的坐标，得到点 E 在直线 $y = 1 - \frac{4\sqrt{3}}{3}x$ 上运动，求出点 P 分别与 A, C 重合时，点 E 的坐标，利用两点间的距离公式进行求解即可．

【详解】 解：以 C 为原点，建立如图所示的坐标系，设 $AP = a$ ，则 $CP = 2 - a$ ，



则： $P(0, 2 - a)$ ，

$\because \angle B = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle A = 60^\circ$ ，

$\because PD \perp AB$ ，

$$\therefore \angle PDA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle APD = 30^\circ,$$

$$\therefore AD = \frac{1}{2}AP = \frac{a}{2},$$

过点 D 作 $DG \perp AC$ ，则： $\angle AGD = 90^\circ$ ，

$$\therefore AG = \frac{1}{2}AD = \frac{a}{4}, DG = \sqrt{3}AG = \frac{\sqrt{3}}{4}a,$$

$$\because DF \perp BC, DG \perp AC, \angle ACB = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $DGCF$ 为矩形，

$$\therefore DG = CF,$$

$$\therefore F\left(\frac{\sqrt{3}a}{4}, 0\right),$$

$\because E$ 为 P, F 的中点，

$$\therefore E\left(\frac{\sqrt{3}}{8}a, 1 - \frac{1}{2}a\right),$$

$$\text{令 } x = \frac{\sqrt{3}}{8}a, y = 1 - \frac{1}{2}a,$$

$$\text{则: } y = 1 - \frac{4\sqrt{3}}{3}x,$$

$$\therefore \text{点 } E \text{ 在直线 } y = 1 - \frac{4\sqrt{3}}{3}x \text{ 上运动,}$$

当点 P 与 C 重合时， $a = 0$ ，此时 $E(0, 1)$ ，

当点 P 与 A 重合时， $a = 2$ ，此时 $E\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, 0\right)$ ，

$$\therefore \text{点 } E \text{ 所经过的路径长为 } \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{19}}{4};$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{19}}{4}.$$

三、解答题（本大题共 11 小题，共 102 分，请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤，作图过程需保留作图痕迹）

17. 计算 $|-2| + (\pi - 1)^0 - \sqrt{16}$.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题考查实数的混合运算，零指数幂，先进行去绝对值，零指数幂和开方运算，再进行加减运算即可.

【详解】 解：原式 $= 2 + 1 - 4 = -1$

18. 解不等式 $\frac{x-1}{2} < x+1$ ，并把解集在数轴上表示出来.

【答案】 $x > -3$ ，图见解析

【解析】

【分析】 本题主要考查解一元一次不等式以及在数轴上表示不等式的解集，根据去分母，去括号，移项，合并可得不等式的解集，然后再在数轴上表示出它的解集即可

【详解】 解： $\frac{x-1}{2} < x+1$,

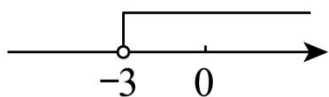
去分母，得 $x-1 < 2(x+1)$,

去括号，得 $x-1 < 2x+2$,

移项，得 $-1-2 < 2x-x$,

解得 $x > -3$.

这个不等式的解集在数轴上表示如下：



19. 下面是某同学计算 $\frac{1}{m-1} - \frac{2}{m^2-1}$ 的解题过程：

$$\text{解： } \frac{1}{m-1} - \frac{2}{m^2-1} = \frac{m+1}{(m+1)(m-1)} - \frac{2}{(m+1)(m-1)} \quad \text{①}$$

$$= (m+1) - 2 \quad \text{②}$$

$$= m-1 \quad \text{③}$$

上述解题过程从第几步开始出现错误？请写出完整的正确解题过程.

【答案】 从第②步开始出现错误，正确过程见解析

【解析】

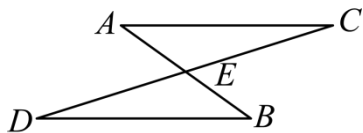
【分析】 本题考查异分母分式的加减运算，先通分，然后分母不变，分子相减，最后将结果化为最简分式即可. 掌握相应的计算法则，是解题的关键.

【详解】解：从第②步开始出现错误.

正确的解题过程为：

$$\text{原式} = \frac{m+1}{(m+1)(m-1)} - \frac{2}{(m+1)(m-1)} = \frac{m+1-2}{(m+1)(m-1)} = \frac{m-1}{(m+1)(m-1)} = \frac{1}{m+1}.$$

20. 如图， AB 与 CD 相交于点 E ， $EC = ED$ ， $AC \parallel BD$.



(1) 求证： $\triangle AEC \cong \triangle BED$ ；

(2) 用无刻度的直尺和圆规作图：求作菱形 $DMCN$ ，使得点 M 在 AC 上，点 N 在 BD 上. (不写作法，保留作图痕迹，标明字母)

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据平行线的性质得到 $\angle A = \angle B, \angle C = \angle D$ ，结合 $EC = ED$ ，利用 AAS 即可证明 $\triangle AEC \cong \triangle BED$ ；

(2) 作 CD 的垂直平分线，分别交 AC, BD 于点 M, N ，连接 DM, CN 即可.

【小问 1 详解】

证明： $\because AC \parallel BD$,

$$\therefore \angle A = \angle B, \angle C = \angle D.$$

$$\text{在 } \triangle AEC \text{ 和 } \triangle BED \text{ 中, } \begin{cases} \angle A = \angle B \\ \angle C = \angle D, \\ EC = ED \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEC \cong \triangle BED (\text{AAS});$$

【小问 2 详解】

解： $\because MN$ 是 CD 的垂直平分线，

$$\therefore MD = MC, DN = CN,$$

由 (1) 的结论可知， $\angle A = \angle B, AE = BE$,

$$\text{又} \because \angle AEM = \angle BEN,$$

则 $\triangle AEM \cong \triangle BEN$,

$$\therefore ME = NE,$$

$$\because CD \perp MN,$$

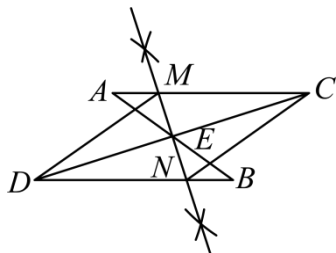
$\therefore CD$ 是 MN 的垂直平分线,

$$\therefore DM = DN, CM = CN,$$

$$\therefore DM = DN = CN = CM,$$

$\therefore$ 四边形 $DMCN$ 是菱形,

如图所示, 菱形 $DMCN$ 为所求.



【点睛】本题考查了垂直平分线的作法, 平行线的性质, 三角形全等的判定, 菱形的判定, 熟练掌握垂直平分线的作法及三角形全等的判定定理是解题的关键.

21. 为了解七年级男生体能情况, 某校随机抽取了七年级 20 名男生进行体能测试, 并对测试成绩 (单位: 分) 进行了统计分析:

【收集数据】

100 94 88 88 52 79 83 64 83 87
76 89 91 68 77 97 72 83 96 73

【整理数据】

该校规定: $x \leq 59$ 为不合格, $59 < x \leq 75$ 为合格, $75 < x \leq 89$ 为良好, $89 < x \leq 100$ 为优秀. (成绩用 x 表示)

等次	频数 (人数)	频率
不合格	1	0.05
合格	a	0.20
良好	10	0.50
优秀	5	b
合计	20	1.00

【分析数据】

此组数据的平均数是 82，众数是 83，中位数是 c ；

【解决问题】

- (1) 填空： $a =$ _____， $b =$ _____， $c =$ _____；
- (2) 若该校七年级共有 300 名男生，估计体能测试能达到优秀的男生约有多少人？
- (3) 根据上述统计分析情况，写一条你的看法.

【答案】 (1) 4, 0.25, 83

- (2) 75 人 (3) 男生体能状况良好

【解析】

【分析】 本题考查频数分布表和用样本估计总体：

- (1) 利用频数=频率×数据总数可求出 a 的值；利用频率=频数÷数据总数可求出 b ，最后根据中位数定义可求出 c ；
- (2) 用样本估计总体可得结论；
- (3) 结合分析，得出看法

【小问 1 详解】

解： $a = 20 \times 20\% = 4$ ；

$b = 5 \div 20 = 0.25$ ；

把 20 个数据按从小到大的顺序排列为：52, 64, 68, 72, 73, 76, 77, 79, 83, 83, 83, 87, 88, 88, 89, 91, 94, 96, 97, 100,

最中间的两个数据为 83, 83,

所以， $c = \frac{83+83}{2} = 83$ ，

故答案为：4, 0.25, 83；

【小问 2 详解】

解： $300 \times \frac{5}{20} = 75$ (人)

答：估计体能测试能达到优秀的男生约有 75 人；

【小问 3 详解】

解：从样本的平均数、中位数和众数可以看出，男生整体体能状况良好

22. 数学文化节猜谜游戏中，有四张大小、形状、质地都相同的字谜卡片，分别记作字谜 A 、字谜 B 、字谜 C 、字谜 D ，其中字谜 A 、字谜 B 是猜“数学名词”，字谜 C 、字谜 D 是猜“数学家人名”.

- (1) 若小军从中随机抽取一张字谜卡片，则小军抽取的字谜是猜“数学名词”的概率是_____；

(2) 若小军一次从中随机抽取两张字谜卡片，请用画树状图或列表的方法求小军抽取的字谜均是猜“数学家人名”的概率.

【答案】(1) $\frac{1}{2}$

(2) $\frac{1}{6}$

【解析】

【分析】(1) 根据简单地概率公式解答即可.

(2) 利用画树状图法解答即可.

本题考查了简单地概率公式，树状图法求概率，熟练掌握画树状图法求概率是解题的关键.

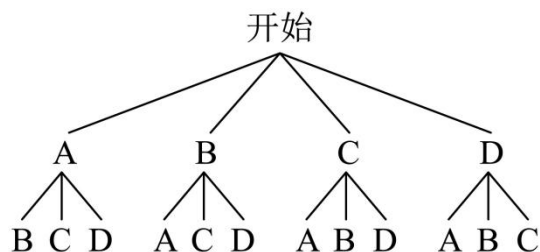
【小问 1 详解】

小军抽取的字谜是猜“数学名词”的概率是 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$,

故答案为: $\frac{1}{2}$.

【小问 2 详解】

根据题意，画树状图如下：



由图可知，共有 12 种等可能的结果，其中小军抽取的字谜均是猜“数学家人名”的有 2 种，

∴ 小军抽取的字谜均是猜“数学家人名”的概率是 $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

23. 我市将 5 月 21 日设立为连云港市“人才日”，以最大诚意礼遇人才，让人才与城市“双向奔赴”。活动主办方分两次共邮购了 200 把绘有西游文化的折扇作为当天一项活动的纪念品。折扇单价为 8 元，其中邮费和优惠方式如下表所示：

邮购数量	1~99	100 以上(含 100)
邮寄费用	总价的 10%	免费邮寄
折扇价格	不优惠	打九折

若两次邮购折扇共花费 1504 元，求两次邮购的折扇各多少把？

【答案】两次邮购的折扇分别是 40 把和 160 把

【解析】

【分析】本题主要考查一元一次方程的应用，首先判断出两次购买数量的范围，再设一次邮购折扇 $x(x < 100)$ 把，则另一次邮购折扇 $(200 - x)$ 把，根据“两次邮购折扇共花费 1504 元”列出一元一次方程，求解即可

【详解】解：若每次购买都是 100 把，则 $200 \times 8 \times 0.9 = 1440 \neq 1504$ 。

$\therefore$ 一次购买少于 100 把，另一次购买多于 100 把。

$\therefore$ 设一次邮购折扇 $x(x < 100)$ 把，则另一次邮购折扇 $(200 - x)$ 把。

由题意得： $8x(1 + 10\%) + 0.9 \times 8(200 - x) = 1504$ ，

解得 $x = 40$ 。

$\therefore 200 - x = 200 - 40 = 160$ 。

答：两次邮购的折扇分别是 40 把和 160 把。

24. 如图 1，在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y = kx + 1(k \neq 0)$ 的图像与反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图像交于点 A 、 B ，与 y 轴交于点 C ，点 A 的横坐标为 2。

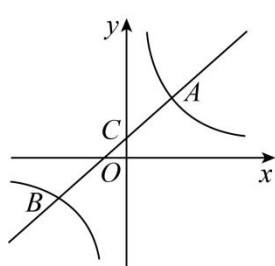


图1

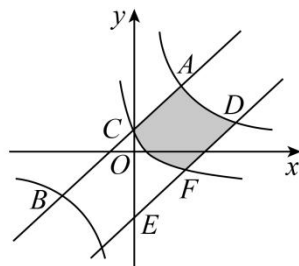


图2

(1) 求 k 的值；

(2) 利用图像直接写出 $kx + 1 < \frac{6}{x}$ 时 x 的取值范围；

(3) 如图 2，将直线 AB 沿 y 轴向下平移 4 个单位，与函数 $y = \frac{6}{x}(x > 0)$ 的图像交于点 D ，与 y 轴交于点 E ，再将函数 $y = \frac{6}{x}(x > 0)$ 的图像沿 AB 平移，使点 A 、 D 分别平移到点 C 、 F 处，求图中阴影部分的面积。

【答案】(1) $k = 1$

(2) $x < -3$ 或 $0 < x < 2$

(3) 8

【解析】

【分析】本题考查反比例函数与一次函数的综合应用：

- (1) 先求出 A 点坐标，再将 A 点代入一次函数的解析式中求出 k 的值即可；
- (2) 图像法求不等式的解集即可；
- (3) 根据平移的性质，得到阴影部分的面积即为 $\square ACFD$ 的面积，进行求解即可。

【小问 1 详解】

$\because$ 点 A 在 $y = \frac{6}{x}$ 的图像上，

$\therefore$ 当 $x = 2$ 时， $y = \frac{6}{2} = 3$ 。

$\therefore A(2, 3)$ ，

将点 $A(2, 3)$ 代入 $y = kx + 1$ ，得 $k = 1$ 。

【小问 2 详解】

由 (1) 知： $y = x + 1$ ，

$$\text{联立} \begin{cases} y = x + 1 \\ y = \frac{6}{x} \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases},$$

$\therefore B(-3, -2)$ ；

由图像可得： $kx + 1 < \frac{6}{x}$ 时 x 的取值范围为： $x < -3$ 或 $0 < x < 2$ 。

【小问 3 详解】

$\because y = x + 1$ ，

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时， $y = 1$ ，

$\therefore C(0, 1)$ ，

$\therefore$ 将直线 AB 沿 y 轴向下平移 4 个单位，

$\therefore CE = 4$ ，直线 DE 的解析式为： $y = x - 3$ ，设直线 DE 与 x 轴交于点 H

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时， $y = -3$ ，当 $y = 0$ 时， $x = 3$ ，

$\therefore H(3, 0)$ ， $E(0, -3)$ ，

$\therefore OF = OE = 3$ ，

$\therefore \angle FEC = 45^\circ$ ，

如图，过点 C 作 $CG \perp DE$ ，垂足为 G ，

$$\therefore CG = \frac{\sqrt{2}}{2} CE = 2\sqrt{2}.$$

又 $\because A(2,3), C(0,1),$

$$\therefore AC = 2\sqrt{2}.$$

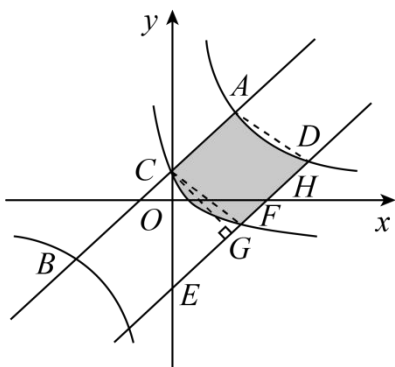
连接 $AD, CF,$

$\because$ 平移,

$$\therefore AC \parallel DF, AC = DF,$$

$\therefore$ 四边形 $ACFD$ 为平行四边形,

$\therefore$ 阴影部分面积等于 $\square ACFD$ 的面积, 即 $2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 8.$



25. 图 1 是古代数学家杨辉在《详解九章算法》中对“邑的计算”的相关研究. 数学兴趣小组也类比进行了

如下探究: 如图 2, 正八边形游乐城 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ 的边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ km, 南门 O 设立在 A_6A_7 边的正中央,

游乐城南侧有一条东西走向的道路 BM , A_6A_7 在 BM 上 (门宽及门与道路间距离忽略不计), 东侧有一条

南北走向的道路 BC , C 处有一座雕塑. 在 A_1 处测得雕塑在北偏东 45° 方向上, 在 A_2 处测得雕塑在北偏东

59° 方向上.

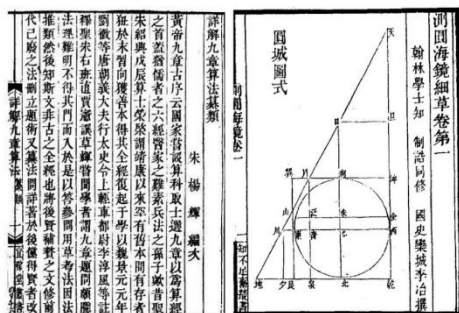


图1

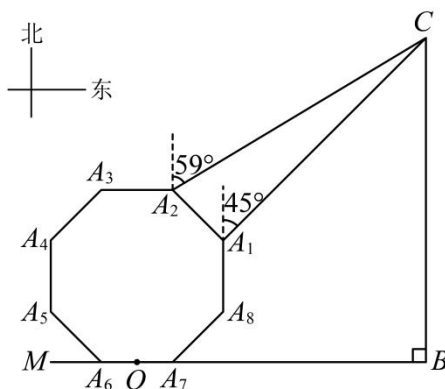


图2

(1) $\angle CA_1A_2 = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$, $\angle CA_2A_1 = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$;

(2) 求点 A_1 到道路 BC 的距离;

(3) 若该小组成员小李出南门 O 后沿道路 MB 向东行走, 求她离 B 处不超过多少千米, 才能确保观察雕塑不会受到游乐城的影响? (结果精确到 0.1km , 参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.41$, $\sin 76^\circ \approx 0.97$, $\tan 76^\circ \approx 4.00$, $\sin 59^\circ \approx 0.86$, $\tan 59^\circ \approx 1.66$)

【答案】(1) $\angle CA_1A_2 = 90^\circ$, $\angle CA_2A_1 = 76^\circ$

(2) 2.0 千米 (3) 2.4km

【解析】

【分析】本题考查正多边形的外角, 解直角三角形, 相似三角形的判定和性质:

(1) 求出正八边形的一个外角的度数, 再根据角的和差关系进行求解即可;

(2) 过点 A_1 作 $A_1D \perp BC$, 垂足为 D , 解 $\text{Rt}\triangle CA_2A_1$, 求出 $\therefore CA_1 = A_1A_2 \cdot \tan 76^\circ \approx \frac{\sqrt{2}}{2} \times 4.00 = 2\sqrt{2}$,

解 $\text{Rt}\triangle CA_1D$, 求出 $A_1D = CA_1 \cdot \cos 45^\circ = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2.0\text{km}$, 即可;

(3) 连接 CA_8 并延长交 BM 于点 E , 延长 A_1A_8 交 BE 于点 G , 过点 A_8 作 $A_8F \perp BC$, 垂足为 F , 解 $\text{Rt}\triangle A_7A_8G$, 求出 A_8G , 证明 $\text{Rt}\triangle CA_8F \sim \text{Rt}\triangle CEB$, 列出比例式进行求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\therefore$ 正八边形的一个外角的度数为: $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$,

$$\therefore \angle CA_1A_2 = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ, \quad \angle CA_2A_1 = 180^\circ - 45^\circ - 59^\circ = 76^\circ;$$

故答案为: $90, 76$;

【小问 2 详解】

过点 A_1 作 $A_1D \perp BC$, 垂足为 D .

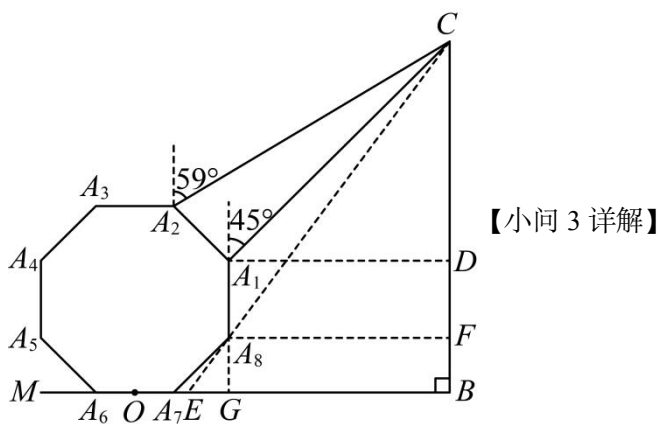
在 $\text{Rt}\triangle CA_2A_1$ 中, $A_2A_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\angle CA_2A_1 = 76^\circ$,

$$\therefore CA_1 = A_1A_2 \cdot \tan 76^\circ \approx \frac{\sqrt{2}}{2} \times 4.00 = 2\sqrt{2}.$$

在 $\text{Rt}\triangle CA_1D$ 中, $\angle CA_1D = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$,

$$\therefore A_1 D = CA_1 \cdot \cos 45^\circ = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2.0 \text{ km} .$$

答: 点 A_1 到道路 BC 的距离为 2.0 千米.



连接 CA_8 并延长交 BM 于点 E , 延长 AA_8 交 BE 于点 G , 过点 A_8 作 $A_8F \perp BC$, 垂足为 F .

∴ 正八边形的外角均为 45° .

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle A_7A_8G \text{ 中, } A_8G = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore FB = A_8G = \frac{1}{2}.$$

$$\because A_8F = A_1D = CD = 2, \quad DF = A_1A_8 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore CB = CD + DF + FB = \frac{5 + \sqrt{2}}{2}.$$

$$\therefore \angle CFA_8 = \angle B, \angle FCA_8 = \angle BCE,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle CA_8F \sim \text{Rt}\triangle CEB,$$

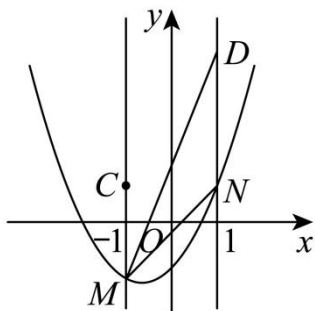
$$\therefore \frac{CF}{CB} = \frac{A_8F}{EB}, \quad \text{即} \quad \frac{2 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{5 + \sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{EB},$$

$$\because \sqrt{2} \approx 1.41,$$

$$\therefore EB \approx 2.4\text{km}.$$

答: 小李离点 B 不超过 2.4km , 才能确保观察雕塑不会受到游乐城的影响.

26. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y = ax^2 + bx - 1$ (a, b 为常数, $a > 0$).



- (1) 若抛物线与 x 轴交于 $A(-1, 0)$ 、 $B(4, 0)$ 两点，求抛物线对应的函数表达式；
- (2) 如图，当 $b = 1$ 时，过点 $C(-1, a)$ 、 $D(1, a + 2\sqrt{2})$ 分别作 y 轴的平行线，交抛物线于点 M 、 N ，连接 MN 、 MD 。求证： MD 平分 $\angle CMN$ ；
- (3) 当 $a = 1$ ， $b \leq -2$ 时，过直线 $y = x - 1 (1 \leq x \leq 3)$ 上一点 G 作 y 轴的平行线，交抛物线于点 H 。若 GH 的最大值为 4，求 b 的值。

【答案】(1) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - 1$

(2) 见解析 (3) -3

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法求解即可；

(2) 连接 CN ，根据题意，求得 $M(-1, a - 2)$ ， $N(1, a)$ ，进而求出 $CN = 2$ ， $CM = a - (a - 2) = 2$ ，利用勾股定理求出 $MN = 2\sqrt{2}$ ，求出 $DN = 2\sqrt{2}$ ，从而得到 $\angle NDM = \angle NMD$ ，结合平行线的性质即可证明结论；

(3) 设 $G(m, m - 1)$ ，则 $H(m, m^2 + bm - 1)$ ， $1 \leq m \leq 3$ ，求出当 $a = 1$ 时， $x_2 = 1 - b \geq 3$ ，得到点 G 在 H 的上方，设 $GH = t$ ，故 $t = -m^2 + (1 - b)m$ ，其对称轴为 $m = \frac{1 - b}{2}$ ，分为 $\frac{3}{2} \leq \frac{1 - b}{2} \leq 3$ 和 $\frac{1 - b}{2} > 3$ 两种情况讨论即可。

【小问 1 详解】

解：分别将 $A(-1, 0)$ ， $B(4, 0)$ 代入 $y = ax^2 + bx - 1$ ，

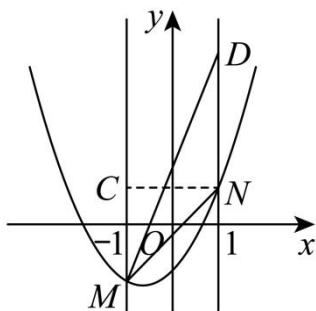
$$\text{得} \begin{cases} a - b - 1 = 0 \\ 16a + 4b - 1 = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{3}{4} \end{cases}.$$

$$\therefore \text{函数表达式为 } y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - 1;$$

【小问 2 详解】

解：连接 CN ，



$$Qb=1,$$

$$\therefore y = ax^2 + x - 1.$$

当 $x=-1$ 时, $y=a-2$, 即点 $M(-1, a-2)$, 当 $x=1$ 时, $y=a$, 即点 $N(1, a)$.

$$\therefore C(-1, a), N(1, a),$$

$$\therefore CN=2, CM=a-(a-2)=2, CM \perp CN,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle CMN \text{ 中, } MN = \sqrt{CM^2 + CN^2} = 2\sqrt{2}.$$

$$\therefore DN = a + 2\sqrt{2} - a = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore DN = MN,$$

$$\therefore \angle NDM = \angle NMD.$$

$$\therefore DN \parallel CM,$$

$$\therefore \angle NDM = \angle CMD.$$

$$\therefore \angle NMD = \angle CMD.$$

$$\therefore MD \text{ 平分 } \angle CMN.$$

【小问 3 详解】

解：设 $G(m, m-1)$, 则 $H(m, m^2 + bm - 1)$, $1 \leq m \leq 3$.

$$\text{当 } a=1 \text{ 时, } y = x^2 + bx - 1.$$

$$\text{令 } x^2 + bx - 1 = x - 1,$$

$$\text{解得 } x_1 = 0, x_2 = 1 - b.$$

$$\therefore b \leq -2,$$

$$\therefore x_2 = 1 - b \geq 3,$$

$\therefore$ 点 G 在 H 的上方 (如图 1).

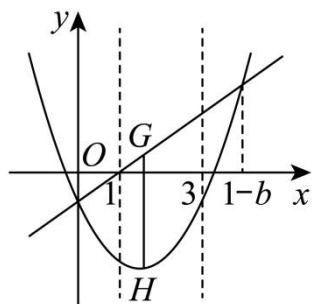


图1

设 $GH = t$,

$$\text{故 } t = -m^2 + (1-b)m,$$

其对称轴为 $m = \frac{1-b}{2}$, 且 $\frac{1-b}{2} \geq \frac{3}{2}$.

①当 $\frac{3}{2} \leq \frac{1-b}{2} \leq 3$ 时, 即 $-5 \leq b \leq -2$.

由图 2 可知:

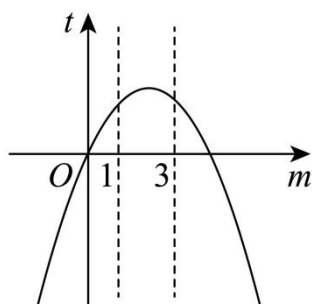


图2

当 $m = \frac{1-b}{2}$ 时, t 取得最大值 $\frac{(1-b)^2}{4} = 4$.

解得 $b = -3$ 或 $b = 5$ (舍去).

②当 $\frac{1-b}{2} > 3$ 时, 得 $b < -5$,

由图 3 可知:

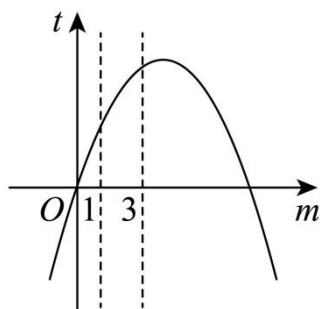


图3

当 $m = 3$ 时, t 取得最大值 $-9 + 3 - 3b = 4$.

解得 $b = -\frac{10}{3}$ (舍去).

综上所述, b 的值为 -3 .

【点睛】 本题考查抛物线与角度的综合问题, 抛物线与 x 轴的交点, 二次函数的解析式及最值等问题, 关键是利用二次函数的性质求最值.

27. 【问题情境】

(1) 如图 1, 圆与大正方形的各边都相切, 小正方形是圆的内接正方形, 那么大正方形面积是小正方形面积的几倍? 小昕将小正方形绕圆心旋转 45° (如图 2), 这时候就容易发现大正方形面积是小正方形面积的 _____ 倍. 由此可见, 图形变化是解决问题的有效策略;

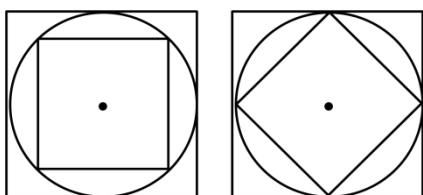


图1

图2

【操作实践】

(2) 如图 3, 图①是一个对角线互相垂直的四边形, 四边 a 、 b 、 c 、 d 之间存在某种数量关系. 小昕按所示步骤进行操作, 并将最终图形抽象成图 4. 请你结合整个变化过程, 直接写出图 4 中以矩形内一点 P 为端点的四条线段之间的数量关系;

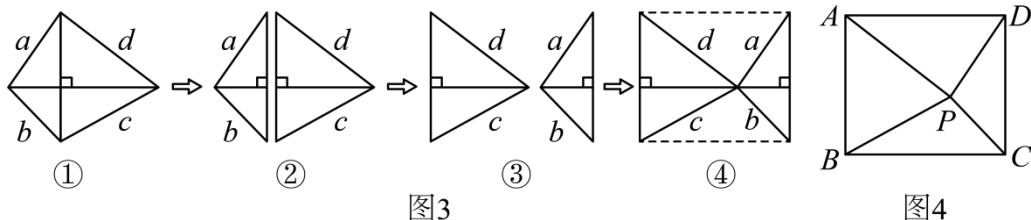


图3

图4

【探究应用】

(3) 如图 5, 在图 3 中“④”的基础上, 小昕将 $\triangle PDC$ 绕点 P 逆时针旋转, 他发现旋转过程中 $\angle DAP$ 存在最大值. 若 $PE = 8$, $PF = 5$, 当 $\angle DAP$ 最大时, 求 AD 的长;

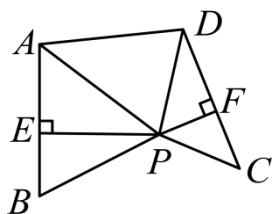


图5

(4) 如图 6, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 点 D, E 分别在边 AC 和 BC 上, 连接 DE, AE, BD . 若 $AC + CD = 5$, $BC + CE = 8$, 求 $AE + BD$ 的最小值.

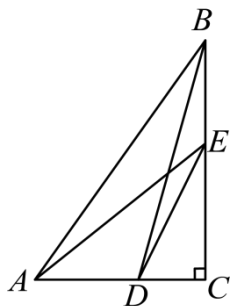


图6

【答案】(1) 2 (2) $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$ (3) $AD = \sqrt{39}$ (4) $\sqrt{89}$

【解析】

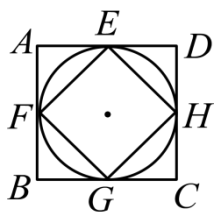
【分析】(1) 利用圆与正多边形的性质分别计算两个正方形的面积可得答案;

(2) 如图, 由 $EG \perp FH$, 证明 $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$, 再结合图形变换可得答案;

(3) 如图, 将 $\triangle PDC$ 绕点 P 逆时针旋转, 可得 D 在以 P 为圆心, PD 为半径的圆上运动, 可得当 AD 与 $\odot P$ 相切时, $\angle DAP$ 最大, 再进一步解答即可;

(4) 如图, 将 $\triangle BDC$ 沿 BC 对折, D 的对应点为 D_1 , 将 $\triangle AEC$ 沿 AC 对折, E 的对应点为 E_1 , 连接 D_1E_1 , 再将 $\triangle ABE_1$ 沿 AC 方向平移, 使 A 与 D_1 重合, 如图, 得 $\triangle B_1D_1E_2$, 由 (2) 可得: $AE + BD = D_1E_2 + BD_1$, 当 E_2, D_1, B 三点共线时, $AE + BD = D_1E_2 + BD_1$ 最短, 再进一步解答即可.

【详解】解: 如图,



$\because$ 正方形 $ABCD$, $EFGH$ 及圆为正方形 $ABCD$ 的内切圆, 为正方形 $EFGH$ 的外接正方形,

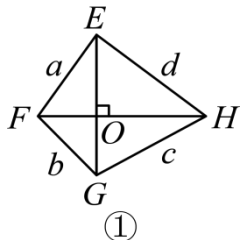
$\therefore$ 设 $AE = DE = DH = CH = CG = BG = AF = BF = m$, $\angle A = 90^\circ$,

$$\therefore AB = AD = 2m, \quad EF = \sqrt{m^2 + m^2} = \sqrt{2}m,$$

$$\therefore S_{\text{正方形}ABCD} = 4m^2, \quad S_{\text{正方形}EFGH} = (\sqrt{2}m)^2 = 2m^2,$$

$\therefore$ 大正方形面积是小正方形面积的 2 倍.

(2) 如图, $\because EG \perp FH$,

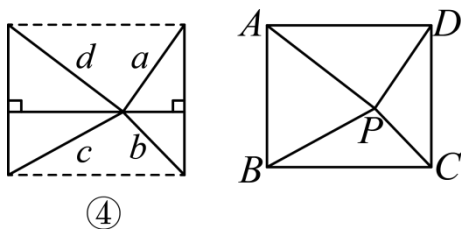


$$\therefore a^2 = OF^2 + OE^2, \quad c^2 = OG^2 + OH^2,$$

$$d^2 = OE^2 + OH^2, \quad b^2 = OF^2 + OG^2,$$

$$\therefore a^2 + c^2 = b^2 + d^2,$$

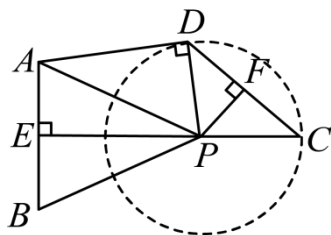
如图,



结合图形变换可得: $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$;

(3) 如图, $\because$ 将 $\triangle PDC$ 绕点 P 逆时针旋转,

$\therefore D$ 在以 P 为圆心, PD 为半径的圆上运动,



$\because A$ 为圆外一个定点,

$\therefore$ 当 AD 与 $\odot P$ 相切时, $\angle DAP$ 最大,

$\therefore PD \perp AD$,

$$\therefore AD^2 = AP^2 - PD^2,$$

由 (2) 可得: $AE = DF$,

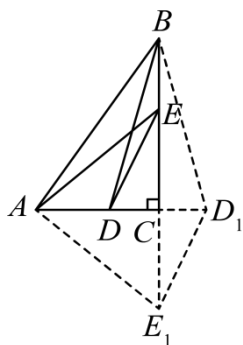
$$\therefore PE = 8, \quad PF = 5,$$

$$\begin{aligned}
 \therefore AD^2 &= AP^2 - PD^2 \\
 &= PE^2 + AE^2 - PF^2 - DF^2 \\
 &= 8^2 - 5^2 \\
 &= 39,
 \end{aligned}$$

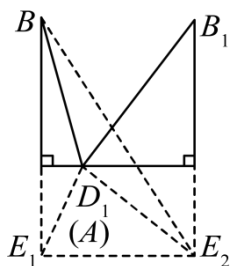
$$\therefore AD = \sqrt{39};$$

(4) 如图, 将 $\triangle BDC$ 沿 BC 对折, D 的对应点为 D_1 , 将 $\triangle AEC$ 沿 AC 对折, E 的对应点为 E_1 , 连接 D_1E_1 ,

$$\therefore CD = CD_1, \quad CE = CE_1,$$



再将 $\triangle ABE_1$ 沿 AC 方向平移, 使 A 与 D_1 重合, 如图, 得 $\triangle B_1D_1E_2$,



由 (2) 可得: $AE + BD = D_1E_2 + BD_1$,

$\therefore$ 当 E_2, D_1, B 三点共线时, $AE + BD = D_1E_2 + BD_1$ 最短,

$$\therefore AC + CD = 5, \quad BC + CE = 8,$$

$$\therefore E_1E_2 = 5, \quad BE_1 = 8,$$

$$\therefore BE_2 = \sqrt{BE_1^2 + E_1E_2^2} = \sqrt{8^2 + 5^2} = \sqrt{89};$$

$$\therefore AE + BD \text{ 的最小值为 } \sqrt{89};$$

【点睛】 本题考查的是勾股定理的应用, 轴对称的性质, 平移的性质, 旋转的性质, 圆与正多边形的关系, 切线的性质, 作出合适的辅助线是解本题的关键.

