

2024 年苏州市初中学业水平考试试卷

数学

注意事项：

1. 本试卷共 27 小题，满分 130 分，考试时间 120 分钟；
2. 答题前，考生务必将自己的姓名、考点名称、考场号、座位号用 0.5 毫米黑色墨水签字笔填写在答题卡相应位置上，并认真核对条形码上的准考证号、姓名是否与本人的相符；
3. 答选择题必须用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案；答非选择题必须用 0.5 毫米黑色墨水签字笔写在答题卡指定的位置上，不在答题区域内的答案一律无效，不得用其他笔答题；
4. 考生答题必须答在答题卡上，保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破，答在试卷和草稿纸上 一律无效。

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。请将选择题的答案用 2B 铅笔涂在答题卡相对应的位置上。

1. 用数轴上的点表示下列各数，其中与原点距离最近的是（ ）

- A. -3 B. 1 C. 2 D. 3

【答案】B

【解析】

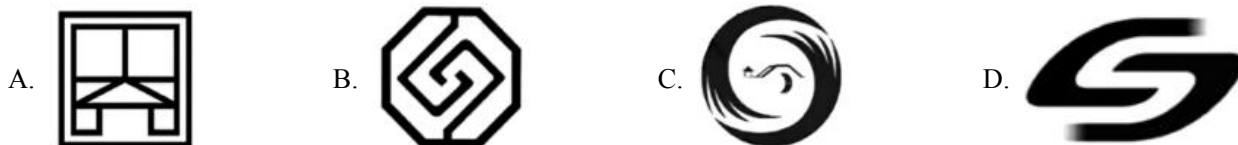
【分析】本题考查了绝对值的定义，一个数的绝对值就是表示这个数的点到原点的距离。到原点距离最远的点，即绝对值最大的点，首先求出各个数的绝对值，即可作出判断。

【详解】解：∵ $|-3|=3$ ， $|1|=1$ ， $|2|=2$ ， $|3|=3$ ， $1 < 2 < 3$ ，

∴ 与原点距离最近的是 1，

故选：B。

2. 下列图案中，是轴对称图形的是（ ）



【答案】A

【解析】

【分析】此题主要考查轴对称图形的概念，掌握轴对称图形的概念是解题的关键。

根据如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形叫做轴对称图形，这条直线叫做对称轴进行分析即可。

【详解】解：A、是轴对称图形，故此选项正确；

B、不是轴对称图形，故此选项错误；

C、不是轴对称图形，故此选项错误；

D、不是轴对称图形，故此选项错误.

故选：A.

3. 苏州市统计局公布，2023 年苏州市全年实现地区生产总值约为 2.47 万亿元，被誉为“最强地级市”. 数据“2470000000000”用科学记数法可表示为 ()

- A. 2.47×10^{10} B. 247×10^{10} C. 2.47×10^{12} D. 247×10^{12}

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查的是科学记数法-表示较大的数，把一个大于 10 的数记成 $a \times 10^n$ 的形式，其中 a 是整数数位只有一位的数， n 是正整数，这种记数法叫做科学记数法. 根据科学记数法-表示较大的数的方法解答.

【详解】解： $2470000000000 = 2.47 \times 10^{12}$,

故选：C.

4. 若 $a > b - 1$ ，则下列结论一定正确的是 ()

- A. $a + 1 < b$ B. $a - 1 < b$ C. $a > b$ D. $a + 1 > b$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查不等式的性质，掌握不等式的性质是解题的关键. 不等式的性质：不等式的两边同时加上或减去同一个数或字母，不等号方向不变；不等式的两边同时乘以或除以同一个正数，不等号方向不变；不等式的两边同时乘以或除以同一个负数，不等号方向改变.

直接利用不等式的性质逐一判断即可.

【详解】解： $a > b - 1$,

A、 $a + 1 > b$ ，故错误，该选项不合题意；

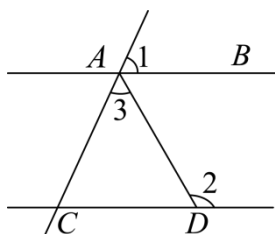
B、 $a - 1 > b - 2$ ，故错误，该选项不合题意；

C、无法得出 $a > b$ ，故错误，该选项不合题意；

D、 $a + 1 > b$ ，故正确，该选项符合题意；

故选：D.

5. 如图， $AB \parallel CD$ ，若 $\angle 1 = 65^\circ$ ， $\angle 2 = 120^\circ$ ，则 $\angle 3$ 的度数为 ()



- A. 45° B. 55° C. 60° D. 65°

【答案】B

【解析】

【分析】题目主要考查平行线的性质求角度，根据题意得出 $\angle BAD = 60^\circ$ ，再由平角即可得出结果，熟练掌握平行线的性质是解题关键

【详解】解： $\because AB \parallel CD$ ， $\angle 2 = 120^\circ$ ，

$$\therefore \angle 2 + \angle BAD = 180^\circ,$$

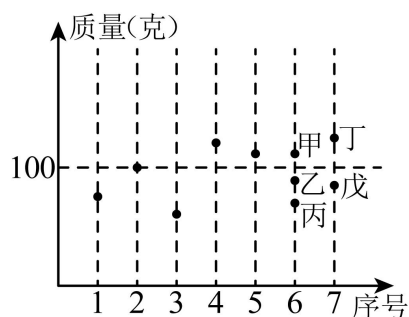
$$\therefore \angle BAD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = 65^\circ,$$

$$\therefore \angle 3 = 180^\circ - \angle 1 - \angle BAD = 55^\circ,$$

故选：B

6. 某公司拟推出由7个盲盒组成的套装产品, 现有10个盲盒可供选择, 统计这10个盲盒的质量如图所示. 序号为1到5号的盲盒已选定, 这5个盲盒质量的中位数恰好为100, 6号盲盒从甲、乙、丙中选择1个, 7号盲盒从丁、戊中选择1个, 使选定7个盲盒质量的中位数仍为100, 可以选择 ()



- A. 甲、丁 B. 乙、戊 C. 丙、丁 D. 丙、戊

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了用中位数做决策，由图像可知，要使选定7个盲盒质量的中位数仍为100，则需要选择100克以上的一个盲盒和100克以下的盲盒一个，根据选项即可得出正确的答案.

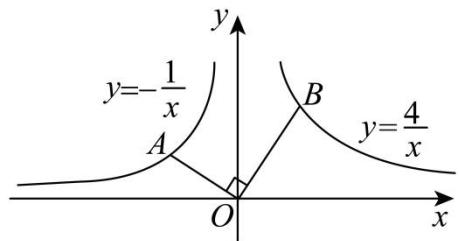
【详解】解：由图像可知，要使选定7个盲盒质量的中位数仍为100，

则需要从第6号盲盒和第7号盲盒里选择100克以上的一个盲盒和100克以下的盲盒一个，

因此可排除甲、丁，乙、戊，丙、戊

故选：C.

7. 如图，点 A 为反比例函数 $y = -\frac{1}{x} (x < 0)$ 图象上的一点，连接 AO ，过点 O 作 OA 的垂线与反比例 $y = \frac{4}{x} (x > 0)$ 的图象交于点 B ，则 $\frac{AO}{BO}$ 的值为 ()



A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

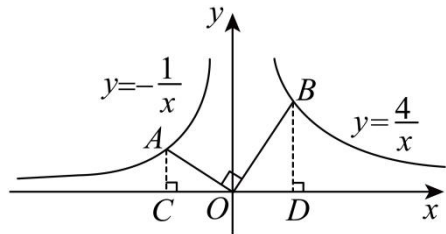
D. $\frac{1}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征，反比例函数系数 k 的几何意义，三角形相似的判定和性质，数形结合是解题的关键. 过 A 作 $AC \perp x$ 轴于 C ，过 B 作 $BD \perp x$ 轴于 D ，证明 $\triangle AOC \sim \triangle OBD$ ，利用相似三角形的面积比等于相似比的平方求解即可.

【详解】解：过 A 作 $AC \perp x$ 轴于 C ，过 B 作 $BD \perp x$ 轴于 D ，



$$\therefore S_{\triangle ACO} = \frac{1}{2} \times |-1| = \frac{1}{2}, \quad S_{\triangle BDO} = \frac{1}{2} \times |4| = 2, \quad \angle ACO = \angle ODB = 90^\circ,$$

$$\therefore OA \perp OB,$$

$$\therefore \angle AOC = \angle OBD = 90^\circ - \angle BOD,$$

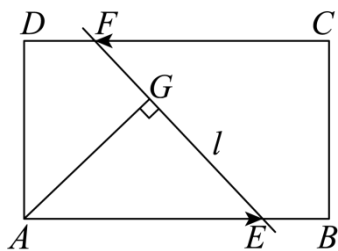
$$\therefore \triangle AOC \sim \triangle OBD,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ACO}}{S_{\triangle BDO}} = \left(\frac{OA}{OB}\right)^2, \quad \text{即} \quad \frac{1}{2} = \left(\frac{OA}{OB}\right)^2,$$

$$\therefore \frac{OA}{OB} = \frac{1}{2} \quad (\text{负值舍去}),$$

故选：A.

8. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB = \sqrt{3}$ ， $BC = 1$ ，动点 E, F 分别从点 A, C 同时出发，以每秒 1 个单位长度的速度沿 AB, CD 向终点 B, D 运动，过点 E, F 作直线 l ，过点 A 作直线 l 的垂线，垂足为 G ，则 AG 的最大值为 ()



A. $\sqrt{3}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. 2

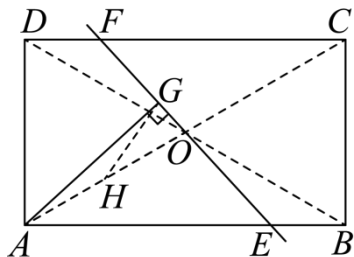
D. 1

【答案】D

【解析】

【分析】连接 AC, BD 交于点 O ，取 OA 中点 H ，连接 GH ，根据直角三角形斜边中线的性质，可以得出 G 的轨迹，从而求出 AG 的最大值.

【详解】解：连接 AC, BD 交于点 O ，取 OA 中点 H ，连接 GH ，如图所示：



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle ABC = 90^\circ, OA = OC, AB \parallel CD,$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2,$

$\therefore OA = OC = \frac{1}{2}AC = 1,$

$\therefore AB \parallel CD,$

$\therefore \angle EAO = \angle FCO,$

在 $\triangle AOE$ 与 $\triangle COF$ 中，

$$\begin{cases} AE = CF \\ \angle EAO = \angle FCO \\ OA = OC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle AOE = \angle COF,$$

$\therefore E, O, F$ 共线,

$\because AG \perp EF$, H 是 OB 中点,

$$\therefore \text{在 Rt} \triangle AGO \text{ 中, } GH = \frac{1}{2} AO = \frac{1}{2},$$

$\therefore G$ 的轨迹为以 H 为圆心, $\frac{1}{2}$ 为半径即 AO 为直径的圆弧.

$\therefore AG$ 的最大值为 AO 的长, 即 $AG_{\max} = AO = 1$.

故选: D.

【点睛】 本题主要考查了矩形的性质、动点轨迹、与圆有关的位置关系等知识, 根据矩形的性质以及直角三角形斜边中线的性质确定 G 的轨迹是本题解题的关键.

二、填空题: 本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分. 把答案直接填在答题卡相对应的位置上.

9. 计算: $x^3 \cdot x^2 =$ _____.

【答案】 x^5

【解析】

【分析】 利用同底数幂的乘法解题即可.

【详解】 解: $x^3 \cdot x^2 = x^{3+2} = x^5$,

故答案为: x^5 .

【点睛】 本题考查了同底数幂的乘法, 掌握相应的运算法则是解题的关键.

10. 若 $a = b + 2$, 则 $(b - a)^2 =$ _____.

【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查了求代数式的值, 把 $a = b + 2$ 整体代入化简计算即可.

【详解】 解: $\because a = b + 2$,

$$\therefore (b - a)^2$$

$$= [b - (b + 2)]^2$$

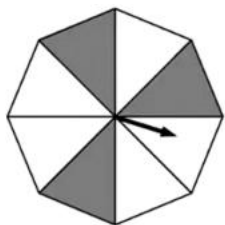
$$= (b - b - 2)^2$$

$$= (-2)^2$$

$$= 4,$$

故答案为：4.

11. 如图，正八边形转盘被分成八个面积相等的三角形，任意转动这个转盘一次，当转盘停止转动时，指针落在阴影部分的概率是_____.



【答案】 $\frac{3}{8}$

【解析】

【分析】首先确定在图中阴影区域的面积在整个面积中占的比例，根据这个比例即可求出指针指向阴影区域的概率.

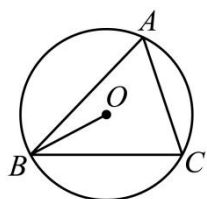
本题考查几何概率的求法：首先根据题意将代数关系用面积表示出来，一般用阴影区域表示所求事件（A），然后计算阴影区域的面积在总面积中占的比例，这个比例即事件（A）发生的概率.

【详解】解：∵转盘被分成八个面积相等的三角形，其中阴影部分占3份，

∴指针落在阴影区域的概率为 $\frac{3}{8}$,

故答案为： $\frac{3}{8}$.

12. 如图， $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形，若 $\angle OBC = 28^\circ$ ，则 $\angle A =$ _____.

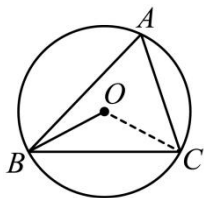


【答案】 62° ## 62 度

【解析】

【分析】本题考查了圆周角定理，等腰三角形的性质，三角形内角和定理，连接 OC ，利用等腰三角形的性质，三角形内角和定理求出 $\angle BOC$ 的度数，然后利用圆周角定理求解即可.

【详解】解：连接 OC ，



$$\because OB = OC, \angle OBC = 28^\circ,$$

$$\therefore \angle OCB = \angle OBC = 28^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = 180^\circ - \angle OCB - \angle OBC = 124^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \frac{1}{2} \angle BOC = 62^\circ,$$

故答案为： 62° .

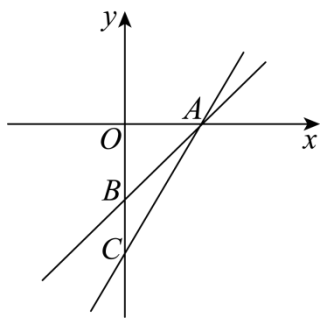
13. 直线 $l_1: y = x - 1$ 与 x 轴交于点 A , 将直线 l_1 绕点 A 逆时针旋转 15° , 得到直线 l_2 , 则直线 l_2 对应的函数表达式是_____.

【答案】 $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$

【解析】

【分析】 根据题意可求得 l_1 与坐标轴的交点 A 和点 B , 可得 $\angle OAB = \angle OBA = 45^\circ$, 结合旋转得到 $\angle OAC = 60^\circ$, 则 $\angle OCA = 30^\circ$, 求得 $OC = OA \times \tan \angle OCA$, 即有点 C , 利用待定系数法即可求得直线 l_2 的解析式.

【详解】 解：依题意画出旋转前的函数图象 l_1 和旋转后的函数图象 l_2 , 如图所示：



设 l_1 与 y 轴的交点为点 B ,

令 $x = 0$, 得 $y = -1$; 令 $y = 0$, 即 $x = 1$,

$$\therefore A(1, 0), B(0, -1),$$

$$\therefore OA = 1, OB = 1,$$

即 $\angle OAB = \angle OBA = 45^\circ$

$\therefore$ 直线 l_1 绕点 A 逆时针旋转 15° ，得到直线 l_2 ，

$$\therefore \angle OAC = 60^\circ, \quad \angle OCA = 30^\circ,$$

$$\therefore OC = OA \times \tan \angle OCA = \sqrt{3}OA = \sqrt{3},$$

则点 $C(0, -\sqrt{3})$ ，

设直线 l_2 的解析式为 $y = kx + b$ ，则

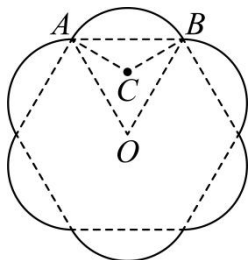
$$\begin{cases} 0 = k + b \\ -\sqrt{3} = b \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = \sqrt{3} \\ b = -\sqrt{3} \end{cases},$$

那么，直线 l_2 的解析式为 $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$ ，

故答案为： $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$.

【点睛】 本题主要考查一次函数与坐标轴的交点、直线的旋转、解直角三角形以及待定系数法求一次函数解析式，解题的关键是找到旋转后对应的直角边长，即可利用待定系数法求得解析式.

14. 铁艺花窗是园林设计中常见的装饰元素. 如图是一个花瓣造型的花窗示意图，由六条等弧连接而成，六条弧所对应的弦构成一个正六边形，中心为点 O ， $\widehat{AB}$ 所在圆的圆心 C 恰好是 $\triangle ABO$ 的内心，若 $AB = 2\sqrt{3}$ ，则花窗的周长（图中实线部分的长度）= _____.（结果保留 π ）

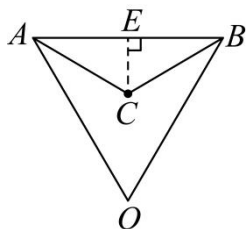


【答案】 8π

【解析】

【分析】 题目主要考查正多边形与圆，解三角形，求弧长，过点 C 作 $CE \perp AB$ ，根据正多边形的性质得出 $\triangle AOB$ 为等边三角形，再由内心的性质确定 $\angle CAO = \angle CAE = \angle CBE = 30^\circ$ ，得出 $\angle ACB = 120^\circ$ ，利用余弦得出 $AC = \frac{AE}{\cos 30^\circ} = 2$ ，再求弧长即可求解，熟练掌握这些基础知识点是解题关键.

【详解】 解：如图所示：过点 C 作 $CE \perp AB$ ，



∵ 六条弧所对应的弦构成一个正六边形,

$$\therefore \angle AOB = 60^\circ, OA = OB,$$

∴ $\triangle AOB$ 为等边三角形,

∵ 圆心 C 恰好是 $\triangle ABO$ 的内心,

$$\therefore \angle CAO = \angle CAE = \angle CBE = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = 120^\circ,$$

$$\therefore AB = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore AE = BE = \sqrt{3},$$

$$\therefore AC = \frac{AE}{\cos 30^\circ} = 2,$$

$$\therefore \widehat{AB} \text{ 的长为: } \frac{120 \times 2 \times \pi}{180} = \frac{4}{3}\pi,$$

$$\therefore \text{花窗的周长为: } \frac{4}{3}\pi \times 6 = 8\pi,$$

故答案为: 8π .

15. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象过点 $A(0, m)$, $B(1, -m)$, $C(2, n)$, $D(3, -m)$, 其中 m, n

为常数, 则 $\frac{m}{n}$ 的值为_____.

【答案】 $-\frac{3}{5}$ 或 -0.6

【解析】

【分析】 本题考查了待定系数法求二次函数解析式, 把 A 、 B 、 D 的坐标代入 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), 求出 a 、 b 、 c , 然后把 C 的坐标代入可得出 m 、 n 的关系, 即可求解.

【详解】 解: 把 $A(0, m)$, $B(1, -m)$, $D(3, -m)$ 代入 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$),

$$\text{得} \begin{cases} c = m \\ a + b + c = -m \\ 9a + 3b + c = -m \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = \frac{2}{3}m \\ b = -\frac{8}{3}m, \\ c = m \end{cases}$$

$$\therefore y = \frac{2}{3}mx^2 - \frac{8}{3}x + m,$$

$$\text{把 } C(2, n) \text{ 代入 } y = \frac{2}{3}mx^2 - \frac{8}{3}mx + m,$$

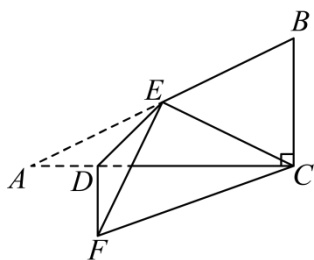
$$\text{得 } n = \frac{2}{3}m \times 2^2 - \frac{8}{3}m \times 2 + m,$$

$$\therefore n = -\frac{5}{3}m,$$

$$\therefore \frac{m}{n} = \frac{m}{-\frac{5}{3}m} = -\frac{3}{5},$$

$$\text{故答案为: } -\frac{3}{5}.$$

16. 如图, $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$, $CB = 5$, $CA = 10$, 点 D, E 分别在 AC, AB 边上, $AE = \sqrt{5}AD$, 连接 DE , 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 翻折, 得到 $\triangle FDE$, 连接 CE, CF . 若 $\triangle CEF$ 的面积是 $\triangle BEC$ 面积的 2 倍, 则 $AD =$ _____.



【答案】 $\frac{10}{3}$ 或 $3\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的判定与性质、折叠性质、等腰直角三角形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、三角形的面积公式等知识, 是综合性强的填空压轴题, 熟练掌握相关知识的联系与运用是解答的关键.

设 $AD = x$, $AE = \sqrt{5}x$, 根据折叠性质得 $DF = AD = x$, $\angle ADE = \angle FDE$, 过 E 作 $EH \perp AC$ 于 H , 设 EF 与 AC 相交于 M , 证明 $\triangle AHE \sim \triangle ACB$ 得到 $\frac{EH}{BC} = \frac{AH}{AC} = \frac{AE}{AB}$, 进而得到 $EH = x$, $AH = 2x$, 证明 $\text{Rt}\triangle EHD$

是等腰直角三角形得到 $\angle HDE = \angle HED = 45^\circ$, 可得 $\angle FDM = 90^\circ$, 证明 $\triangle FDM \cong \triangle EHM$ (AAS) 得到

$DM = MH = \frac{1}{2}x$ ，则 $CM = AC - AD - DM = 10 - \frac{3}{2}x$ ，根据三角形的面积公式结合已知可得

$\left(10 - \frac{3}{2}x\right) \cdot x = 2(25 - 5x)$ ，然后解一元二次方程求解 x 值即可。

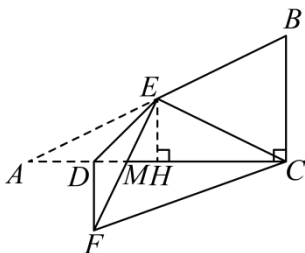
【详解】解：∵ $AE = \sqrt{5}AD$ ，

∴ 设 $AD = x$ ， $AE = \sqrt{5}x$ ，

∵ $\triangle ADE$ 沿 DE 翻折，得到 $\triangle FDE$ ，

∴ $DF = AD = x$ ， $\angle ADE = \angle FDE$ ，

过 E 作 $EH \perp AC$ 于 H ，设 EF 与 AC 相交于 M ，



则 $\angle AHE = \angle ACB = 90^\circ$ ，又 $\angle A = \angle A$ ，

∴ $\triangle AHE \sim \triangle ACB$ ，

∴ $\frac{EH}{BC} = \frac{AH}{AC} = \frac{AE}{AB}$ ，

∵ $CB = 5$ ， $CA = 10$ ， $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}$ ，

∴ $\frac{EH}{5} = \frac{AH}{10} = \frac{\sqrt{5}x}{5\sqrt{5}}$ ，

∴ $EH = x$ ， $AH = \sqrt{AE^2 - EH^2} = 2x$ ，则 $DH = AH - AD = x = EH$ ，

∴ $\text{Rt}\triangle EHD$ 是等腰直角三角形，

∴ $\angle HDE = \angle HED = 45^\circ$ ，则 $\angle ADE = \angle EDF = 135^\circ$ ，

∴ $\angle FDM = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$ ，

在 $\triangle FDM$ 和 $\triangle EHM$ 中，

$$\begin{cases} \angle FDM = \angle EHM = 90^\circ \\ \angle DMF = \angle HME \\ DF = EH \end{cases},$$

∴ $\triangle FDM \cong \triangle EHM$ (AAS)，

$$\therefore DM = MH = \frac{1}{2}x, \quad CM = AC - AD - DM = 10 - \frac{3}{2}x,$$

$$\therefore S_{\triangle CEF} = S_{\triangle CME} + S_{\triangle CMF} = \frac{1}{2}CM \cdot EH + \frac{1}{2}CM \cdot DF = \frac{1}{2}\left(10 - \frac{3}{2}x\right) \cdot x \times 2 = \left(10 - \frac{3}{2}x\right) \cdot x,$$

$$S_{\triangle BEC} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AEC} = \frac{1}{2} \times 10 \times 5 - \frac{1}{2} \times 10 \cdot x = 25 - 5x,$$

$\therefore \triangle CEF$ 的面积是 $\triangle BEC$ 面积的 2 倍,

$$\therefore \left(10 - \frac{3}{2}x\right) \cdot x = 2(25 - 5x), \text{ 则 } 3x^2 - 40x + 100 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = \frac{10}{3}, \quad x_2 = 10 \text{ (舍去),}$$

$$\text{即 } AD = \frac{10}{3},$$

$$\text{故答案为: } \frac{10}{3}.$$

三、解答题：本大题共 11 小题，共 82 分．把解答过程写在答题卡相对应的位置上，解答时应写出必要的计算过程、推演步骤或文字说明．作图时用 2B 铅笔或黑色墨水签字笔．

$$17. \text{ 计算: } |-4| + (-2)^0 - \sqrt{9}.$$

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查了实数的运算，利用绝对值的意义，零指数幂的意义，算术平方根的定义化简计算即可．

【详解】 解：原式 $= 4 + 1 - 3$

$$= 2.$$

$$18. \text{ 解方程组: } \begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}.$$

$$\text{【答案】 } \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

【解析】

【分析】 本题考查的是解二元一次方程组，解题的关键是掌握加减消元法求解．根据加减消元法解二元一次方程组即可．

$$\text{【详解】 解: } \begin{cases} 2x + y = 7 \text{ ①} \\ 2x - 3y = 3 \text{ ②} \end{cases}$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得, } 4y = 4, \text{ 解得, } y = 1.$$

将 $y=1$ 代入①得 $x=3$.

$$\therefore \text{方程组的解是} \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$$

19. 先化简，再求值： $\left(\frac{x+1}{x-2}+1\right) \div \frac{2x^2-x}{x^2-4}$. 其中 $x=-3$.

【答案】 $\frac{x+2}{x}, \frac{1}{3}$

【解析】

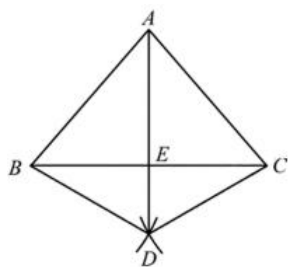
【分析】 本题考查了分式的化简求值，熟练掌握运算法则是解本题的关键. 原式括号中两项通分并利用同分母分式的加法法则计算，同时利用因式分解和除法法则变形，约分得到最简结果，把 x 的值代入计算即可求出值.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解： 原式} &= \left(\frac{x+1}{x-2} + \frac{x-2}{x-2}\right) \div \frac{x(2x-1)}{(x+2)(x-2)} \\ &= \frac{2x-1}{x-2} \cdot \frac{(x+2)(x-2)}{x(2x-1)} \\ &= \frac{x+2}{x}. \end{aligned}$$

$$\text{当 } x=-3 \text{ 时, 原式} = \frac{-3+2}{-3} = \frac{1}{3}.$$

20. 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ，分别以 B, C 为圆心，大于 $\frac{1}{2}BC$ 长为半径画弧，两弧交于点 D ，连接 BD ,

CD ， AD ， AD 与 BC 交于点 E .



(1) 求证： $\triangle ABD \cong \triangle ACD$;

(2) 若 $BD=2$ ， $\angle BDC=120^\circ$ ，求 BC 的长.

【答案】 (1) 见解析 (2) $BC=2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的判定与性质，等腰三角形的性质，解直角三角形等知识，解题的关键是：

(1) 直接利用SSS证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ 即可；

(2) 利用全等三角形的性质可求出 $\angle BDA = \angle CDA = 60^\circ$ ，利用三线合一性质得出 $DA \perp BC$ ， $BE = CE$ ，在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 中，利用正弦定义求出 BE ，即可求解.

【小问1 详解】

证明：由作图知： $BD = CD$.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中，

$$\therefore \begin{cases} AB = AC, \\ BD = CD, \\ AD = AD. \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD.$$

【小问2 详解】

解： $\because \triangle ABD \cong \triangle ACD$ ， $\angle BDC = 120^\circ$ ，

$$\therefore \angle BDA = \angle CDA = 60^\circ.$$

又 $\because BD = CD$ ，

$$\therefore DA \perp BC, \quad BE = CE.$$

$$\because BD = 2,$$

$$\therefore BE = BD \cdot \sin \angle BDA = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore BC = 2BE = 2\sqrt{3}.$$

21. 一个不透明的盒子里装有4张书签，分别描绘“春”，“夏”，“秋”，“冬”四个季节，书签除图案外都相同，并将4张书签充分搅匀.



(1) 若从盒子中任意抽取1张书签，恰好抽到“夏”的概率为_____；

(2) 若从盒子中任意抽取2张书签（先抽取1张书签，且这张书签不放回，再抽取1张书签），求抽取的书签恰好1张为“春”，1张为“秋”的概率。（请用画树状图或列表等方法说明理由）

【答案】(1) $\frac{1}{4}$

$$(2) \frac{1}{6}$$

【解析】

【分析】 本题考查了利用画树状图或列表的方法求两次事件的概率，解题的关键是：

(1) 用标有“夏”书签的张数除以书签的总张数即得结果；

(2) 利用树状图画出所有出现的结果数，再找出 1 张为“春”，1 张为“秋”的结果数，然后利用概率公式计算即可.

【小问 1 详解】

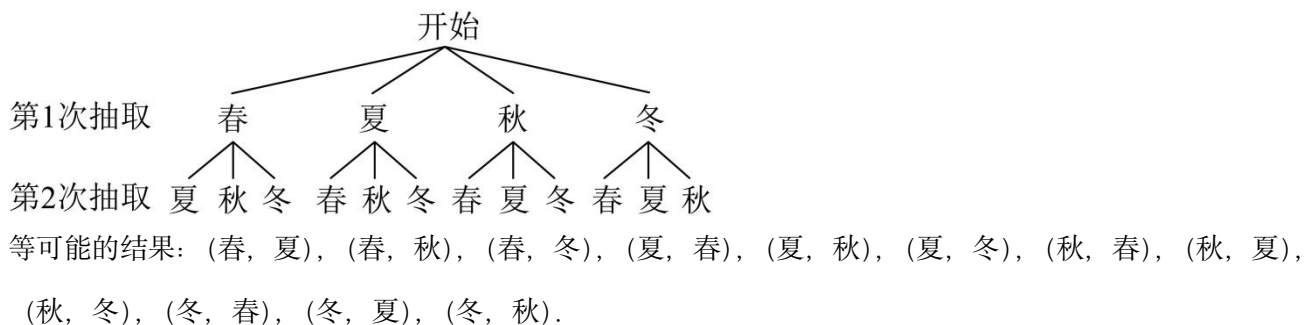
解：∵有 4 张书签，分别描绘“春”，“夏”，“秋”，“冬”四个季节，

∴恰好抽到“夏”的概率为 $\frac{1}{4}$ ，

故答案为： $\frac{1}{4}$ ；

【小问 2 详解】

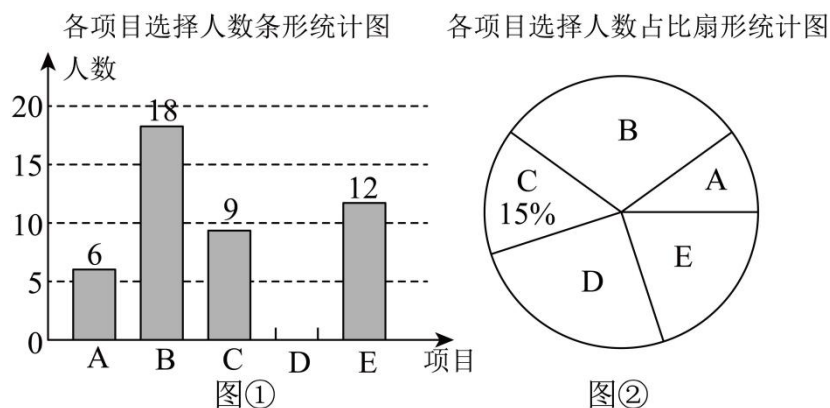
解：用树状图列出所有等可能的结果：



∴在 12 个等可能的结果中，抽取的书签 1 张为“春”，1 张为“秋”出现了 2 次，

∴ P (抽取的书签恰好 1 张为“春”，1 张为“秋”) = $\frac{1}{6}$.

22. 某校计划在七年级开展阳光体育锻炼活动，开设以下五个球类项目： A (羽毛球)， B (乒乓球)， C (篮球)， D (排球)， E (足球)，要求每位学生必须参加，且只能选择其中一个项目. 为了了解学生对这五个项目的选择情况，学校从七年级全体学生中随机抽取部分学生进行问卷调查，对调查所得到的数据进行整理、描述和分析，部分信息如下：



根据以上信息，解决下列问题：

- (1) 将图①中的条形统计图补充完整（画图并标注相应数据）；
- (2) 图②中项目 E 对应的圆心角的度数为 $\quad\quad\quad^\circ$ ；
- (3) 根据抽样调查结果，请估计本校七年级 800 名学生中选择项目 B （乒乓球）的人数。

【答案】(1) 见解析 (2) 72

- (3) 本校七年级 800 名学生中选择项目 B （乒乓球）的人数约为 240 人

【解析】

【分析】本题考查扇形统计图、条形统计图、用样本估计总体，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答。

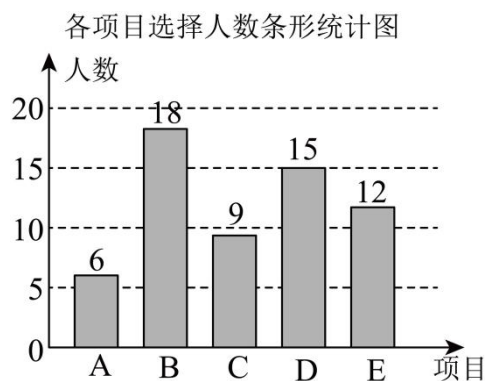
- (1) 利用 C 组的人数除以所占百分比求出总人数，然后用总人数减去 A 、 B 、 C 、 E 组的人数，最后补图即可；
- (2) 用 360° 乘以 E 组所占百分比即可；
- (3) 用 800 乘以 B 组所占百分比即可。

【小问 1 详解】

解：总人数为 $9 \div 15\% = 60$ ，

D 组人数为 $60 - 6 - 18 - 9 - 12 = 15$ ，

补图如下：



【小问 2 详解】

解： $360^\circ \times \frac{12}{60} = 72^\circ$ ，

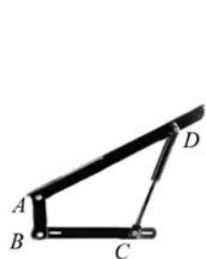
故答案为：72；

【小问3详解】

解： $800 \times \frac{18}{60} = 240$ （人）.

答：本校七年级800名学生中选择项目B（乒乓球）的人数约为240人.

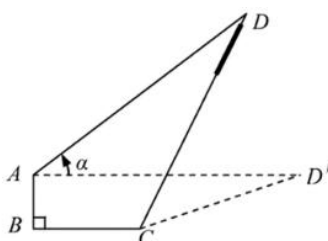
23. 图①是某种可调节支撑架， BC 为水平固定杆，竖直固定杆 $AB \perp BC$ ，活动杆 AD 可绕点 A 旋转， CD 为液压可伸缩支撑杆，已知 $AB = 10\text{cm}$ ， $BC = 20\text{cm}$ ， $AD = 50\text{cm}$.



图①



图②



图③

(1) 如图②，当活动杆 AD 处于水平状态时，求可伸缩支撑杆 CD 的长度（结果保留根号）；

(2) 如图③，当活动杆 AD 绕点 A 由水平状态按逆时针方向旋转角度 α ，且 $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ （ α 为锐角），求此时可伸缩支撑杆 CD 的长度（结果保留根号）.

【答案】(1) $CD = 10\sqrt{10}\text{cm}$

(2) $CD = 20\sqrt{5}\text{cm}$

【解析】

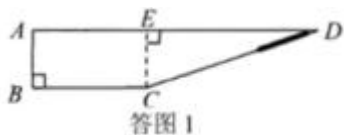
【分析】本题考查了解直角三角形的应用，解题的关键是：

(1) 过点 C 作 $CE \perp AD$ ，垂足为 E ，判断四边形 $ABCE$ 为矩形，可求出 CE ， DE ，然后在在 $\text{Rt}\triangle CED$ 中，根据勾股定理求出 CD 即可；

(2) 过点 D 作 $DF \perp BC$ ，交 BC 的延长线于点 F ，交 AD' 于点 G . 判断四边形 $ABFG$ 为矩形，得出 $\triangle AGD = 90^\circ$. 在 $\text{Rt}\triangle AGD$ 中，利用正切定义求出 $DG = \frac{3}{4}AG$. 利用勾股定理求出 $AD = \frac{5}{4}AG$ ，由 $AD = 50$ ，可求出 $BF = AG = 40$ ， $FG = AB = 10$ ， $CF = 20$ ， $DF = 40$. 在 $\text{Rt}\triangle CFD$ 中，根据勾股定理求出 CD 即可.

【小问1详解】

解：如图，过点 C 作 $CE \perp AD$ ，垂足为 E ，



由题意可知, $\angle B = \angle A = 90^\circ$,

又 $\because CE \perp AD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCE$ 为矩形.

$\because AB = 10$, $BC = 20$,

$\therefore AE = 20$, $CE = 10$.

$\because AD = 50$,

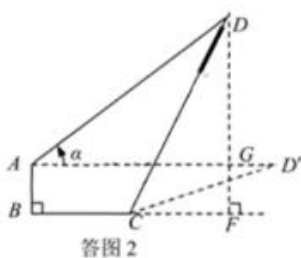
$\therefore ED = 30$.

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle CED$ 中, $CD = \sqrt{CE^2 + ED^2} = \sqrt{10^2 + 30^2} = 10\sqrt{10}$.

即可伸缩支撑杆 CD 的长度为 $10\sqrt{10}\text{cm}$;

【小问 2 详解】

解: 过点 D 作 $DF \perp BC$, 交 BC 的延长线于点 F , 交 AD' 于点 G .



由题意可知, 四边形 $ABFG$ 为矩形,

$\therefore \triangle AGD = 90^\circ$.

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle AGD$ 中, $\tan \alpha = \frac{DG}{AG} = \frac{3}{4}$,

$\therefore DG = \frac{3}{4}AG$.

$\therefore AD = \sqrt{AG^2 + DG^2} = \frac{5}{4}AG$,

$\because AD = 50$,

$\therefore AG = 40$, $DG = 30$.

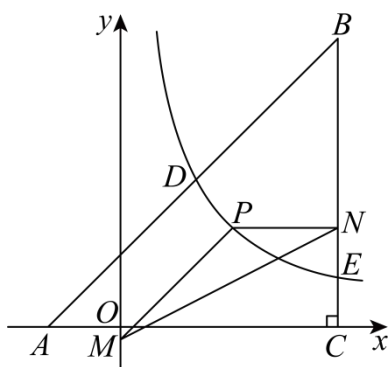
$\therefore BF = AG = 40$, $FG = AB = 10$,

$\therefore CF = 20$, $DF = 40$.

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle CFD$ 中, $CD = \sqrt{CF^2 + DF^2} = \sqrt{20^2 + 40^2} = 20\sqrt{5}$.

即可伸缩支撑杆 CD 的长度为 $20\sqrt{5}\text{cm}$.

24. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AC = BC$, $\angle ACB = 90^\circ$, $A(-2, 0)$, $C(6, 0)$, 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0, x > 0$) 的图象与 AB 交于点 $D(m, 1)$, 与 BC 交于点 E .



(1) 求 m , k 的值;

(2) 点 P 为反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0, x > 0$) 图象上一动点 (点 P 在 D , E 之间运动, 不与 D , E 重合), 过点 P 作 $PM \parallel AB$, 交 y 轴于点 M , 过点 P 作 $PN \parallel x$ 轴, 交 BC 于点 N , 连接 MN , 求 $\triangle PMN$ 面积的最大值, 并求出此时点 P 的坐标.

【答案】(1) $m = 2$, $k = 8$

(2) $S_{\triangle PMN}$ 有最大值 $\frac{9}{2}$, 此时 $P\left(3, \frac{8}{3}\right)$

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数, 反比例函数, 等腰三角形的判定与性质等知识, 解题的关键是:

(1) 先求出 B 的坐标, 然后利用待定系数法求出直线 AB 的函数表达式, 把 D 的坐标代入直线 AB 的函数表达式求出 m , 再把 D 的坐标代入反比例函数表达式求出 k 即可;

(2) 延长 NP 交 y 轴于点 Q , 交 AB 于点 L . 利用等腰三角形的判定与性质可得出 $QM = QP$, 设点 P 的坐标为 $\left(t, \frac{8}{t}\right)$, ($2 < t < 6$), 则可求出 $S_{\triangle PMN} = \frac{1}{2} \cdot (6-t) \cdot t$, 然后利用二次函数的性质求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because A(-2, 0)$, $C(6, 0)$,

$\therefore AC = 8$.

又 $\because AC = BC$,

$\therefore BC = 8$.

$\because \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore$ 点 $B(6, 8)$.

设直线 AB 的函数表达式为 $y = ax + b$,

将 $A(-2, 0)$, $B(6, 8)$ 代入 $y = ax + b$, 得 $\begin{cases} -2a + b = 0 \\ 6a + b = 8 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$,

$\therefore$ 直线 AB 的函数表达式为 $y = x + 2$.

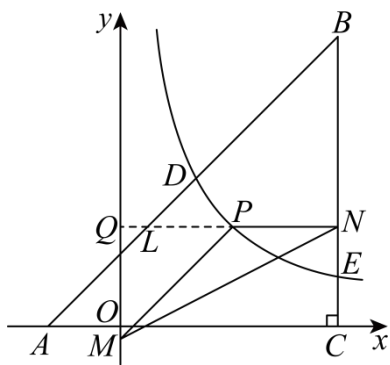
将点 $D(m, 4)$ 代入 $y = x + 2$, 得 $m = 2$.

$\therefore D(2, 4)$.

将 $D(2, 4)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$, 得 $k = 8$.

【小问 2 详解】

解: 延长 NP 交 y 轴于点 Q , 交 AB 于点 L .



$\because AC = BC$, $\angle BCA = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAC = 45^\circ$.

$\because PN \parallel x$ 轴,

$\therefore \angle BLN = \angle BAC = 45^\circ$, $\angle NQM = 90^\circ$.

$\because PM \parallel AB$,

$\therefore \angle MPL = \angle BLP = 45^\circ$,

$$\therefore \angle QMP = \angle QPM = 45^\circ,$$

$$\therefore QM = QP.$$

设点 P 的坐标为 $\left(t, \frac{8}{t}\right)$, $(2 < t < 6)$, 则 $PQ = t$, $PN = 6 - t$.

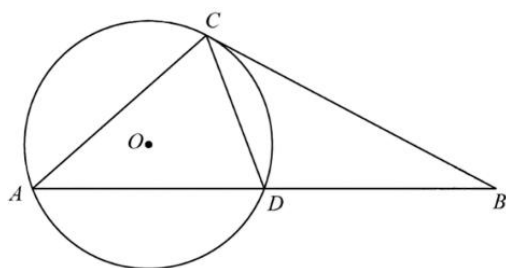
$$\therefore MQ = PQ = t.$$

$$\therefore S_{\triangle PMN} = \frac{1}{2} \cdot PN \cdot MQ = \frac{1}{2} \cdot (6 - t) \cdot t = -\frac{1}{2}(t - 3)^2 + \frac{9}{2}.$$

$$\therefore \text{当 } t = 3 \text{ 时, } S_{\triangle PMN} \text{ 有最大值 } \frac{9}{2}, \text{ 此时 } P\left(3, \frac{8}{3}\right).$$

25. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB = 4\sqrt{2}$, D 为 AB 中点, $\angle BAC = \angle BCD$, $\cos \angle ADC = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\odot O$ 是 $\triangle ACD$

的外接圆.



(1) 求 BC 的长;

(2) 求 $\odot O$ 的半径.

【答案】(1) $BC = 4$

(2) $\odot O$ 的半径为 $\frac{4\sqrt{7}}{7}$

【解析】

【分析】本题考查相似三角形的判定及性质, 解直角三角形, 圆周角定理.

(1) 易证 $\triangle BAC \sim \triangle BCD$, 得到 $\frac{BC}{BD} = \frac{BA}{BC}$, 即可解答;

(2) 过点 A 作 $AE \perp CD$, 垂足为 E , 连接 CO , 并延长交 $\odot O$ 于 F , 连接 AF , 在 $\text{Rt}\triangle AED$ 中, 通过解直角三角形得到 $DE = 1$, $AE = \sqrt{7}$, 由 $\triangle BAC \sim \triangle BCD$ 得到 $\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BC} = \sqrt{2}$. 设 $CD = x$, 则 $AC = \sqrt{2}x$, $CE = x - 1$, 在 $\text{Rt}\triangle ACE$ 中, 根据勾股定理构造方程, 求得 $CD = 2$, $AC = 2\sqrt{2}$, 由 $\angle AFC = \angle ADC$ 得到 $\sin \angle AFC = \sin \angle ADC$, 根据正弦的定义即可求解.

【小问 1 详解】

解： $\because \angle BAC = \angle BCD, \angle B = \angle B,$

$$\therefore \triangle BAC \sim \triangle BCD.$$

$$\therefore \frac{BC}{BD} = \frac{BA}{BC}, \text{ 即 } BC^2 = AB \cdot BD$$

$\because AB = 4\sqrt{2}, D$ 为 AB 中点,

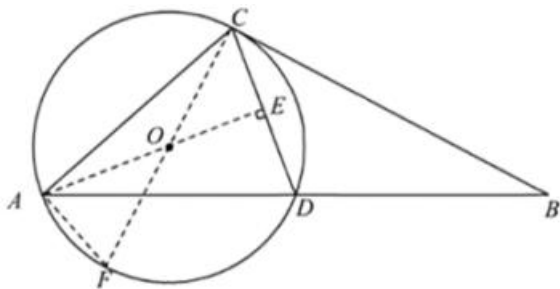
$$\therefore BD = AD = \frac{1}{2}AB = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore BC^2 = AB \cdot BD = 4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 16$$

$$\therefore BC = 4.$$

【小问 2 详解】

解：过点 A 作 $AE \perp CD$ ，垂足为 E ，连接 CO ，并延长交 $\odot O$ 于 F ，连接 AF ，



$$\because \text{在 Rt}\triangle AED \text{ 中, } \cos \angle CDA = \frac{DE}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{又} \because AD = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore DE = 1.$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle AED \text{ 中, } AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = \sqrt{7}.$$

$$\because \triangle BAC \sim \triangle BCD,$$

$$\therefore \frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BC} = \sqrt{2}.$$

$$\text{设 } CD = x, \text{ 则 } AC = \sqrt{2}x, CE = CD - DE = x - 1.$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ACE \text{ 中, } AC^2 = CE^2 + AE^2,$$

$$\therefore (\sqrt{2}x)^2 = (x-1)^2 + (\sqrt{7})^2, \text{ 即 } x^2 + 2x - 8 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = 2, x_2 = -4 \text{ (舍去)}.$$

$$\therefore CD = 2, AC = 2\sqrt{2}.$$

$$\because \overline{AC} = \overline{AC},$$

$$\therefore \angle AFC = \angle ADC.$$

$\because CF$ 为 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle CAF = 90^\circ.$$

$$\therefore \sin \angle AFC = \frac{AC}{CF} = \sin \angle CDA = \frac{AE}{AD} = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

$$\therefore CF = \frac{8\sqrt{7}}{7}, \text{ 即 } \odot O \text{ 的半径为 } \frac{4\sqrt{7}}{7}.$$

26. 某条城际铁路线共有 A, B, C 三个车站, 每日上午均有两班次列车从 A 站驶往 C 站, 其中 $D1001$ 次列车从 A 站始发, 经停 B 站后到达 C 站, $G1002$ 次列车从 A 站始发, 直达 C 站, 两个车次的列车在行驶过程中保持各自的行驶速度不变. 某校数学学习小组对列车运行情况进行研究, 收集到列车运行信息如下表所示.

列车运行时刻表

车次	A 站	B 站		C 站
	发车时刻	到站时刻	发车时刻	到站时刻
D1001	8: 00	9: 30	9: 50	10: 50
G1002	8: 25	途经 B 站, 不停车		10: 30

请根据表格中的信息, 解答下列问题:

(1) $D1001$ 次列车从 A 站到 B 站行驶了_____分钟, 从 B 站到 C 站行驶了_____分钟;

(2) 记 $D1001$ 次列车的行驶速度为 v_1 , 离 A 站的路程为 d_1 ; $G1002$ 次列车的行驶速度为 v_2 , 离 A 站的路程为 d_2 .

$$\textcircled{1} \frac{v_1}{v_2} = \underline{\hspace{2cm}};$$

②从上午 8: 00 开始计时, 时长记为 t 分钟 (如: 上午 9: 15, 则 $t = 75$), 已知 $v_1 = 240$ 千米/小时 (可换算为 4 千米/分钟), 在 $G1002$ 次列车的行驶过程中 ($25 \leq t \leq 150$), 若 $|d_1 - d_2| = 60$, 求 t 的值.

【答案】(1) 90, 60

(2) ① $\frac{5}{6}$; ② $t = 75$ 或 125

【解析】

【分析】本题考查了一元一次方程的应用，速度、时间、路程的关系，明确题意，合理分类讨论是解题的关键.

(1) 直接根据表中数据解答即可;

(2) ①分别求出 $D1001$ 次列车、 $G1002$ 次列车从 A 站到 C 站的时间，然后根据路程等于速度乘以时间求解即可;

②先求出 v_2 ， A 与 B 站之间的路程， $G1002$ 次列车经过 B 站时，对应 t 的值，从而得出当 $90 \leq t \leq 110$ 时， $D1001$ 次列车在 B 站停车. $G1002$ 次列车经过 B 站时， $D1001$ 次列车正在 B 站停车，然后分 $25 \leq t < 90$ ， $90 \leq t \leq 100$ ， $100 < t \leq 110$ ， $110 < t \leq 150$ 讨论，根据题意列出关于 t 的方程求解即可.

【小问 1 详解】

解: $D1001$ 次列车从 A 站到 B 站行驶了 90 分钟，从 B 站到 C 站行驶了 60 分钟，

故答案为: 90, 60;

【小问 2 详解】

解: ①根据题意得: $D1001$ 次列车从 A 站到 C 站共需 $90 + 60 = 150$ 分钟，

$G1002$ 次列车从 A 站到 C 站共需 $35 + 60 + 30 = 125$ 分钟，

$$\therefore 150v_1 = 125v_2,$$

$$\therefore \frac{v_1}{v_2} = \frac{5}{6},$$

$$\text{故答案为: } \frac{5}{6};$$

$$\text{②} \because v_1 = 4 \text{ (千米/分钟)}, \frac{v_1}{v_2} = \frac{5}{6},$$

$$\therefore v_2 = 4.8 \text{ (千米/分钟)}.$$

$$\therefore 4 \times 90 = 360,$$

$\therefore A$ 与 B 站之间的路程为 360.

$$\therefore 360 \div 4.8 = 75,$$

$\therefore$ 当 $t = 100$ 时， $G1002$ 次列车经过 B 站.

由题意可知，当 $90 \leq t \leq 110$ 时， $D1001$ 次列车在 B 站停车.

$\therefore G1002$ 次列车经过 B 站时， $D1001$ 次列车正在 B 站停车.

i. 当 $25 \leq t < 90$ 时, $d_1 > d_2$,

$$\therefore |d_1 - d_2| = d_1 - d_2, \therefore 4t - 4.8(t - 25) = 60, t = 75 \text{ (分钟)};$$

ii. 当 $90 \leq t \leq 100$ 时, $d_1 \geq d_2$,

$$\therefore |d_1 - d_2| = d_1 - d_2, \therefore 360 - 4.8(t - 25) = 60, t = 87.5 \text{ (分钟)}, \text{不合题意, 舍去};$$

iii. 当 $100 < t \leq 110$ 时, $d_1 < d_2$,

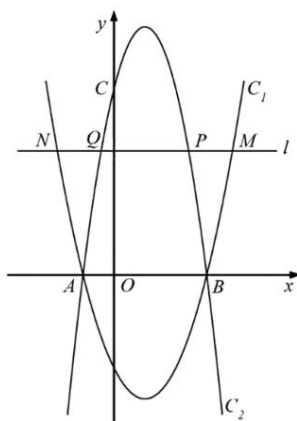
$$\therefore |d_1 - d_2| = d_2 - d_1, \therefore 4.8(t - 25) - 360 = 60, t = 112.5 \text{ (分钟)}, \text{不合题意, 舍去};$$

iv. 当 $110 < t \leq 150$ 时, $d_1 < d_2$,

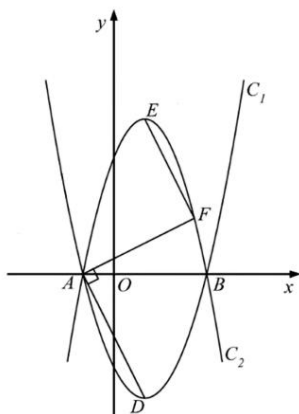
$$\therefore |d_1 - d_2| = d_2 - d_1, \therefore 4.8(t - 25) - [360 + 4(t - 110)] = 60, t = 125 \text{ (分钟)}.$$

综上所述, 当 $t = 75$ 或 125 时, $|d_1 - d_2| = 60$.

27. 如图①, 二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 的图象 C_1 与开口向下的二次函数图象 C_2 均过点 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$.



图①



图②

(1) 求图象 C_1 对应的函数表达式;

(2) 若图象 C_2 过点 $C(0, 6)$, 点 P 位于第一象限, 且在图象 C_2 上, 直线 l 过点 P 且与 x 轴平行, 与图象 C_2 的另一个交点为 Q (Q 在 P 左侧), 直线 l 与图象 C_1 的交点为 M, N (N 在 M 左侧). 当 $PQ = MP + QN$ 时, 求点 P 的坐标;

(3) 如图②, D, E 分别为二次函数图象 C_1, C_2 的顶点, 连接 AD , 过点 A 作 $AF \perp AD$. 交图象 C_2 于点 F , 连接 EF , 当 $EF \parallel AD$ 时, 求图象 C_2 对应的函数表达式.

【答案】(1) $y = x^2 - 2x - 3$

(2) 点 P 的坐标为 $(\sqrt{2} + 1, 4)$

$$(3) \quad y = -\frac{5}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{15}{4}$$

【解析】

【分析】(1) 运用待定系数法求函数解析式即可；

(2) 可求 C_2 对应的函数表达式为： $y = -2(x+1)(x-3)$ ，其对称轴为直线 $x=1$ ．作直线 $x=1$ ，交直线 l 于点 H ．(如答图①) 由二次函数的对称性得， $QH = PH$ ， $PM = NQ$ ，由 $PQ = MP + QN$ ，得到 $PH = PM$ ，设 $PH = t (0 < t < 2)$ ，则点 P 的横坐标为 $t+1$ ，点 M 的横坐标为 $2t+1$ ， $y_P = -2(t+2)(t-2)$ ， $y_M = (2t+2)(2t-2)$ ，故有 $-2(t+2)(t-2) = (2t+2)(2t-2)$ ，解得 $t_1 = \sqrt{2}$ ， $t_2 = -\sqrt{2}$ (舍去)，故点 P 的坐标为 $(\sqrt{2}+1, 4)$ ；

(3) 连接 DE ，交 x 轴于点 G ，过点 F 作 $FI \perp ED$ 于点 I ，过点 F 作 $FJ \perp x$ 轴于点 J ，(如答图②)，则四边形 $IGJF$ 为矩形，设 C_2 对应的函数表达式为 $y = a(x+1)(x-3) (a < 0)$ ，可求 $D(1, -4)$ ， $E(1, -4a)$ ，

则 $DG = 4$ ， $AG = 2$ ， $EG = -4a$ ，而 $\tan \angle ADG = \frac{AG}{DG} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ，则

$$\tan \angle FAB = \tan \angle ADG = \frac{FJ}{AJ} = \frac{1}{2}．\text{ 设 } GJ = m (0 < m < 2)，\text{ 则 } FI = m，AJ = 2 + m，FJ = \frac{2+m}{2}，$$

即 $F\left(m+1, \frac{2+m}{2}\right)$ ，可得 $\tan \angle FEI = \tan \angle ADG = \frac{FI}{EI} = \frac{1}{2}$ ，故 $EI = 2m$ ，则 $2m + \frac{2+m}{2} = -4a$ ，则

$$a = -\frac{2+5m}{8} \text{ ①}，\text{ 由点 } F \text{ 在 } C_2 \text{ 上，得到 } a(m+1+1)(m+1-3) = \frac{m+2}{2}，\text{ 化简得 } a(m-2) = \frac{1}{2} \text{ ②}，\text{ 由 ①}，$$

$$\text{②可得 } -\frac{2+5m}{8}(m-2) = \frac{1}{2}，\text{ 解得 } m = \frac{8}{5}，\text{ 因此 } a = -\frac{5}{4}，\text{ 故 } C_2 \text{ 的函数表达式为 } y = -\frac{5}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{15}{4}．$$

【小问 1 详解】

解：(1) 将 $A(-1, 0)$ ， $B(3, 0)$ 代入 $y = x^2 + bx + c$ ，得，

$$\begin{cases} 1 - b + c = 0 \\ 9 + 3b + c = 0 \end{cases}，$$

$$\text{解得：} \begin{cases} b = -2 \\ c = -3 \end{cases}$$

$\therefore C_1$ 对应的函数表达式为： $y = x^2 - 2x - 3$ ；

【小问 2 详解】

解：设 C_2 对应的函数表达式为 $y = a(x+1)(x-3)$ ($a < 0$)，将点 $C(0, 6)$ 代入

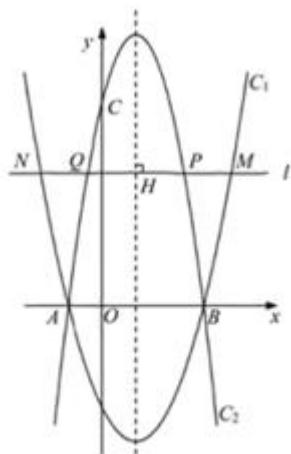
得： $-3a = 6$ ，

解得： $a = -2$ 。

$\therefore C_2$ 对应的函数表达式为： $y = -2(x+1)(x-3)$ ，其对称轴为直线 $x = \frac{-1+3}{2} = 1$ 。

又 $\because$ 图象 C_1 的对称轴也为直线 $x = 1$ ，

作直线 $x = 1$ ，交直线 l 于点 H (如答图①)



答图 1

由二次函数的对称性得， $QH = PH$ ， $NH = MH$

$\therefore PM = NQ$ 。

又 $\because PQ = MP + QN$ ，而 $PQ = HP + QH$

$\therefore PH = PM$ 。

设 $PH = t$ ($0 < t < 2$)，则点 P 的横坐标为 $t+1$ ，点 M 的横坐标为 $2t+1$ 。

将 $x = t+1$ 代入 $y = -2(x+1)(x-3)$ ，得 $y_P = -2(t+2)(t-2)$ ，

将 $x = 2t+1$ 代入 $y = (x+1)(x-3)$ ，得 $y_M = (2t+2)(2t-2)$ 。

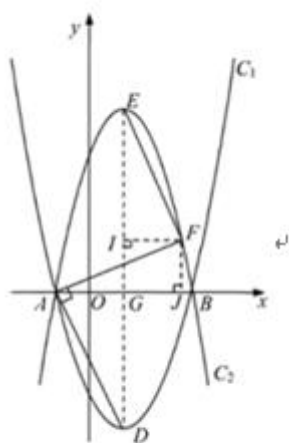
$\because y_P = y_M$ ， $\therefore -2(t+2)(t-2) = (2t+2)(2t-2)$ ，

即 $6t^2 = 12$ ，解得 $t_1 = \sqrt{2}$ ， $t_2 = -\sqrt{2}$ (舍去)。

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(\sqrt{2}+1, 4)$ ；

【小问 3 详解】

解：连接 DE ，交 x 轴于点 G ，过点 F 作 $FI \perp ED$ 于点 I ，过点 F 作 $FJ \perp x$ 轴于点 J 。(如答图②)



答图 2

$\because FI \perp ED, FJ \perp x \text{ 轴}, ED \perp x \text{ 轴},$

$\therefore$ 四边形 $IGJF$ 为矩形,

$\therefore IF = GJ, IG = FJ.$

设 C_2 对应的函数表达式为 $y = a(x+1)(x-3) (a < 0),$

$\because$ 点 D, E 分别为二次函数图象 C_1, C_2 的顶点,

将 $x=1$ 分别代入 $y = x^2 - 2x - 3, y = a(x+1)(x-3) (a < 0)$

得 $y_D = -4, y_E = -4a,$

$\therefore D(1, -4), E(1, -4a),$

$\therefore DG = 4, AG = 2, EG = -4a.$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle AGD$ 中, $\tan \angle ADG = \frac{AG}{DG} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$

$\because AF \perp AD,$

$\therefore \angle FAB + \angle DAB = 90^\circ.$

又 $\because \angle DAG + \angle ADG = 90^\circ,$

$\therefore \angle ADG = \angle FAB.$

$\therefore \tan \angle FAB = \tan \angle ADG = \frac{FJ}{AJ} = \frac{1}{2}.$

设 $GJ = m (0 < m < 2),$ 则 $FI = m, AJ = 2 + m.$

$$\therefore FJ = \frac{2+m}{2},$$

$$\therefore F\left(m+1, \frac{2+m}{2}\right).$$

$$\because EF \parallel AD,$$

$$\therefore \angle FEI = \angle ADG.$$

$$\therefore \tan \angle FEI = \tan \angle ADG = \frac{FI}{EI} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore EI = 2m.$$

$$\text{又} \because EG = EI + IG,$$

$$\therefore 2m + \frac{2+m}{2} = -4a,$$

$$\therefore a = -\frac{2+5m}{8} \text{ ①}$$

$$\because \text{点 } F \text{ 在 } C_2 \text{ 上,}$$

$$\therefore a(m+1+1)(m+1-3) = \frac{m+2}{2},$$

$$\text{即 } a(m+2)(m-2) = \frac{m+2}{2}.$$

$$\because m+2 \neq 0,$$

$$\therefore a(m-2) = \frac{1}{2} \text{ ②}$$

$$\text{由①, ②可得 } -\frac{2+5m}{8}(m-2) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{解得 } m_1 = 0 \text{ (舍去), } m_2 = \frac{8}{5},$$

$$\therefore a = -\frac{5}{4}.$$

$$\therefore C_2 \text{ 的函数表达式为 } y = -\frac{5}{4}(x+1)(x-3) = -\frac{5}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{15}{4}.$$

【点睛】 本题考查了二次函数的图像与性质，待定系数法求函数解析式，二次函数的对称性，矩形的判定与性质，解直角三角形的相关运算，熟练掌握知识点，正确添加辅助线是解决本题的关键.