

2024 年广州市初中学业水平考试

数学

试卷共 8 页，25 小题，满分 120 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前，考生务必在答题卡第 1 面、第 3 面、第 5 面上用黑色字迹的圆珠笔或钢笔填写自己的考生号、姓名；将自己的条形码粘贴在答题卡的“条形码粘贴处”。
2. 选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。答案不能答在试卷上。
3. 非选择题答案必须用黑色字迹的圆珠笔或钢笔写在答题卡各题目指定区域内的相应位置上，涉及作图的题目，用 2B 铅笔画图；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案，改动后的答案也不能超出指定的区域；不准使用铅笔（作图除外）、涂改液和修正带。不按以上要求作答的答案无效。
4. 考生必须保持答题卡的整洁，考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分 选择题（共 30 分）

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

1. 四个数 -10 ， -1 ， 0 ， 10 中，最小的数是（ ）

- A. -10 B. -1 C. 0 D. 10

【答案】A

【解析】

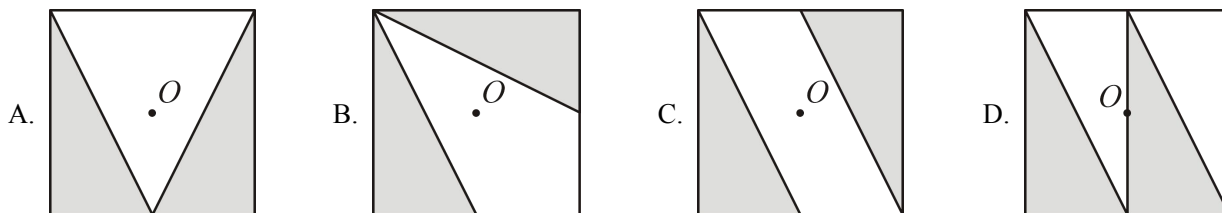
【分析】本题考查了有理数的大小比较，解题关键是掌握有理数大小比较法则：正数大于零，负数小于零，正数大于一切负数；两个正数比较大小，绝对值大的数大；两个负数比较大小，绝对值大的数反而小。

【详解】解：∵ $-10 < -1 < 0 < 10$ ，

∴ 最小的数是 -10 ，

故选：A.

2. 下列图案中，点 O 为正方形的中心，阴影部分的两个三角形全等，则阴影部分的两个三角形关于点 O 对称的是（ ）



【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了图形关于某点对称，掌握中心对称图形的性质是解题关键。根据对应点连线是否过点 O 判断即可。

【详解】解：由图形可知，阴影部分的两个三角形关于点 O 对称的是 C，
故选：C。

3. 若 $a \neq 0$ ，则下列运算正确的是（ ）

A. $\frac{a}{2} + \frac{a}{3} = \frac{a}{5}$

B. $a^3 \cdot a^2 = a^5$

C. $\frac{2}{a} \cdot \frac{3}{a} = \frac{5}{a}$

D. $a^3 \div a^2 = 1$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了分式的乘法，同底数幂乘法与除法，掌握相关运算法则是解题关键。通分后变为同分母分数相加，可判断 A 选项；根据同底数幂相乘，底数不变，指数相加，可判断 B 选项；根据分式乘法法则计算，可判断 C 选项；根据同底数幂除法，底数不变，指数相减，可判断 D 选项。

【详解】解：A、 $\frac{a}{2} + \frac{a}{3} = \frac{3a}{6} + \frac{2a}{6} = \frac{5a}{6}$ ，原计算错误，不符合题意；

B、 $a^3 \cdot a^2 = a^5$ ，原计算正确，符合题意；

C、 $\frac{2}{a} \cdot \frac{3}{a} = \frac{6}{a^2}$ ，原计算错误，不符合题意；

D、 $a^3 \div a^2 = a$ ，原计算错误，不符合题意；

故选：B。

4. 若 $a < b$ ，则（ ）

A. $a+3 > b+3$

B. $a-2 > b-2$

C. $-a < -b$

D. $2a < 2b$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了不等式的基本性质，熟练掌握不等式的基本性质是解题关键。根据不等式的基本性质逐项判断即可得。

【详解】解：A. $\because a < b$,

$\therefore a+3 < b+3$, 则此项错误, 不符题意;

B. $\because a < b$,

$\therefore a-2 < b-2$, 则此项错误, 不符题意;

C. $\because a < b$,

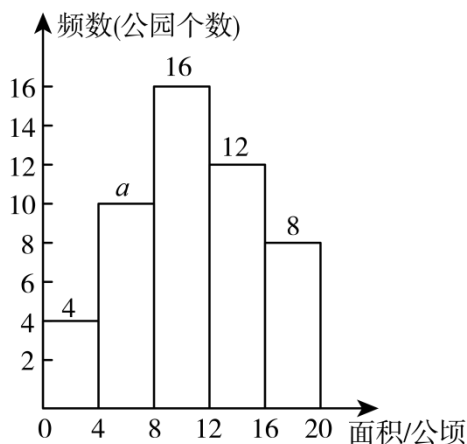
$\therefore -a > -b$, 则此项错误, 不符合题意;

D. $\because a < b$,

$\therefore 2a < 2b$, 则此项正确, 符合题意;

故选: D.

5. 为了解公园用地面积 x (单位: 公顷) 的基本情况, 某地随机调查了本地 50 个公园的用地面积, 按照 $0 < x \leq 4$, $4 < x \leq 8$, $8 < x \leq 12$, $12 < x \leq 16$, $16 < x \leq 20$ 的分组绘制了如图所示的频数分布直方图, 下列说法正确的是 ()



A. a 的值为 20

B. 用地面积在 $8 < x \leq 12$ 这一组的公园个数最多

C. 用地面积在 $4 < x \leq 8$ 这一组的公园个数最少

D. 这 50 个公园中有一半以上的公园用地面积超过 12 公顷

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查的是从频数分布直方图获取信息, 根基图形信息直接可得答案.

【详解】解: 由题意可得: $a = 50 - 4 - 16 - 12 - 8 = 10$, 故 A 不符合题意;

用地面积在 $8 < x \leq 12$ 这一组的公园个数有 16 个, 数量最多, 故 B 符合题意;

用地面积在 $0 < x \leq 4$ 这一组的公园个数最少, 故 C 不符合题意;

这 50 个公园中有 20 个公园用地面积超过 12 公顷, 不到一半, 故 D 不符合题意;

故选 B

6. 某新能源车企今年 5 月交付新车 35060 辆, 且今年 5 月交付新车的数量比去年 5 月交付的新车数量的 1.2 倍还多 1100 辆. 设该车企去年 5 月交付新车 x 辆, 根据题意, 可列方程为 ()

A. $1.2x + 1100 = 35060$

B. $1.2x - 1100 = 35060$

C. $1.2(x + 1100) = 35060$

D. $x - 1100 = 35060 \times 1.2$

【答案】A

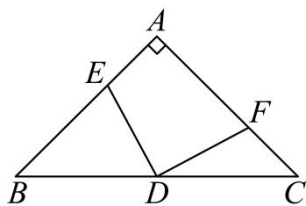
【解析】

【分析】本题考查了一元一次方程的应用, 找出题目中的数量关系是解题关键. 设该车企去年 5 月交付新车 x 辆, 根据“今年 5 月交付新车的数量比去年 5 月交付的新车数量的 1.2 倍还多 1100 辆”列出方程即可.

【详解】解: 设该车企去年 5 月交付新车 x 辆,
根据题意得: $1.2x + 1100 = 35060$,

故选: A.

7. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $AB = AC = 6$, D 为边 BC 的中点, 点 E , F 分别在边 AB , AC 上, $AE = CF$, 则四边形 $AEDF$ 的面积为 ()



A. 18

B. $9\sqrt{2}$

C. 9

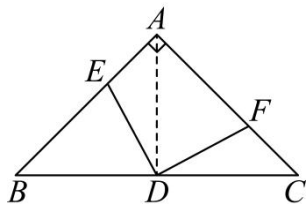
D. $6\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查等腰直角三角形的性质以及三角形全等的性质与判定, 掌握相关的线段与角度的转化是解题关键. 连接 AD , 根据等腰直角三角形的性质以及 $AE = CF$ 得出 $\triangle ADE \cong \triangle CDF$, 将四边形 $AEDF$ 的面积转化为三角形 ADC 的面积再进行求解.

【详解】解: 连接 AD , 如图:



$\because \angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = 6$, 点 D 是 BC 中点, $AE = CF$

$\therefore \angle BAD = \angle B = \angle C = 45^\circ$, $AD = BD = DC$

$$\therefore ADE \cong CDF,$$

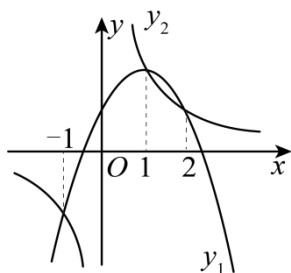
$$\therefore S_{\text{四边形}AEDF} = S_{\triangle AED} + S_{\triangle ADF} = S_{\triangle CFD} + S_{\triangle ADF} = S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$$

$$\text{又} \because S_{\triangle ABC} = 6 \times 6 \times \frac{1}{2} = 18$$

$$\therefore S_{\text{四边形}AEDF} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = 9$$

故选：C

8. 函数 $y_1 = ax^2 + bx + c$ 与 $y_2 = \frac{k}{x}$ 的图象如图所示，当（ ）时， y_1 ， y_2 均随着 x 的增大而减小.



A. $x < -1$

B. $-1 < x < 0$

C. $0 < x < 2$

D. $x > 1$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了二次函数以及反比例函数的图象和性质，利用数形结合的思想解决问题是关键. 由函数图象可知，当 $x > 1$ 时， y_1 随着 x 的增大而减小； y_2 位于在一、三象限内，且 y_2 均随着 x 的增大而减小，据此即可得到答案.

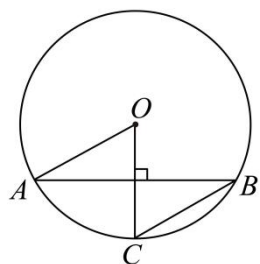
【详解】解：由函数图象可知，当 $x > 1$ 时， y_1 随着 x 的增大而减小；

y_2 位于一、三象限内，且在每一象限内 y_2 均随着 x 的增大而减小，

$\therefore$ 当 $x > 1$ 时， y_1 ， y_2 均随着 x 的增大而减小，

故选：D.

9. 如图， $\odot O$ 中，弦 AB 的长为 $4\sqrt{3}$ ，点 C 在 $\odot O$ 上， $OC \perp AB$ ， $\angle ABC = 30^\circ$. $\odot O$ 所在的平面内有一点 P ，若 $OP = 5$ ，则点 P 与 $\odot O$ 的位置关系是（ ）



- A. 点 P 在 $\odot O$ 上 B. 点 P 在 $\odot O$ 内 C. 点 P 在 $\odot O$ 外 D. 无法确定

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了垂径定理，圆周角定理，点与圆的位置关系，锐角三角函数，掌握圆的相关性质是解题关键. 由垂径定理可得 $AD = 2\sqrt{3}$ ，由圆周角定理可得 $\angle AOC = 60^\circ$ ，再结合特殊角的正弦值，求出 $\odot O$ 的半径，即可得到答案.

【详解】解：如图，令 OC 与 AB 的交点为 D ，

$\because OC$ 为半径， AB 为弦，且 $OC \perp AB$ ，

$$\therefore AD = \frac{1}{2}AB = 2\sqrt{3},$$

$$\because \angle ABC = 30^\circ$$

$$\therefore \angle AOC = 2\angle ABC = 60^\circ,$$

在 $\triangle ADO$ 中， $\angle ADO = 90^\circ$ ， $\angle AOD = 60^\circ$ ， $AD = 2\sqrt{3}$ ，

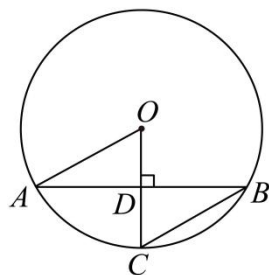
$$\because \sin \angle AOD = \frac{AD}{OA},$$

$$\therefore OA = \frac{AD}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4, \text{ 即 } \odot O \text{ 的半径为 } 4,$$

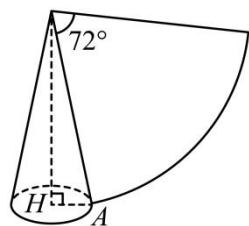
$$\because OP = 5 > 4,$$

$\therefore$ 点 P 在 $\odot O$ 外，

故选：C.



10. 如图，圆锥的侧面展开图是一个圆心角为 72° 的扇形，若扇形的半径 l 是 5，则该圆锥的体积是 ()



A. $\frac{3\sqrt{11}}{8}\pi$

B. $\frac{\sqrt{11}}{8}\pi$

C. $2\sqrt{6}\pi$

D. $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了弧长公式，圆锥的体积公式，勾股定理，理解圆锥的底面周长与侧面展开图扇形的弧长相等是解题关键，设圆锥的半径为 r ，则圆锥的底面周长为 $2\pi r$ ，根据弧长公式得出侧面展开图的弧长为 2π ，进而得出 $r=1$ ，再利用勾股定理，求出圆锥的高，再代入体积公式求解即可.

【详解】解：设圆锥的半径为 r ，则圆锥的底面周长为 $2\pi r$ ，

∵圆锥的侧面展开图是一个圆心角为 72° 的扇形，且扇形的半径 l 是5，

$$\therefore \text{扇形的弧长为} \frac{72\pi \times 5}{180} = 2\pi,$$

∵圆锥的底面周长与侧面展开图扇形的弧长相等，

$$\therefore 2\pi r = 2\pi,$$

$$\therefore r = 1,$$

$$\therefore \text{圆锥的高为} \sqrt{5^2 - 1^2} = 2\sqrt{6},$$

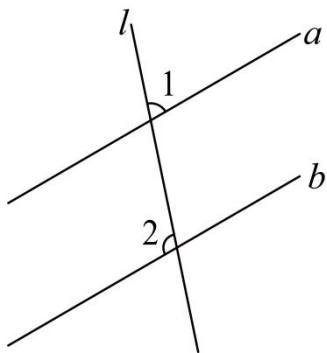
$$\therefore \text{圆锥的体积为} \frac{1}{3}\pi \times 1^2 \times 2\sqrt{6} = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi,$$

故选：D.

第二部分 非选择题 (共 90 分)

二、填空题 (本大题共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分.)

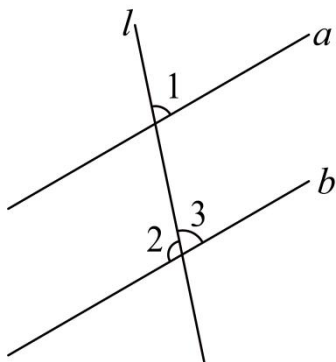
11. 如图，直线 l 分别与直线 a ， b 相交， $a \parallel b$ ，若 $\angle 1 = 71^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数为_____.

【答案】 109°

【解析】

【分析】本题考查的是平行线的性质，邻补角的含义，先证明 $\angle 1 = \angle 3 = 71^\circ$ ，再利用邻补角的含义可得答案.

【详解】解：如图，



$$\because a \parallel b, \angle 1 = 71^\circ,$$

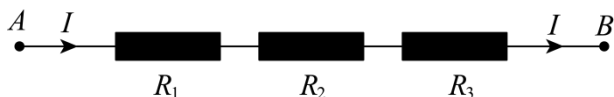
$$\therefore \angle 1 = \angle 3 = 71^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = 180^\circ - \angle 3 = 109^\circ;$$

故答案为： 109°

12. 如图，把 R_1 , R_2 , R_3 三个电阻串联起来，线路 AB 上的电流为 I ，电压为 U ，则 $U = IR_1 + IR_2 + IR_3$ 。当

$R_1 = 20.3$, $R_2 = 31.9$, $R_3 = 47.8$, $I = 2.2$ 时， U 的值为_____。



【答案】220

【解析】

【分析】本题考查了代数式求值，乘法运算律，掌握相关运算法则，正确计算是解题关键。根据 $U = IR_1 + IR_2 + IR_3$ ，将数值代入计算即可。

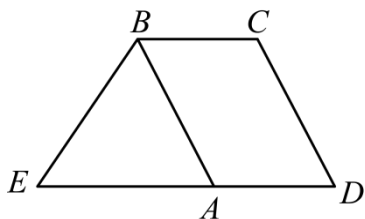
【详解】解： $\because U = IR_1 + IR_2 + IR_3$,

当 $R_1 = 20.3$, $R_2 = 31.9$, $R_3 = 47.8$, $I = 2.2$ 时，

$$U = 20.3 \times 2.2 + 31.9 \times 2.2 + 47.8 \times 2.2 = (20.3 + 31.9 + 47.8) \times 2.2 = 220,$$

故答案为：220.

13. 如图， $ABCD$ 中， $BC = 2$ ，点 E 在 DA 的延长线上， $BE = 3$ ，若 BA 平分 $\angle EBC$ ，则 $DE =$ _____。



【答案】5

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的性质，等腰三角形的判定和性质，掌握平行四边形的性质是解题关键。由平行四边形的性质可知， $AD = BC = 2$ ， $BC \parallel AD$ ，进而得出 $\angle BAE = \angle EBA$ ，再由等角对等边的性质，得到 $BE = AE = 3$ ，即可求出 DE 的长。

【详解】解：在 $ABCD$ 中， $BC = 2$ ，

$$\therefore AD = BC = 2, \quad BC \parallel AD,$$

$$\therefore \angle CBA = \angle BAE,$$

$\because BA$ 平分 $\angle EBC$,

$$\therefore \angle CBA = \angle EBA,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle EBA,$$

$$\therefore BE = AE = 3,$$

$$\therefore DE = AD + AE = 2 + 3 = 5,$$

故答案为：5.

14. 若 $a^2 - 2a - 5 = 0$ ，则 $2a^2 - 4a + 1 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】11

【解析】

【分析】本题考查了因式分解，提取公因式，得出条件的等价形式是解题关键。

由 $a^2 - 2a - 5 = 0$ ，得 $a^2 - 2a = 5$ ，根据提公因式法分解因式得 $2a^2 - 4a + 1 = 2(a^2 - 2a) + 1$ ，代入可得答案。

【详解】解： $\because a^2 - 2a - 5 = 0$ ，

$$\therefore a^2 - 2a = 5,$$

$$\therefore 2a^2 - 4a + 1 = 2(a^2 - 2a) + 1 = 2 \times 5 + 1 = 11,$$

故答案为：11.

15. 定义新运算： $a \otimes b = \begin{cases} a^2 - b & (a \leq 0) \\ -a + b & (a > 0) \end{cases}$ 例如： $-2 \otimes 4 = (-2)^2 - 4 = 0$ ， $2 \otimes 3 = -2 + 3 = 1$. 若 $x \otimes 1 = -\frac{3}{4}$ ，

则 x 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{7}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的应用，一元一次方程的应用，解题的关键是明确新运算的定义．根据新定义运算法则列出方程求解即可．

【详解】 解： $\because a \otimes b = \begin{cases} a^2 - b (a \leq 0) \\ -a + b (a > 0) \end{cases}$,

而 $x \otimes 1 = -\frac{3}{4}$,

$\therefore$ ①当 $x \leq 0$ 时，则有 $x^2 - 1 = -\frac{3}{4}$,

解得， $x = -\frac{1}{2}$;

②当 $x > 0$ 时， $-x + 1 = -\frac{3}{4}$,

解得， $x = \frac{7}{4}$

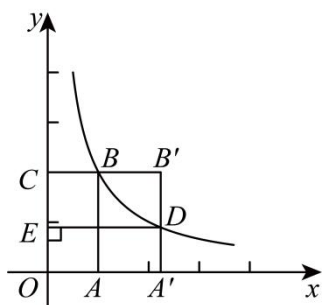
综上所述， x 的值是 $-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{7}{4}$,

故答案为： $-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{7}{4}$.

16. 如图，平面直角坐标系 xOy 中，矩形 $OABC$ 的顶点 B 在函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象上， $A(1, 0)$ ， $C(0, 2)$. 将

线段 AB 沿 x 轴正方向平移得线段 $A'B'$ (点 A 平移后的对应点为 A')， $A'B'$ 交函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象于点

D ，过点 D 作 $DE \perp y$ 轴于点 E ，则下列结论：



① $k = 2$;

② $\triangle OBD$ 的面积等于四边形 $ABDA'$ 的面积;

③ $A'E$ 的最小值是 $\sqrt{2}$;

④ $\angle B'BD = \angle BB'O$.

其中正确的结论有_____。(填写所有正确结论的序号)

【答案】 ①②④

【解析】

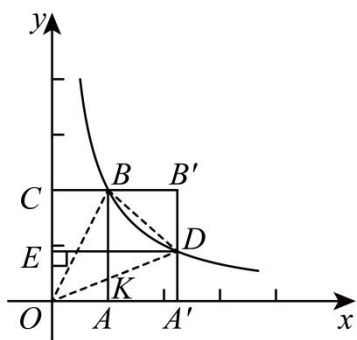
【分析】由 $B(1,2)$ ，可得 $k=1 \times 2=2$ ，故①符合题意；如图，连接 OB ， OD ， BD ， OD 与 AB 的交点为 K ，利用 k 的几何意义可得 $\triangle OBD$ 的面积等于四边形 $ABDA'$ 的面积；故②符合题意；如图，连接 $A'E$ ，证明四边形 $A'DEO$ 为矩形，可得当 OD 最小，则 $A'E$ 最小，设 $D\left(x, \frac{2}{x}\right) (x>0)$ ，可得 $A'E$ 的最小值为 2，故③不符合题意；如图，设平移距离为 n ，可得 $B'(n+1,2)$ ，证明 $\triangle B'BD \sim \triangle A'OB'$ ，可得 $\angle B'BD = \angle B'OA'$ ，再进一步可得答案.

【详解】解： $\because A(1,0)$ ， $C(0,2)$ ，四边形 $OABC$ 是矩形；

$$\therefore B(1,2),$$

$$\therefore k=1 \times 2=2, \text{ 故①符合题意;}$$

如图，连接 OB ， OD ， BD ， OD 与 AB 的交点为 K ，



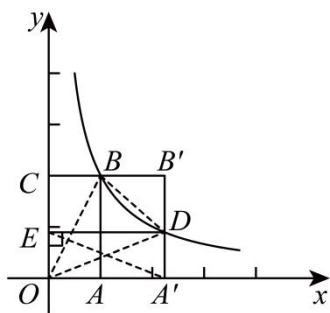
$$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle A'OD} = \frac{1}{2} \times 2 = 1,$$

$$\therefore S_{\triangle BOK} = S_{\text{四边形} AKDA'},$$

$$\therefore S_{\triangle BOK} + S_{\triangle BKD} = S_{\text{四边形} AKDA'} + S_{\triangle BKD},$$

$$\therefore \triangle OBD \text{ 的面积等于四边形 } ABDA' \text{ 的面积; 故②符合题意;}$$

如图，连接 $A'E$ ，



$$\therefore DE \perp y \text{ 轴}, \angle DA'O = \angle EOA' = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{四边形 } A'DEO \text{ 为矩形,}$$

$$\therefore A'E = OD,$$

$\therefore$ 当 OD 最小, 则 $A'E$ 最小,

$$\text{设 } D\left(x, \frac{2}{x}\right) (x > 0),$$

$$\therefore OD^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} \geq 2 \cdot x \cdot \frac{2}{x} = 4,$$

$$\therefore OD \geq 2,$$

$\therefore A'E$ 的最小值为 2, 故③不符合题意;

如图, 设平移距离为 n ,

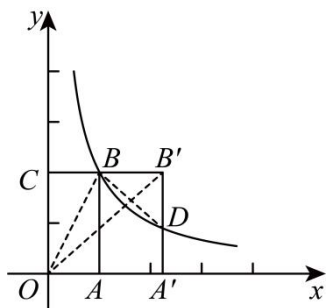
$$\therefore B'(n+1, 2),$$

$\therefore$ 反比例函数为 $y = \frac{2}{x}$, 四边形 $A'B'CO$ 为矩形,

$$\therefore \angle BB'D = \angle OA'B' = 90^\circ, \quad D\left(n+1, \frac{2}{n+1}\right),$$

$$\therefore BB' = n, \quad OA' = n+1, \quad B'D = 2 - \frac{2}{n+1} = \frac{2n}{n+1}, \quad A'B' = 2,$$

$$\therefore \frac{BB'}{OA'} = \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{2n}{n+1}}{2} = \frac{B'D}{A'B'},$$



$$\therefore \triangle B'BD \sim \triangle A'OB',$$

$$\therefore \angle B'BD = \angle B'OA',$$

$$\therefore B'C \parallel A'O,$$

$$\therefore \angle CB'O = \angle A'OB',$$

$$\therefore \angle B'BD = \angle BB'O, \text{ 故④符合题意;}$$

故答案为: ①②④

【点睛】 本题考查的是反比例函数的图象与性质, 平移的性质, 矩形的判定与性质, 相似三角形的判定与性质, 勾股定理的应用, 作出合适的辅助线是解本题的关键.

三、解答题 (本大题共 9 小题, 满分 72 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. 解方程: $\frac{1}{2x-5} = \frac{3}{x}$.

【答案】 $x = 3$

【解析】

【分析】 本题考查的是解分式方程，掌握分式方程的解法是解题关键，注意检验．依次去分母、去括号、移项、合并同类项求解，检验后即可得到答案．

【详解】 解: $\frac{1}{2x-5} = \frac{3}{x}$,

去分母得: $x = 3(2x - 5)$,

去括号得: $x = 6x - 15$,

移项得: $x - 6x = -15$,

合并同类项得: $-5x = -15$,

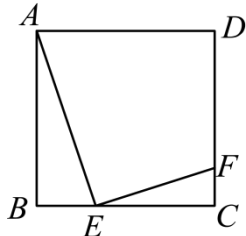
解得: $x = 3$,

经检验, $x = 3$ 是原方程的解,

$\therefore$ 该分式方程的解为 $x = 3$.

18. 如图, 点 E , F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 BC , CD 上, $BE = 3$, $EC = 6$, $CF = 2$. 求证:

$\triangle ABE \sim \triangle ECF$.



【答案】 见解析

【解析】

【分析】 本题考查了正方形的性质，相似三角形的判定，掌握相似三角形的判定定理是解题关键．根据正方形的性质，得出 $\angle B = \angle C = 90^\circ$, $AB = CB = 9$, 进而得出 $\frac{AB}{EC} = \frac{BE}{CF}$, 根据两边成比例且夹角相等的两个三角形相似即可证明.

【详解】 解: $\because BE = 3$, $EC = 6$,

$\therefore BC = 9$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AB = CB = 9$, $\angle B = \angle C = 90^\circ$,

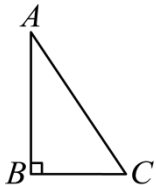
$\therefore \frac{AB}{EC} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$, $\frac{BE}{CF} = \frac{3}{2}$,

$$\therefore \frac{AB}{EC} = \frac{BE}{CF}$$

$$\text{又} \because \angle B = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ECF.$$

19. 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$.



(1) 尺规作图: 作 AC 边上的中线 BO (保留作图痕迹, 不写作法);

(2) 在 (1) 所作的图中, 将中线 BO 绕点 O 逆时针旋转 180° 得到 DO , 连接 AD , CD . 求证: 四边形 $ABCD$ 是矩形.

【答案】(1) 作图见解析

(2) 证明见解析

【解析】

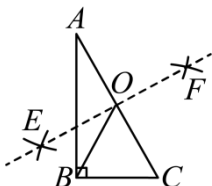
【分析】本题考查的是作线段的垂直平分线, 矩形的判定, 平行四边形的判定与性质, 旋转的性质;

(1) 作出线段 AC 的垂直平分线 EF , 交 AC 于点 O , 连接 BO , 则线段 BO 即为所求;

(2) 先证明四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 再结合矩形的判定可得结论.

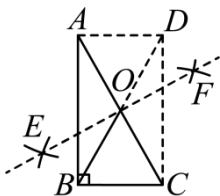
【小问 1 详解】

解: 如图, 线段 BO 即为所求;



【小问 2 详解】

证明: 如图,



$\therefore$ 由作图可得: $AO = CO$, 由旋转可得: $BO = DO$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$\therefore \angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为矩形.

20. 关于 x 的方程 $x^2 - 2x + 4 - m = 0$ 有两个不等的实数根.

(1) 求 m 的取值范围;

(2) 化简: $\frac{1-m^2}{|m-3|} \div \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-3}{m+1}$.

【答案】(1) $m > 3$

(2) -2

【解析】

【分析】本题考查的是一元二次方程根的判别式，分式的混合运算，掌握相应的基础知识是解本题的关键；

(1) 根据一元二次方程根的判别式建立不等式解题即可；

(2) 根据 (1) 的结论化简绝对值，再计算分式的乘除混合运算即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 - 2x + 4 - m = 0$ 有两个不等的实数根.

$$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (4 - m) > 0,$$

解得: $m > 3$;

【小问 2 详解】

解: $\because m > 3$,

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1-m^2}{|m-3|} &\div \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-3}{m+1} \\ &= \frac{-(m+1)(m-1)}{m-3} \cdot \frac{2}{m-1} \cdot \frac{m-3}{m+1} \\ &= -2; \end{aligned}$$

21. 善于提问是应用人工智能解决问题的重要因素之一. 为了解同学们的提问水平, 对 A, B 两组同学进行问卷调查, 并根据结果对每名同学的提问水平进行评分, 得分情况如下 (单位: 分):

A 组	75	78	82	82	84	86	87	88	93	95
B 组	75	77	80	83	85	86	88	88	92	96

(1) 求 A 组同学得分的中位数和众数;

(2) 现从 A、B 两组得分超过 90 分的 4 名同学中随机抽取 2 名同学参与访谈, 求这 2 名同学恰好来自同一组的概率.

【答案】(1) A 组同学得分的中位数为 85 分，众数为 82 分；

(2) $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】本题考查了中位数与众数，列表法或树状图法求概率，掌握相关知识点是解题关键.

(1) 根据中位数和众数的定义求解即可；

(2) 由题意可知，A、B 两组得分超过 90 分的同学各有 2 名，画树状图法求出概率即可.

【小问 1 详解】

解：由题意可知，每组学生人数为 10 人，

$\therefore$ 中位数为第 5、6 名同学得分的平均数，

$$\therefore A \text{ 组同学得分的中位数为 } \frac{84+86}{2} = 85 \text{ 分},$$

$\because$ 82 分出现了两次，次数最多，

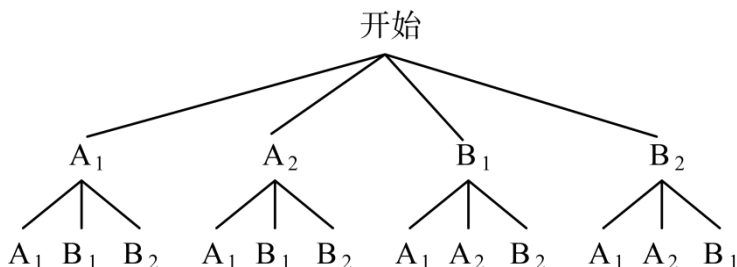
$\therefore$ 众数为 82 分；

【小问 2 详解】

解：由题意可知，A、B 两组得分超过 90 分的同学各有 2 名，

令 A 组的 2 名同学为 A_1 、 A_2 ，B 组的 2 名同学为 B_1 、 B_2 ，

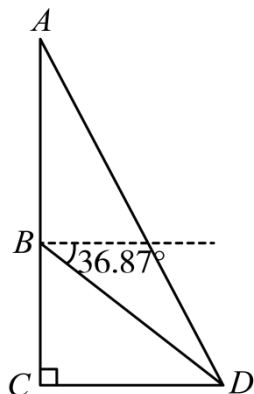
画树状图如下：



由树状图可知，共有 12 种等可能的情况，其中这 2 名同学恰好来自同一组的情况有 4 种，

$$\therefore \text{这 2 名同学恰好来自同一组的概率 } \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

22. 2024 年 6 月 2 日，嫦娥六号着陆器和上升器组合体（简称为“着上组合体”）成功着陆在月球背面. 某校综合实践小组制作了一个“着上组合体”的模拟装置，在一次试验中，如图，该模拟装置在缓速下降阶段从 A 点垂直下降到 B 点，再垂直下降到着陆点 C，从 B 点测得地面 D 点的俯角为 36.87° ， $AD = 17$ 米， $BD = 10$ 米.



- (1) 求 CD 的长；
- (2) 若模拟装置从 A 点以每秒 2 米的速度匀速下降到 B 点，求模拟装置从 A 点下降到 B 点的时间。（参考数据： $\sin 36.87^\circ \approx 0.60$ ， $\cos 36.87^\circ \approx 0.80$ ， $\tan 36.87^\circ \approx 0.75$ ）

【答案】(1) CD 的长约为 8 米；

(2) 模拟装置从 A 点下降到 B 点的时间为 4.5 秒。

【解析】

【分析】本题考查了解直角三角形的应用——仰俯角问题，灵活运用锐角三角函数求边长是解题关键。

- (1) 过点 B 作 $BE \parallel CD$ 交 AD 于点 E ，根据余弦值求出 CD 的长即可；
- (2) 先由勾股定理，求出 AC 的长，再利用正弦值求出 BC 的长，进而得到 AB 的长，然后除以速度，即可求出下降时间。

【小问 1 详解】

解：如图，过点 B 作 $BE \parallel CD$ 交 AD 于点 E ，

由题意可知， $\angle DBE = 36.87^\circ$ ，

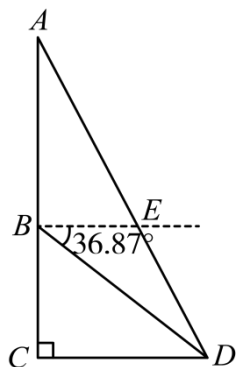
$$\therefore \angle BDC = 36.87^\circ,$$

在 $\triangle BCD$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BD = 10$ 米，

$$\therefore \cos \angle BDC = \frac{CD}{BD},$$

$$\therefore CD = BD \cdot \cos 36.87^\circ \approx 10 \times 0.80 \approx 8 \text{ 米},$$

即 CD 的长约为 8 米；



【小问 2 详解】

解：∵ $AD = 17$ 米， $CD = 8$ 米，

$$\therefore AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = 15 \text{ 米，}$$

在 $\triangle BCD$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BD = 10$ 米，

$$\therefore \sin \angle BDC = \frac{BC}{BD},$$

$$\therefore BC = BD \cdot \sin 36.87^\circ \approx 10 \times 0.60 \approx 6 \text{ 米，}$$

$$\therefore AB = AC - BC = 15 - 6 = 9 \text{ 米，}$$

∵ 模拟装置从 A 点以每秒 2 米的速度匀速下降到 B 点，

$$\therefore \text{模拟装置从 } A \text{ 点下降到 } B \text{ 点的时间为 } 9 \div 2 = 4.5 \text{ 秒，}$$

即模拟装置从 A 点下降到 B 点的时间为 4.5 秒.

23. 一个人的脚印信息往往对应着这个人某些方面的基本特征. 某数学兴趣小组收集了大量不同人群的身高和脚长数据, 通过对数据的整理和分析, 发现身高 y 和脚长 x 之间近似存在一个函数关系, 部分数据如下表:

脚长 $x(\text{cm})$	...	23	24	25	26	27	28	...
身高 $y(\text{cm})$	...	156	163	170	177	184	191	...

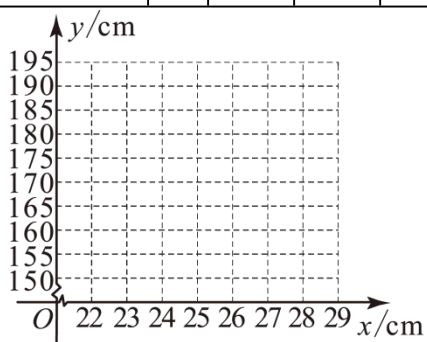


图1



图2

(1) 在图 1 中描出表中数据对应的点 (x, y) ;

(2) 根据表中数据, 从 $y = ax + b (a \neq 0)$ 和 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 中选择一个函数模型, 使它能近似地反映身高和脚长的函数关系, 并求出这个函数的解析式 (不要求写出 x 的取值范围);

(3) 如图 2, 某场所发现了一个人的脚印, 脚长约为 25.8cm , 请根据 (2) 中求出的函数解析式, 估计这个人的身高.

【答案】(1) 见解析 (2) $y = 7x - 5$

(3) 175.6cm

【解析】

【分析】本题考查了函数的实际应用, 正确理解题意, 选择合适的函数模型是解题关键.

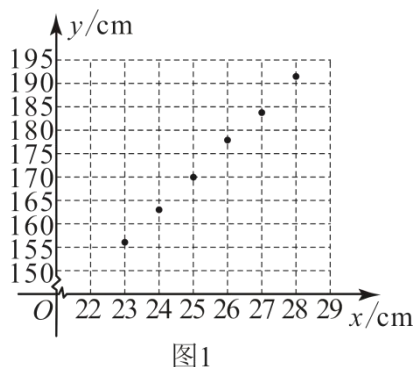
(1) 根据表格数据即可描点;

(2) 选择函数 $y = ax + b (a \neq 0)$ 近似地反映身高和脚长的函数关系, 将点 $(23, 156), (24, 163)$ 代入即可求解;

(3) 将 25.8cm 代入 $y = 7x - 5$ 代入即可求解;

【小问 1 详解】

解: 如图所示:



【小问 2 详解】

解: 由图可知: y 随着 x 的增大而增大,

因此选择函数 $y = ax + b (a \neq 0)$ 近似地反映身高和脚长的函数关系,

将点 $(23, 156), (24, 163)$ 代入得:

$$\begin{cases} 156 = 23a + b \\ 163 = 24a + b \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = 7 \\ b = -5 \end{cases}$$

$$\therefore y = 7x - 5$$

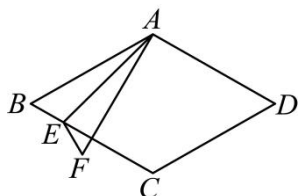
【小问3 详解】

解：将 25.8cm 代入 $y = 7x - 5$ 得：

$$y = 7 \times 25.8 - 5 = 175.6\text{cm}$$

$\therefore$ 估计这个人身高 175.6cm

24. 如图，在菱形 $ABCD$ 中， $\angle C = 120^\circ$ ．点 E 在射线 BC 上运动（不与点 B ，点 C 重合）， $\triangle AEB$ 关于 AE 的轴对称图形为 $\triangle AEF$ ．



(1) 当 $\angle BAF = 30^\circ$ 时，试判断线段 AF 和线段 AD 的数量和位置关系，并说明理由；

(2) 若 $AB = 6 + 6\sqrt{3}$ ， $\odot O$ 为 $\triangle AEF$ 的外接圆，设 $\odot O$ 的半径为 r ．

①求 r 的取值范围；

②连接 FD ，直线 FD 能否与 $\odot O$ 相切？如果能，求 BE 的长度；如果不能，请说明理由．

【答案】(1) $AF = AD$ ， $AF \perp AD$

(2) ① $r \geq 3 + 3\sqrt{3}$ ；② 12

【解析】

【分析】(1) 由菱形的性质可得 $\angle BAD = \angle C = 120^\circ$ ， $AB = AD$ ，再结合轴对称的性质可得结论；

(2) ①如图，设 $\triangle AEF$ 的外接圆为 $\odot O$ ，连接 AC 交 BD 于 H ．连接 OA ， OE ， OF ， OC ，证明 $\triangle ABC$ 为等边三角形， A, E, F, C 共圆， $\angle AOE = 2\angle AFE = 120^\circ$ ， O 在 BD 上， $\angle AEO = \angle EAO = 30^\circ$ ，过 O 作 $OJ \perp AE$ 于 J ，当 $AE \perp BC$ 时， AE 最小，则 AO 最小，再进一步可得答案；②如图，以 A 为圆心， AC 为半径画圆，可得 B, C, F, D 在 $\odot A$ 上，延长 CA 与 $\odot A$ 交于 L ，连接 DL ，证明 $\angle CFD = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ ，可得 $\angle OFC = 60^\circ$ ， $\triangle OCF$ 为等边三角形，证明 $\angle BAF = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$ ，可得： $\angle BAE = \angle FAE = 45^\circ$ ， $BE = EF$ ，过 E 作 $EM \perp AF$ 于 M ，再进一步可得答案．

【小问1 详解】

解： $AF = AD$ ， $AF \perp AD$ ；理由如下：

$\because$ 在菱形 $ABCD$ 中， $\angle C = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle BAD = \angle C = 120^\circ$ ， $AB = AD$ ，

$\therefore \angle BAF = 30^\circ$ ，

$$\therefore \angle FAD = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ,$$

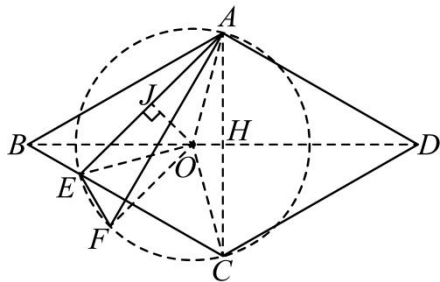
$$\therefore AF \perp AD,$$

由对折可得： $AB = AF$,

$$\therefore AF = AD;$$

【小问 2 详解】

解：①如图，设 $\triangle AEF$ 的外接圆为 $\odot O$ ，连接 AC 交 BD 于 H ．连接 OA ， OE ， OF ， OC ，



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为菱形， $\angle BCD = 120^\circ$ ，

$\therefore AC \perp BD$ ， $\angle BCA = 60^\circ$ ， $BA = BC$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形，

$\therefore \angle ABC = \angle AFE = 60^\circ = \angle ACB$ ，

$\therefore A, E, F, C$ 共圆， $\angle AOE = 2\angle AFE = 120^\circ$ ， O 在 BD 上，

$\therefore AO = OE$ ，

$\therefore \angle AEO = \angle EAO = 30^\circ$ ，

过 O 作 $OJ \perp AE$ 于 J ，

$$\therefore AJ = EJ, \quad AO = \frac{2\sqrt{3}}{3} AJ,$$

$$\therefore AO = \frac{\sqrt{3}}{3} AE,$$

当 $AE \perp BC$ 时， AE 最小， 则 AO 最小，

$$\therefore AB = 6 + 6\sqrt{3}, \quad \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore AE = AB \cdot \sin 60^\circ = (6 + 6\sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} + 9,$$

$$\therefore AO = \frac{\sqrt{3}}{3} (3\sqrt{3} + 9) = 3 + 3\sqrt{3};$$

$\therefore r$ 的取值范围为 $r \geq 3 + 3\sqrt{3}$ ；

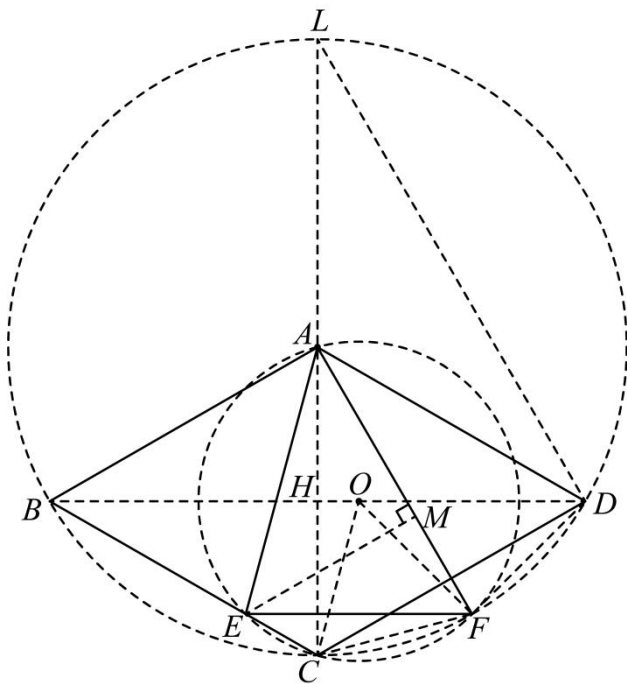
② DF 能为 $\odot O$ 的切线, 理由如下:

如图，以 A 为圆心， AC 为半径画圆，

$$\therefore AB = AC = AF = AD,$$

$\therefore B, C, F, D$ 在 $\odot A$ 上,

延长 CA 与 $\odot A$ 交于 L , 连接 DL ,



同理可得 $\triangle ACD$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle CAD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CLD = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle CFD = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ,$$

$\therefore DF$ 为 $\odot O$ 的切线,

$$\therefore \angle OFD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OFC = 60^\circ,$$

$$\therefore OC = OF,$$

$\therefore \triangle OCF$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle COF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CAF = \frac{1}{2} \angle COF = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DAF = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BAF = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ,$$

由对折可得: $\angle BAE = \angle FAE = 45^\circ$, $BE = EF$,

过 E 作 $EM \perp AF$ 于 M ,

$\therefore$ 设 $AM = EM = x$,

$\therefore \angle EFM = 60^\circ$,

$$\therefore FM = \frac{\sqrt{3}}{3} EM = \frac{\sqrt{3}}{3} x,$$

$$\therefore x + \frac{\sqrt{3}}{3} x = 6 + 6\sqrt{3},$$

解得: $x = 6\sqrt{3}$,

$$\therefore FM = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 6\sqrt{3} = 6,$$

$$\therefore BE = EF = 2FM = 12.$$

【点睛】 本题考查的是轴对称的性质，菱形的性质，等边三角形的判定与性质，圆周角定理的应用，锐角三角函数的应用，勾股定理的应用，切线的性质，本题难度很大，作出合适的辅助线是解本题的关键.

25. 已知抛物线 $G: y = ax^2 - 6ax - a^3 + 2a^2 + 1 (a > 0)$ 过点 $A(x_1, 2)$ 和点 $B(x_2, 2)$, 直线 $l: y = m^2x + n$ 过点 $C(3, 1)$, 交线段 AB 于点 D , 记 $\triangle CDA$ 的周长为 C_1 , $\triangle CDB$ 的周长为 C_2 , 且 $C_1 = C_2 + 2$.

(1) 求抛物线 G 的对称轴;

(2) 求 m 的值;

(3) 直线 l 绕点 C 以每秒 3° 的速度顺时针旋转 t 秒后 ($0 \leq t < 45$) 得到直线 l' , 当 $l' \parallel AB$ 时, 直线 l' 交抛物线 G 于 E, F 两点.

①求 t 的值;

②设 $\triangle AEF$ 的面积为 S , 若对于任意的 $a > 0$, 均有 $S \geq k$ 成立, 求 k 的最大值及此时抛物线 G 的解析式.

【答案】 (1) 对称轴为直线: $x = 3$;

(2) $m = \pm 1$

(3) ① $t = 15$, ② k 的最大值为 $2\sqrt{2}$, 抛物线 G 为 $y = x^2 - 6x + 2$;

【解析】

【分析】 (1) 直接利用对称轴公式可得答案;

(2) 如图, 由 $C_1 = C_2 + 2$, 可得 A 在 B 的左边, $AD + AC + CD = CD + BC + BD + 2$, 证明 $CA = CB$,

可得 $AD = BD + 2$, 设 $D(p, 2)$, 建立 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \times 3 \\ p - x_1 = x_2 - p + 2 \end{cases}$, 可得: $p = 4$, $D(4, 2)$, 再利用待定系数

法求解即可；

(3) ①如图，当 $l' \parallel AB$ 时，与抛物线交于 E, F ，由直线 $y = x + n$ ，可得 $\angle DCF = 45^\circ$ ，可得 $3t = 45$ ，从而可得答案；②计算 $S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} EF \cdot (y_A - y_E) = \frac{1}{2} EF$ ，当 $y = 1$ 时，可得 $x^2 - 6x - a^2 + 2a = 0$ ，则 $x_1 + x_2 = 6$ ， $x_1 x_2 = -a^2 + 2a$ ，可得 $EF = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{4(a-1)^2 + 32}$ ，可得当 $a = 1$ 时， EF 的最小值为 $4\sqrt{2}$ ，再进一步求解可得答案.

【小问 1 详解】

解：∵ 抛物线 $G: y = ax^2 - 6ax - a^3 + 2a^2 + 1 (a > 0)$ ，

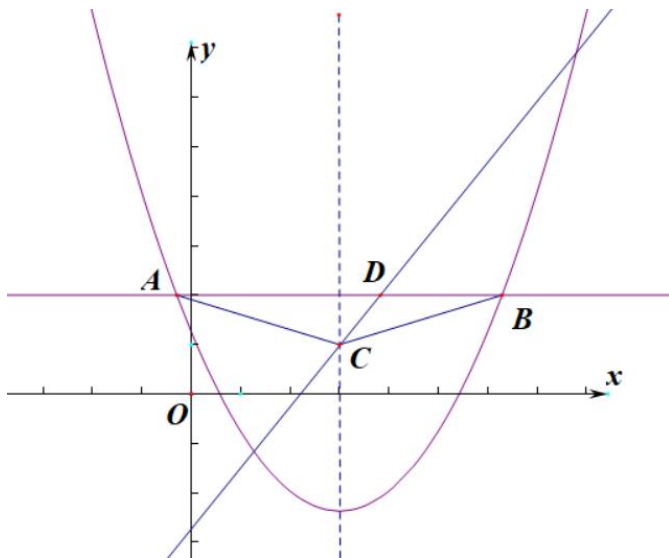
∴ 抛物线对称轴为直线： $x = -\frac{-6a}{2a} = 3$ ；

【小问 2 详解】

解：∵ 直线 $l: y = m^2 x + n$ 过点 $C(3, 1)$ ，

∴ $3m^2 + n = 1$ ，

如图，



∵ 直线 $l: y = m^2 x + n$ 过点 $C(3, 1)$ ，交线段 AB 于点 D ，记 $\triangle CDA$ 的周长为 C_1 ， $\triangle CDB$ 的周长为 C_2 ，且

$C_1 = C_2 + 2$ ，

∴ A 在 B 的左边， $AD + AC + CD = CD + BC + BD + 2$ ，

∵ C 在抛物线的对称轴上，

∴ $CA = CB$ ，

∴ $AD = BD + 2$ ，

设 $D(p, 2)$,

$$\therefore \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \times 3 \\ p - x_1 = x_2 - p + 2 \end{cases},$$

解得: $p = 4$,

$\therefore D(4, 2)$,

$$\therefore \begin{cases} 3m^2 + n = 1 \\ 4m^2 + n = 2 \end{cases},$$

$\therefore m^2 = 1$,

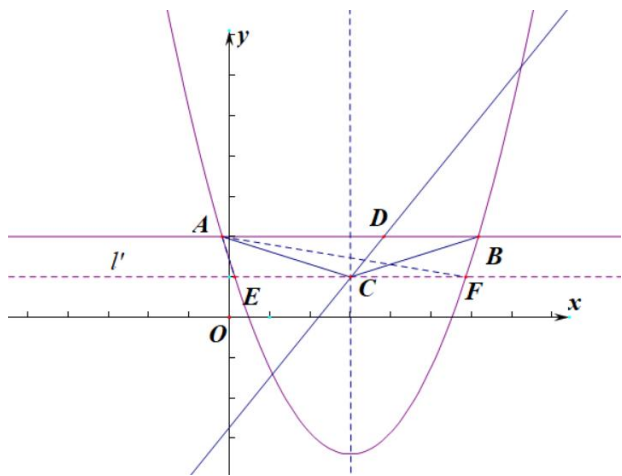
解得: $m = \pm 1$;

【小问 3 详解】

解: ①如图, 当 $l' \parallel AB$ 时, 与抛物线交于 E, F ,

$\therefore$ 直线 $y = x + n$,

$\therefore \angle DCF = 45^\circ$,



$\therefore 3t = 45$,

解得: $t = 15$,

$$\textcircled{2} \therefore S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} EF \cdot (y_A - y_E) = \frac{1}{2} EF,$$

当 $y = 1$ 时, $ax^2 - 6ax - a^3 + 2a^2 + 1 = 1$,

$$\therefore x^2 - 6x - a^2 + 2a = 0,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = 6, \quad x_1 x_2 = -a^2 + 2a,$$

$$\therefore EF = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}$$

$$= \sqrt{36 - 4(-a^2 + 2a)}$$

$$= \sqrt{4a^2 - 8a + 36}$$

$$= \sqrt{4(a-1)^2 + 32},$$

$$\because 4 > 0,$$

$$\therefore \text{当 } a = 1 \text{ 时, } EF \text{ 的最小值为 } 4\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{此时 } S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{对于任意的 } a > 0, \text{ 均有 } S \geq k \text{ 成立,}$$

$$\therefore k \text{ 的最大值为 } 2\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{抛物线 } G \text{ 为 } y = x^2 - 6x + 2;$$

【点睛】 本题考查的是二次函数的图象与性质，一次函数的性质，坐标与图形面积，一元二次方程根与系数的关系，理解题意，利用数形结合的方法解题是关键.