

机密★启用前

2024 年广东省初中学业水平考试

数学

满分 120 分 考试用时 120 分钟

注意事项：

1. 答题前，考生务必用黑色字迹的签字笔或钢笔将自己的准考证号、姓名、考场号和座位号填写在答题卡上。用 2B 铅笔在“考场号”和“座位号”栏相应位置填涂自己的考场号和座位号，将条形码粘贴在答题卡“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的签字笔或钢笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。
4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 计算 $-5+3$ 的结果是 ()

- A. 2 B. -2 C. 8 D. -8

【答案】B

【解析】

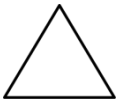
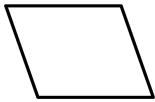
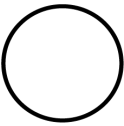
【分析】根据有理数的加法法则，即可求解。

【详解】 $\because -5+3=-(5-3)=-2$,

故答案是：B.

【点睛】本题主要考查有理数的加法法则，掌握“异号两数相加，取绝对值较大的数的符号，并把较大数的绝对值减去较小数的绝对值”是解题的关键。

2. 下列几何图形中，既是中心对称图形也是轴对称图形的是 ()

- A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了中心对称图形和轴对称图形的定义，如果一个平面图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形就叫做轴对称图形；中心对称图形的定义：把一个图形绕着某一个点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形叫做中心对称图形，这个点就是它的对称中心。根据轴对称图形和中心对称图形的定义进行逐一判断即可。

【详解】解：A. 是轴对称图形，不是中心对称图形，故不符合题意；
B. 不是轴对称图形，是中心对称图形，故不符合题意；
C. 既是轴对称图形，又是中心对称图形，故不符合题意；
D. 是轴对称图形，不是中心对称图形，故不符合题意；
故选：C.

3. 2024年6月6日，嫦娥六号在距离地球约384000千米外上演“太空牵手”，完成月球轨道的交会对接。数据384000用科学记数法表示为（ ）

- A. 3.84×10^4 B. 3.84×10^5 C. 3.84×10^6 D. 38.4×10^5

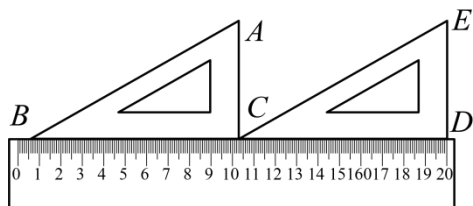
【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了绝对值大于1的科学记数法的表示，解题的关键在于确定 a ， n 的值。
根据绝对值大于1的数，用科学记数法表示为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq a < 10$ ， n 的值为整数位数少1。

【详解】解：384000大于1，用科学记数法表示为 $a \times 10^n$ ，其中 $a = 3.84$ ， $n = 5$ ，
 $\therefore$ 384000用科学记数法表示为 3.84×10^5 ，
故选：B.

4. 如图，一把直尺、两个含 30° 的三角尺拼接在一起，则 $\angle ACE$ 的度数为（ ）



- A. 120° B. 90° C. 60° D. 30°

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了平行线的性质。熟练掌握平行线的性质是解题的关键。
由题意知， $AC \parallel DE$ ，根据 $\angle ACE = \angle E$ ，求解作答即可。

【详解】解：由题意知， $AC \parallel DE$ ，
 $\therefore \angle ACE = \angle E = 60^\circ$ ，

故选：C.

5. 下列计算正确的是 ()

A. $a^2 \cdot a^5 = a^{10}$

B. $a^8 \div a^2 = a^4$

C. $-2a + 5a = 7a$

D. $(a^2)^5 = a^{10}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了同底数幂乘法计算，幂的乘方计算，合并同类项，熟知相关计算法则是解题的关键.

【详解】解：A、 $a^2 \cdot a^5 = a^7$ ，原式计算错误，不符合题意；

B、 $a^8 \div a^2 = a^6$ ，原式计算错误，不符合题意；

C、 $-2a + 5a = 3a$ ，原式计算错误，不符合题意；

D、 $(a^2)^5 = a^{10}$ ，原式计算正确，符合题意；

故选：D.

6. 长江是中华民族的母亲河，长江流域孕育出藏羌文化、巴蜀文化、荆楚文化、吴越文化等区域文化. 若从上述四种区域文化中随机选一种文化开展专题学习，则选中“巴蜀文化”的概率是 ()

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{3}{4}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了概率公式，用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比. 直接根据概率公式求解即可.

【详解】解：根据题意，选中“巴蜀文化”的概率是 $\frac{1}{4}$ ，

故选：A.

7. 完全相同的4个正方形面积之和是100，则正方形的边长是 ()

A. 2

B. 5

C. 10

D. 20

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了算术平方根的应用，先求出一个正方形的面积，再根据正方形的面积计算公式求出对应的边长即可.

【详解】解：∵完全相同的4个正方形面积之和是100，

∴一个正方形的面积为 $100 \div 4 = 25$ ，

∴正方形的边长为 $\sqrt{25} = 5$,

故选：B.

8. 若点 $(0, y_1), (1, y_2), (2, y_3)$ 都在二次函数 $y = x^2$ 的图象上, 则 ()

- A. $y_3 > y_2 > y_1$ B. $y_2 > y_1 > y_3$ C. $y_1 > y_3 > y_2$ D. $y_3 > y_1 > y_2$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了二次函数的图象和性质、二次函数图象上点的坐标特征等知识点, 根据二次函数的解析式得出函数图象的对称轴是 y 轴 (直线 $x = 0$), 图象的开口向上, 在对称轴的右侧, y 随 x 的增大而增大, 再比较即可.

【详解】解: 二次函数 $y = x^2$ 的对称轴为 y 轴, 开口向上,

∴当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大,

∵点 $(0, y_1), (1, y_2), (2, y_3)$ 都在二次函数 $y = x^2$ 的图象上, 且 $0 < 1 < 2$,

∴ $y_3 > y_2 > y_1$,

故选: A.

9. 方程 $\frac{2}{x-3} = \frac{3}{x}$ 的解为 ()

- A. $x = 3$ B. $x = -9$ C. $x = 9$ D. $x = -3$

【答案】C

【解析】

【分析】把分式方程去分母转化为整式方程, 求出整式方程的解得到 x 的值, 经检验即可得到分式方程的解.

【详解】解: $\frac{2}{x-3} = \frac{3}{x}$

去分母得: $2x = 3(x-3)$,

去括号得: $2x = 3x - 9$,

移项、合并同类项得: $-x = -9$,

解得: $x = 9$,

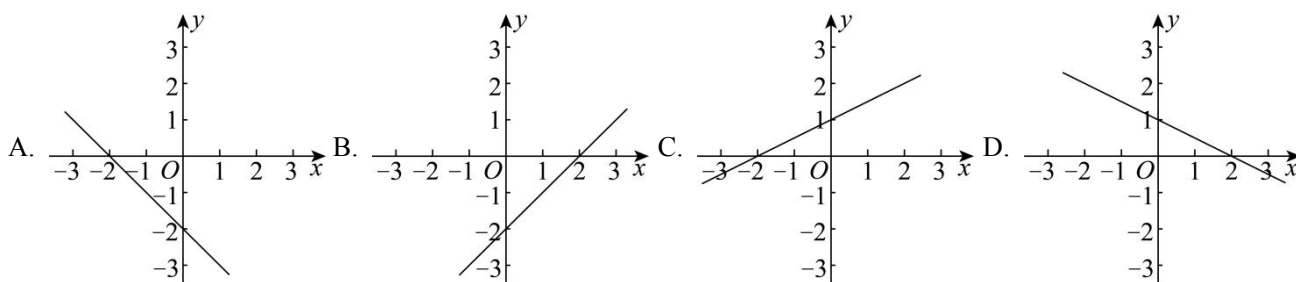
经检验: $x = 9$ 是原分式方程的解,

故选: C.

【点睛】本题考查了解分式方程, 利用了转化的思想, 解题的关键是解分式方程注意要检验, 避免出现增

根.

10. 已知不等式 $kx + b < 0$ 的解集是 $x < 2$ ，则一次函数 $y = kx + b$ 的图象大致是 ()



【答案】B

【解析】

【分析】本题考查一次函数与一元一次不等式，解不等式的方法：从函数的角度看，就是寻求使一次函数 $y = kx + b$ 的值大于（或小于）0 的自变量 x 的取值范围，找到当 $x < 2$ 函数图象位于 x 轴的下方的图象即可。

【详解】解： $\because$ 不等式 $kx + b < 0$ 的解集是 $x < 2$ ，

$\therefore$ 当 $x < 2$ 时， $y < 0$ ，

观察各个选项，只有选项 B 符合题意，

故选：B.

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分.

11. 数据 2, 3, 5, 5, 4 的众数是_____.

【答案】5

【解析】

【分析】由于众数是一组数据中出现次数最多的数据，注意众数可以不止一个，由此即可确定这组数据的众数.

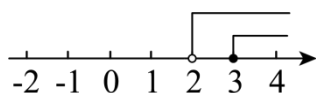
【详解】解： $\because$ 5 是这组数据中出现次数最多的数据，

$\therefore$ 这组数据的众数为 5.

故答案为：5.

【点睛】本题属于基础题，考查了确定一组数据的众数的能力，解题关键是要明确定义，读懂题意.

12. 关于 x 的不等式组中，两个不等式的解集如图所示，则这个不等式组的解集是_____.



【答案】 $x \geq 2$ 且 $x \leq 3$

【解析】

【分析】本题主要考查了求不等式组的解集，在数轴上表示不等式组的解集，根据“同大取大，同小取小，

大小小大中间找，大大小小找不到（无解）” 求出不等式组的解集即可.

【详解】解：由数轴可知，两个不等式的解集分别为 $x \geq 3$ ， $x > 2$ ，

$\therefore$ 不等式组的解集为 $x \geq 3$ ，

故答案为： $x \geq 3$.

13. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2x + c = 0$ 有两个相等的实数根，则 $c =$ _____.

【答案】 1

【解析】

【分析】由 $x^2 + 2x + c = 0$ 有两个相等的实数根，可得 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ 进而可解答.

【详解】解： $\because x^2 + 2x + c = 0$ 有两个相等的实数根，

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4c = 0$ ，

$\therefore c = 1$.

故答案为： 1 .

【点睛】本题主要考查根据一元二次方程根的情况求参数，掌握相关知识是解题的关键.

14. 计算： $\frac{a}{a-3} - \frac{3}{a-3} =$ _____.

【答案】 1

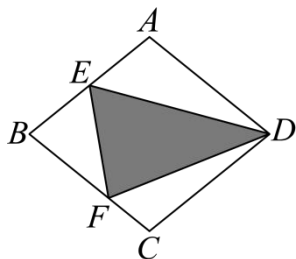
【解析】

【分析】本题主要考查了同分母分式减法计算，根据同分母分式减法计算法则求解即可.

【详解】解： $\frac{a}{a-3} - \frac{3}{a-3} = \frac{a-3}{a-3} = 1$ ，

故答案为： 1 .

15. 如图，菱形 $ABCD$ 的面积为 24，点 E 是 AB 的中点，点 F 是 BC 上的动点. 若 $\triangle BEF$ 的面积为 4，则图中阴影部分的面积为_____.



【答案】 10

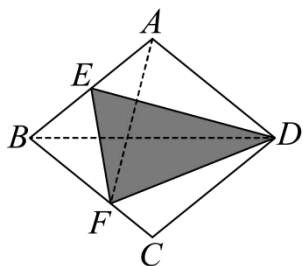
【解析】

【分析】本题考查了菱形的性质，三角形中线的性质，利用菱形的性质、三角形中线的性质求出 $S_{\triangle ADE} = 6$ ，

$S_{\triangle ABF} = 8$ ，根据 $\triangle ABF$ 和菱形的面积求出 $\frac{BF}{BC} = \frac{2}{3}$ ， $\frac{BF}{CF} = 2$ ，则可求出 $\triangle CDF$ 的面积，然后利用

$S_{\text{阴影}} = S_{\text{菱形}ABCD} - S_{\triangle ADE} - S_{\triangle BEF} - S_{\triangle CDF}$ 求解即可。

【详解】解：连接 AF 、 BD ，



$\therefore$ 菱形 $ABCD$ 的面积为 24，点 E 是 AB 的中点， $\triangle BEF$ 的面积为 4，

$$\therefore S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} S_{\text{菱形}ABCD} = 6, \quad S_{\triangle ABF} = 2S_{\triangle BEF} = 8,$$

设菱形 $ABCD$ 中 BC 边上的高为 h ，

$$\text{则 } \frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\text{菱形}ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} BF \cdot h}{BC \cdot h}, \quad \text{即 } \frac{8}{24} = \frac{\frac{1}{2} BF}{BC},$$

$$\therefore \frac{BF}{BC} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{BF}{CF} = 2,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle CDF}} = \frac{\frac{1}{2} BF \cdot h}{\frac{1}{2} CF \cdot h} = \frac{BF}{CF} = 2,$$

$$\therefore S_{\triangle CDF} = 4,$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{菱形}ABCD} - S_{\triangle ADE} - S_{\triangle BEF} - S_{\triangle CDF} = 10,$$

故答案为：10.

三、解答题 (一)：本大题共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分.

$$16. \text{ 计算: } 2^0 \times \left| -\frac{1}{3} \right| + \sqrt{4} - 3^{-1}.$$

【答案】2

【解析】

【分析】本题主要考查了实数的运算，零指数幂，负整数指数幂，先计算零指数幂，负整数指数幂和算术平方根，再计算乘法，最后计算加减法即可.

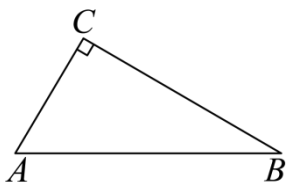
【详解】解： $2^0 \times \left| -\frac{1}{3} \right| + \sqrt{4} - 3^{-1}$

$$= 1 \times \frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{3}$$

$$= 2.$$

17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$.



(1) 实践与操作：用尺规作图法作 $\angle A$ 的平分线 AD 交 BC 于点 D ；（保留作图痕迹，不要求写作法）

(2) 应用与证明：在 (1) 的条件下，以点 D 为圆心， DC 长为半径作 $\odot D$ 。求证： AB 与 $\odot D$ 相切。

【答案】(1) 见解析 (2) 证明见解析

【解析】

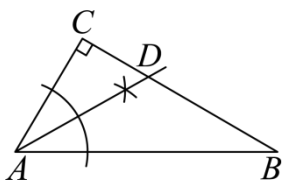
【分析】本题考查了尺规作角平分线，角平分线的性质定理，切线的判定等知识。熟练上述知识是解题的关键。

(1) 利用尺规作角平分线的方法解答即可；

(2) 如图 2，作 $DE \perp AB$ 于 E ，由角平分线的性质定理可得 $DE = DC$ ，由 DE 是半径， $DE \perp AB$ ，可证 AB 与 $\odot D$ 相切。

【小问 1 详解】

解：如图 1， AD 即为所作；



【小问 2 详解】

图1

证明：如图 2，作 $DE \perp AB$ 于 E ，

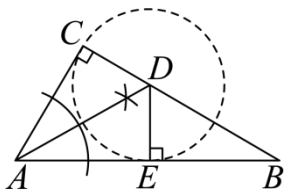


图2

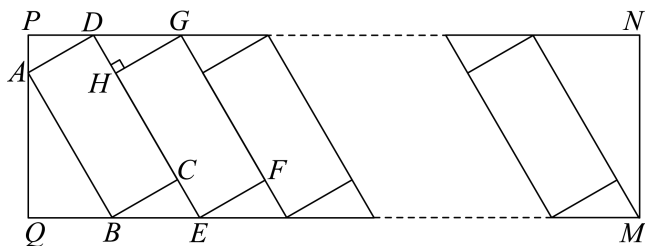
$\because AD$ 是 $\angle CAD$ 的平分线, $DC \perp AC$, $DE \perp AB$,

$\therefore DE = DC$,

$\because DE$ 是半径, $DE \perp AB$,

$\therefore AB$ 与 $\odot D$ 相切.

18. 中国新能源汽车为全球应对气候变化和绿色低碳转型作出了巨大贡献. 为满足新能源汽车的充电需求, 某小区增设了充电站, 如图是矩形 $PQMN$ 充电站的平面示意图, 矩形 $ABCD$ 是其中一个停车位. 经测量, $\angle ABQ = 60^\circ$, $AB = 5.4\text{m}$, $CE = 1.6\text{m}$, $GH \perp CD$, GH 是另一个车位的宽, 所有车位的长宽相同, 按图示并列划定.



根据以上信息回答下列问题: (结果精确到 0.1m , 参考数据 $\sqrt{3} \approx 1.73$)

(1) 求 PQ 的长;

(2) 该充电站有 20 个停车位, 求 PN 的长.

【答案】 (1) 6.1m

(2) 66.7m

【解析】

【分析】 本题主要考查了矩形的性质, 解直角三角形的实际应用:

(1) 先由矩形的性质得到 $\angle Q = \angle P = 90^\circ$, 再解 $\text{Rt}\triangle ABQ$ 得到 $AQ = \frac{27\sqrt{3}}{10}\text{m}$, 接着解直角三角形得到

$BC = \frac{8\sqrt{3}}{5}\text{m}$, 进而求出 $AP = \frac{4\sqrt{3}}{5}\text{m}$, 据此可得答案;

(2) 解 $\text{Rt}\triangle BCE$ 得到 $BE = 3.2\text{m}$, 解 $\text{Rt}\triangle ABQ$ 得到 $BQ = 2.7\text{m}$, 再根据有 20 个停车位计算出 QM 的长即可得到答案.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 四边形 $PQMN$ 是矩形,

$\therefore \angle Q = \angle P = 90^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle ABQ$ 中, $\angle ABQ = 60^\circ$, $AB = 5.4\text{m}$,

$$\therefore AQ = AB \cdot \sin \angle ABQ = \frac{27\sqrt{3}}{10}\text{m}, \quad \angle QAB = 30^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AD = BC, \quad \angle BAD = \angle BCD = \angle ABC = \angle BCE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CBE = 30^\circ,$$

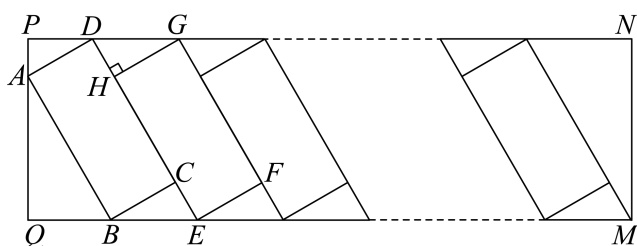
$$\therefore BC = \frac{CE}{\tan \angle CBE} = \frac{8\sqrt{3}}{5}\text{m},$$

$$\therefore AD = \frac{8\sqrt{3}}{5}\text{m};$$

$$\therefore \angle PAD = 180^\circ - 30^\circ - 90^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore AP = AD \cdot \cos \angle PAD = \frac{4\sqrt{3}}{5}\text{m},$$

$$\therefore PQ = AP + AQ = \frac{35\sqrt{3}}{10} \approx 6.1\text{m}$$



【小问 2 详解】

解: 在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 中, $BE = \frac{CE}{\sin \angle CBE} = 3.2\text{m},$

在 $\text{Rt}\triangle ABQ$ 中, $BQ = AB \cdot \cos \angle ABQ = 2.7\text{m},$

$\therefore$ 该充电站有 20 个停车位,

$$\therefore QM = QB + 20BE = 66.7\text{m},$$

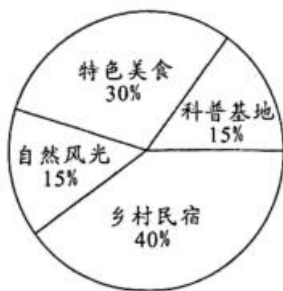
$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore PN = QM = 66.7\text{m}.$$

四、解答题 (二): 本大题共 3 小题, 每小题 9 分, 共 27 分.

19. 端午假期, 王先生计划与家人一同前往景区游玩, 为了选择一个最合适的景区, 王先生对 A 、 B 、 C 三个景区进行了调查与评估. 他依据特色美食、自然风光、乡村民宿及科普基地四个方面, 为每个景区评分 (10 分制). 三个景区的得分如下表所示:

景区	特色美食	自然风光	乡村民宿	科普基地
<i>A</i>	6	8	7	9
<i>B</i>	7	7	8	7
<i>C</i>	8	8	6	6



- (1) 若四项所占百分比如图所示，通过计算回答：王先生会选择哪个景区去游玩？
- (2) 如果王先生认为四项同等重要，通过计算回答：王先生将会选择哪个景区去游玩？
- (3) 如果你是王先生，请按你认为的各项“重要程度”设计四项得分的百分比，选择最合适的景区，并说明理由。

【答案】 (1) 王先生会选择 *B* 景区去游玩

(2) 王先生会选择 *A* 景区去游玩

(3) 最合适的景区是 *B* 景区，理由见解析

【解析】

【分析】 本题主要考查了求平均数和求加权平均数：

- (1) 根据加权平均数的计算方法分别计算出三个景区的得分即可得到答案；
- (2) 根据平均数的计算方法分别计算出三个景区的得分即可得到答案；
- (3) 设计对应的权重，仿照 (1) 求解即可。

【小问 1 详解】

解： *A* 景区得分为 $6 \times 30\% + 8 \times 15\% + 7 \times 40\% + 9 \times 15\% = 7.15$ 分，

B 景区得分为 $7 \times 30\% + 7 \times 15\% + 8 \times 40\% + 7 \times 15\% = 7.4$ 分，

C 景区得分为 $8 \times 30\% + 8 \times 15\% + 6 \times 40\% + 6 \times 15\% = 6.9$ 分，

$\therefore 6.9 < 7.15 < 7.4$ ，

$\therefore$ 王先生会选择 *B* 景区去游玩；

【小问 2 详解】

解：A 景区得分 $\frac{6+7+8+9}{4} = 7.5$ 分，

B 景区得分 $\frac{7+7+8+7}{4} = 7.25$ 分，

C 景区得分 $\frac{6+6+8+8}{4} = 7$ 分，

$\therefore 7 < 7.25 < 7.5$ ，

$\therefore$ 王先生会选择 A 景区去游玩；

【小问 3 详解】

解：最合适的景区是 B 景区，理由如下：

设特色美食、自然风光、乡村民宿及科普基地四个方面的占比分别为 30%, 20%, 40%, 10%，

A 景区得分为 $6 \times 30\% + 8 \times 20\% + 7 \times 40\% + 9 \times 10\% = 7.1$ 分，

B 景区得分为 $7 \times 30\% + 7 \times 20\% + 8 \times 40\% + 7 \times 10\% = 7.4$ 分，

C 景区得分为 $8 \times 30\% + 8 \times 20\% + 6 \times 40\% + 6 \times 10\% = 7$ 分，

$\therefore 7 < 7.1 < 7.4$ ，

$\therefore$ 王先生会选择 B 景区去游玩。

20. 广东省全力实施“百县千镇万村高质量发展工程”，2023 年农产品进出口总额居全国首位，其中荔枝鲜果远销欧美。某果商以每吨 2 万元的价格收购早熟荔枝，销往国外。若按每吨 5 万元出售，平均每天可售出 100 吨。市场调查反映：如果每吨降价 1 万元，每天销售量相应增加 50 吨。该果商如何定价才能使每天的“利润”或“销售收入”最大？并求出其最大值。（题中“元”为人民币）

【答案】 当定价为 4.5 万元每吨时，利润最大，最大值为 312.5 万元

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次函数的实际应用，设每吨降价 x 万元，每天的利润为 w 万元，根据利润 = 每吨的利润 $\times$ 销售量列出 w 关于 x 的二次函数关系式，利用二次函数的性质求解即可。

【详解】 解：设每吨降价 x 万元，每天的利润为 w 万元，

由题意得， $w = (5 - x - 2)(100 + 50x)$

$$= -50x^2 + 50x + 300$$

$$= -50\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 312.5,$$

$\therefore -50 < 0$ ，

$\therefore$ 当 $x = \frac{1}{2}$ 时， w 有最大值，最大值为 312.5，

$\therefore 5 - x = 4.5$ ，

答：当定价为4.5万元每吨时，利润最大，最大值为312.5万元.

21. 综合与实践

【主题】滤纸与漏斗

【素材】如图1所示：

①一张直径为10cm的圆形滤纸；

②一只漏斗口直径与母线均为7cm的圆锥形过滤漏斗.

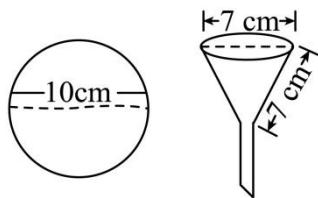


图1

【实践操作】

步骤 1：取一张滤纸；

步骤 2：按如图 2 所示步骤折叠好滤纸；

步骤 3：将其中一层撑开，围成圆锥形；

步骤 4：将围成圆锥形的滤纸放入如图 1 所示漏斗中.

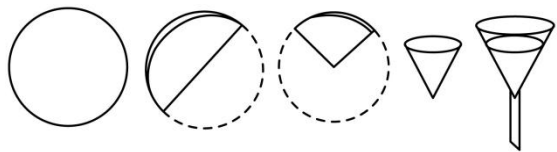


图2

【实践探索】

(1) 滤纸是否能紧贴此漏斗内壁（忽略漏斗管口处）？用你所学的数学知识说明.

(2) 当滤纸紧贴漏斗内壁时，求滤纸围成圆锥形的体积.（结果保留 π ）

【答案】(1) 能，见解析

$$(2) \frac{125\sqrt{3}}{24}\pi\text{cm}^3$$

【解析】

【分析】本题考查了圆锥，解题的关键是：

(1) 利用圆锥的底面周长 = 侧面展开扇形的弧长求出圆锥展开图的扇形圆心角，即可判断；

(2) 利用圆锥的底面周长 = 侧面展开扇形的弧长，求出滤纸围成圆锥形底面圆的半径，利用勾股定理求出圆锥的高，然后利用圆锥体积公式求解即可.

【小问 1 详解】

解：能，

理由：设圆锥展开图的扇形圆心角为 n° ，

根据题意，得 $\frac{n\pi \cdot 7}{180} = 7\pi$ ，

解得 $n = 180^\circ$ ，

$\therefore$ 将圆形滤纸对折，将其中一层撑开，围成圆锥形，此时滤纸能紧贴此漏斗内壁；

【小问 2 详解】

解：设滤纸围成圆锥形底面圆的半径为 $r\text{cm}$ ，高为 $h\text{cm}$ ，

根据题意，得 $2\pi r = \frac{180\pi \times 5}{180}$ ，

解得 $r = \frac{5}{2}$ ，

$\therefore h = \sqrt{5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 \times \frac{5}{2}\sqrt{3} = \frac{125}{24}\sqrt{3}\text{cm}^3$ 。

五、解答题 (三)：本大题共 2 小题，第 22 题 13 分，第 23 题 14 分，共 27 分。

22. 【知识技能】

(1) 如图 1，在 $\triangle ABC$ 中， DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线。连接 CD ，将 $\triangle ADC$ 绕点 D 按逆时针方向旋转，得到 $\triangle A'DC'$ 。当点 E 的对应点 E' 与点 A 重合时，求证： $AB = BC$ 。

【数学理解】

(2) 如图 2，在 $\triangle ABC$ 中 ($AB < BC$)， DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线。连接 CD ，将 $\triangle ADC$ 绕点 D 按逆时针方向旋转，得到 $\triangle A'DC'$ ，连接 $A'B$ ， $C'C$ ，作 $\triangle A'BD$ 的中线 DF 。求证： $2DF \cdot CD = BD \cdot CC'$ 。

【拓展探索】

(3) 如图 3，在 $\triangle ABC$ 中， $\tan B = \frac{4}{3}$ ，点 D 在 AB 上， $AD = \frac{32}{5}$ 。过点 D 作 $DE \perp BC$ ，垂足为 E ， $BE = 3$ ， $CE = \frac{32}{3}$ 。在四边形 $ADEC$ 内是否存在点 G ，使得 $\angle AGD + \angle CGE = 180^\circ$ ？若存在，请给出证明；若不存在，请说明理由。

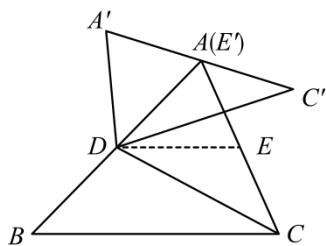


图1

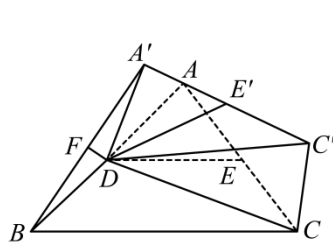


图2

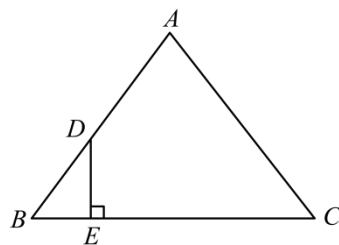


图3

【答案】(1) 证明见解析；(2) 证明见解析；(3) 存在，证明见解析

【解析】

【分析】本题考查了旋转的性质、中位线的性质、外角定理、相似三角形的判定与性质、勾股定理、三角函数，圆内接四边形的对角互补熟练。掌握知识点以及灵活运用是解题的关键。

(1) 根据中位线的性质、旋转的性质即可证明；

(2) 利用旋转的性质、外角定理、中位线的性质证明 $\triangle A'FD \sim \triangle DGC'$ 后即可证明；

(3) 当两圆相交，连接交点与两圆心所构成的四边形为圆内接四边形，其中一组对角互补，即两角之和为 180° 。根据圆内接四边形的对角互补，将问题转化为求出两圆的位置关系即可证明。

【详解】证明：(1) $\because DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线，

$$\therefore DE = \frac{1}{2}BC \text{ 且 } AD = DB = \frac{1}{2}AB.$$

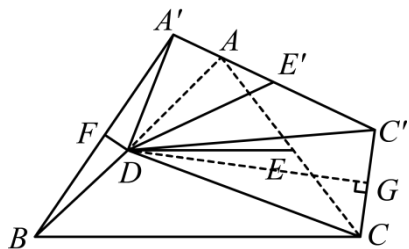
又 $\because \triangle ADC$ 绕点 D 按逆时针方向旋转得到 $\triangle A'DC'$

$$\therefore DE = AD$$

$$\therefore AB = BC.$$

(2) 由题意可知： $DC = DC'$ ， $DA = DA'$ ， $\angle CDC' = \angle ADA'$ 。

作 $DG \perp CC'$ ，则 $CG = C'G = \frac{1}{2}CC'$ 且 $\angle CDG = \angle C'DG = \frac{1}{2}\angle CDC'$ ，



又 $\because BD = DA = DA'$ ，

$$\therefore \angle A'BD = \angle BA'D.$$

根据外角定理

$$\angle A'DA = \angle A'BD - \angle BA'D,$$

$$\therefore \angle BA'D = \frac{1}{2} \angle A'DA,$$

$$\therefore \angle BA'D = \angle C'CG.$$

又 $\because DB = DA'$, DF 是 $\triangle A'BD$ 的中位线,

$$\therefore DF \perp A'B,$$

$$\therefore \angle A'FD = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle A'FD \sim \triangle DGC',$$

$$\therefore \frac{DF}{C'G} = \frac{A'D}{C'D},$$

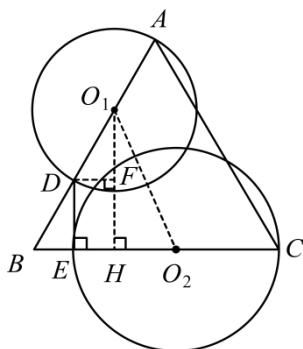
$$\frac{DF}{\frac{1}{2}C'C} = \frac{BD}{CD},$$

$$\therefore 2DF \cdot CD = BD \cdot CC'.$$

(3) 假设存在点 G 使得 $\angle AGD + \angle CGE = 180^\circ$,

如图分别以 AD , CE 为直径画圆, 圆心分别为 O_1 , O_2 , 半径分别为 r , R , 则 $r = \frac{16}{5}$, $R = \frac{16}{3}$.

过点 O_1 作 $O_1H \perp BC$ 于点 H , 过点 D 作 $DF \perp O_1H$ 于点 F ,



则有 $DF \parallel BC$, 四边形 $DEHF$ 为长方形,

$$\therefore \angle O_1FD = \angle FHB = \angle DEB = 90^\circ, \quad \angle O_1DF = \angle DBE,$$

$$\therefore \triangle O_1FD \sim \triangle DEB,$$

$$\therefore \frac{O_1D}{DB} = \frac{O_1F}{DE} = \frac{DF}{BE}, \quad \frac{DB}{DE} = \frac{O_1D}{O_1F}.$$

$$\text{又} \because \text{在} \triangle BDE \text{ 中, } DE = BE \cdot \tan B = 3 \times \frac{4}{3} = 4,$$

$$BD = \sqrt{BE^2 + DE^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad r = O_1D = \frac{16}{5},$$

根据勾股定理可得:

$$DE = FH = 4, \quad DB = 5,$$

$$\therefore O_1F = \frac{64}{25}, \quad DF = EH = \frac{48}{25}.$$

$$\therefore O_1H = O_1F + 4 = \frac{164}{25} = 6.56, \quad O_2H = R - EH = \frac{16}{3} - \frac{48}{25} = \frac{256}{75} \approx 3.41.$$

在 $Rt\triangle O_1HO_2$ 中,

$$O_1O_2 = \sqrt{O_1H^2 + O_2H^2} \approx 7.39.$$

$$\text{又} \because r + R = \frac{16}{5} + \frac{16}{3} \approx 8.5,$$

$$\therefore O_1O_2 < r + R,$$

$\therefore$ 两圆有交点, 满足 $\angle AGD + \angle CGE = 180^\circ$.

23. 【问题背景】

如图 1, 在平面直角坐标系中, 点 B, D 是直线 $y = ax (a > 0)$ 上第一象限内的两个动点 ($OD > OB$), 以线段 BD 为对角线作矩形 $ABCD$, $AD \parallel x$ 轴. 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 A .

反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 A .

【构建联系】

(1) 求证: 函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象必经过点 C .

(2) 如图 2, 把矩形 $ABCD$ 沿 BD 折叠, 点 C 的对应点为 E . 当点 E 落在 y 轴上, 且点 B 的坐标为 $(1, 2)$ 时, 求 k 的值.

【深入探究】

(3) 如图 3, 把矩形 $ABCD$ 沿 BD 折叠, 点 C 的对应点为 E . 当点 E, A 重合时, 连接 AC 交 BD 于点 P . 以点 O 为圆心, AC 长为半径作 $\odot O$. 若 $OP = 3\sqrt{2}$, 当 $\odot O$ 与 $\triangle ABC$ 的边有交点时, 求 k 的取值范围.

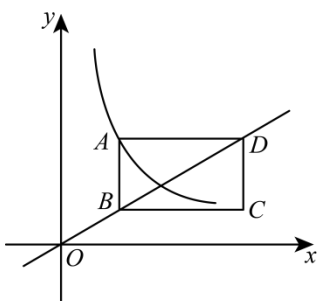


图1

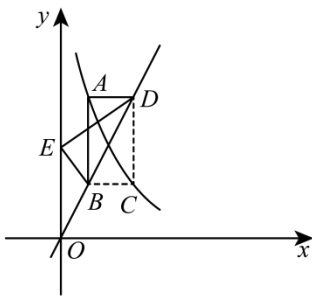


图2

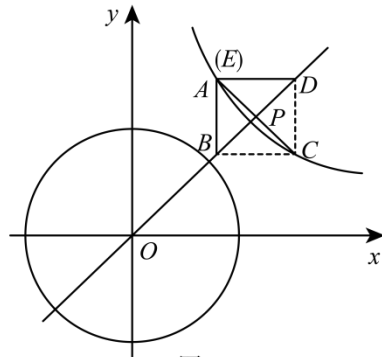


图3

【答案】(1) 证明见解析; (2) $k = \frac{16}{3}$; (3) $6 \leq k \leq 8$

【解析】

【分析】(1) 设 $B(m, ma)$, 则 $A\left(m, \frac{k}{m}\right)$, 用含 m, k 的代数式表示出 $C\left(\frac{k}{am}, am\right)$, 再代入 $y = \frac{k}{x}$ 验证即可得解;

(2) 先由点 B 的坐标和 k 表示出 $DC = k - 2$, 再由折叠性质得出 $2 = \frac{DE}{BE}$, 如图, 过点 D 作 $DH \perp y$ 轴, 过点 B 作 $BF \perp y$ 轴, 证出 $\triangle DHE \sim \triangle EFB$, 由比值关系可求出 $HF = 2 + \frac{k}{4}$, 最后由 $HF = DC$ 即可得解;

(3) 当 $\odot O$ 过点 B 时, 如图所示, 过点 D 作 $DH \parallel x$ 轴交 y 轴于点 H , 求出 k 的值, 当 $\odot O$ 过点 A 时, 根据 A, C 关于直线 OD 对称, $\odot O$ 必过点 C , 如图所示, 连 AO, CO , 过点 D 作 $DH \parallel x$ 轴交 y 轴于点 H , 求出 k 的值, 进而即可求出 k 的取值范围.

【详解】(1) 设 $B(m, ma)$, 则 $A\left(m, \frac{k}{m}\right)$,

$\therefore AD \parallel x$ 轴,

$\therefore D$ 点的纵坐标为 $\frac{k}{m}$,

$\therefore$ 将 $y = \frac{k}{m}$ 代入 $y = ax$ 中得: $\frac{k}{m} = ax$ 得,

$\therefore x = \frac{k}{am}$,

$\therefore D\left(\frac{k}{am}, \frac{k}{m}\right)$,

$\therefore C\left(\frac{k}{am}, am\right)$,

$\therefore$ 将 $x = \frac{k}{am}$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ 中得出 $y = am$,

$\therefore$ 函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象必经过点 C ;

(2) $\because$ 点 $B(1, 2)$ 在直线 $y = ax$ 上,

$\therefore a = 2$,

$\therefore y = 2x$,

$\therefore A$ 点的横坐标为 1, C 点的纵坐标为 2,

$\therefore$ 函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 A, C ,

$$\therefore C\left(\frac{k}{2}, 2\right), A(1, k),$$

$$\therefore D\left(\frac{k}{2}, k\right),$$

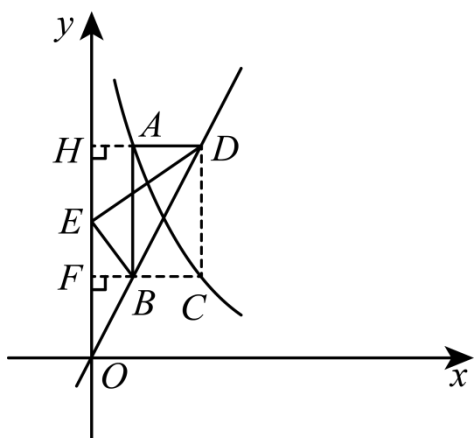
$$\therefore DC = k - 2,$$

$\therefore$ 把矩形 $ABCD$ 沿 BD 折叠, 点 C 的对应点为 E ,

$$\therefore BE = BC = \frac{k}{2} - 1, \angle BED = \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\therefore \frac{DC}{BC} = \frac{k-2}{\frac{k}{2}-1} = 2 = \frac{DE}{BE},$$

如图, 过点 D 作 $DH \perp y$ 轴, 过点 B 作 $BF \perp y$ 轴,



$\therefore AD \parallel x$ 轴,

$\therefore H, A, D$ 三点共线,

$$\therefore \angle HED + \angle BEF = 90^\circ, \angle BEF + \angle EBF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle HED = \angle EBF,$$

$$\therefore \angle DHE = \angle EFB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle DHE \sim \triangle EFB,$$

$$\therefore \frac{DH}{EF} = \frac{HE}{BF} = \frac{DE}{BE} = 2,$$

$$\therefore BF = 1, DH = \frac{k}{2}$$

$$\therefore HE = 2, EF = \frac{k}{4},$$

$$\therefore HF = 2 + \frac{k}{4},$$

由图知, $HF = DC$,

$$\therefore 2 + \frac{k}{4} = k - 2,$$

$$\therefore k = \frac{16}{3};$$

(3) $\because$ 把矩形 $ABCD$ 沿 BD 折叠, 点 C 的对应点为 E , 当点 E, A 重合,

$\therefore AC \perp BD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为矩形,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为正方形, $\angle ABP = \angle DBC = 45^\circ$,

$$\therefore AB = BC = CD = DA = \frac{AP}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}AP, \quad AP = PC = BP = \frac{1}{2}AC, \quad BP \perp AC,$$

$\therefore BC \parallel x$ 轴,

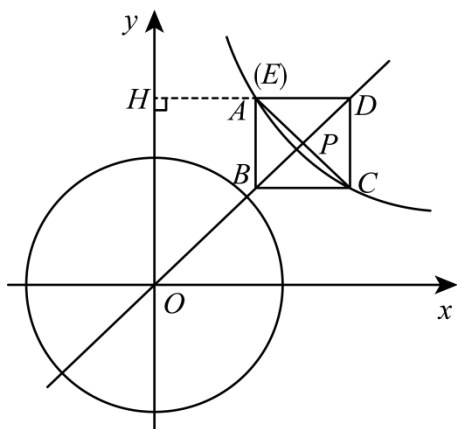
$\therefore$ 直线 $y = ax$ 为一、三象限的夹角平分线,

$\therefore y = x$,

当 $\odot O$ 过点 B 时, 如图所示, 过点 D 作 $DH \parallel x$ 轴交 y 轴于点 H ,

$\therefore AD \parallel x$ 轴,

$\therefore H, A, D$ 三点共线,



$\therefore$ 以点 O 为圆心, AC 长为半径作 $\odot O$, $OP = 3\sqrt{2}$,

$$\therefore OP = OB + BP = AC + BP = 2AP + AP = 3AP = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore AP = \sqrt{2},$$

$$\therefore AB = AD = \sqrt{2}AP = 2, \quad BD = 2AP = 2\sqrt{2}, \quad BO = AC = 2AP = 2\sqrt{2},$$

$\therefore AB \parallel y$ 轴,

$$\therefore \Delta DHO \sim \Delta DAB,$$

$$\therefore \frac{HO}{AB} = \frac{DH}{AD} = \frac{DO}{BD},$$

$$\therefore \frac{HO}{2} = \frac{DH}{2} = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}},$$

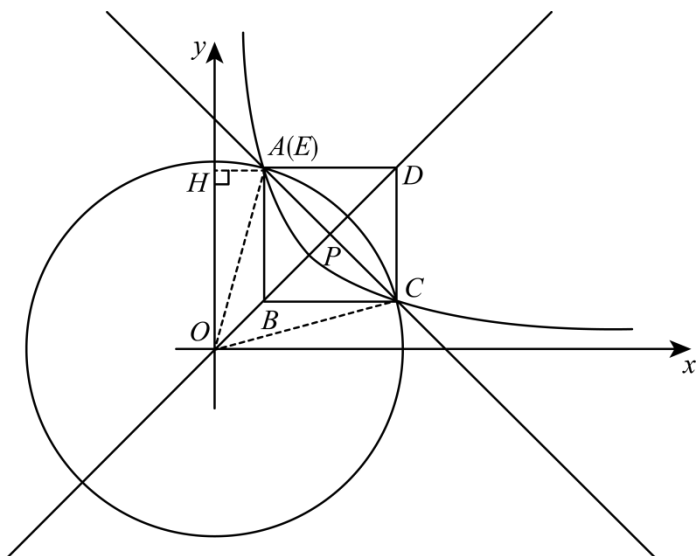
$$\therefore HO = HD = 4,$$

$$\therefore HA = HD - DA = 4 - 2 = 2,$$

$$\therefore A(2,4),$$

$$\therefore k = 2 \times 4 = 8,$$

当 $\odot O$ 过点 A 时, 根据 A, C 关于直线 OD 对称, $\odot O$ 必过点 C , 如图所示, 连 AO, CO , 过点 D 作 $DH \parallel x$ 轴交 y 轴于点 H ,



$$\therefore AO = OC = AC,$$

$\therefore \triangle AOC$ 为等边三角形,

$$\therefore OP \perp AC,$$

$$\therefore \angle AOP = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore AP = \tan 30^\circ \times OP = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 3\sqrt{2} = \sqrt{6} = PD, \quad AC = BD = 2AP = 2\sqrt{6},$$

$$\therefore AB = AD = \sqrt{2}AP = 2\sqrt{3}, \quad OD = BP + PD = 3\sqrt{2} + \sqrt{6},$$

$\therefore AB \parallel y \text{ 轴},$

$$\therefore \Delta DHO \sim \Delta DAB,$$

$$\therefore \frac{HO}{AB} = \frac{DH}{AD} = \frac{DO}{BD},$$

$$\therefore \frac{HO}{2\sqrt{3}} = \frac{DH}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2\sqrt{6}},$$

$$\therefore HO = HD = 3 + \sqrt{3},$$

$$\therefore HA = HD - DA = 3 + \sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 3 - \sqrt{3},$$

$$\therefore A(3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}),$$

$$\therefore k = (3 - \sqrt{3}) \times (3 + \sqrt{3}) = 6,$$

$\therefore$ 当 $\odot O$ 与 $\triangle ABC$ 的边有交点时, k 的取值范围为 $6 \leq k \leq 8$.

【点睛】 本题主要考查了相似三角形的判定和性质, 解直角三角形, 一次函数的性质, 反比例函数的性质, 矩形的性质, 正方形的判定和性质, 轴对称的性质, 圆的性质等知识点, 熟练掌握其性质, 合理作出辅助线是解决此题的关键.