

2024 年烟台市初中学业水平考试

数学试题

注意事项：

1. 本试卷共 8 页，共 120 分；考试时间 120 分钟。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，务必用 0.5 毫米黑色签字笔将自己的姓名、准考证号、座位号填写在试卷和答题卡规定的位置上。
3. 选择题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。
4. 非选择题必须用 0.5 毫米黑色签字笔作答，答案必须写在答题卡指定区域内相应的位置；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不能使用涂改液、胶带纸、修正带。
5. 写在试卷上或答题卡指定区域外的答案无效。
6. 考试过程中允许考生进行剪、拼、折叠等实验。

一、选择题（本大题共 10 个小题，每小题 3 分，满分 30 分）每小题都给出标号为 A, B, C, D 四个备选答案，其中有且只有一个是正确的。

1. 下列实数中的无理数是（ ）

A. $\frac{2}{3}$

B. 3.14

C. $\sqrt{15}$

D. $\sqrt[3]{64}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查无理数，根据无理数的定义：无限不循环小数，叫做无理数，进行判断即可。

【详解】解：A、 $\frac{2}{3}$ 是有理数，不符合题意；

B、3.14 是有理数，不符合题意；

C、 $\sqrt{15}$ 是无理数，符合题意；

D、 $\sqrt[3]{64} = 4$ 是有理数，不符合题意；

故选 C.

2. 下列运算结果为 a^6 的是（ ）

A. $a^2 \cdot a^3$

B. $a^{12} \div a^2$

C. $a^3 + a^3$

D. $(a^2)^3$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了同底数幂的乘法，同底数幂的除法，合并同类项，幂的乘方，解题的关键是熟练掌握以上运算法则；

根据同底数幂的乘法同底数幂的除法，合并同类项，幂的乘方，运算法则计算即可

【详解】A. $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$ ，故选项不符合题意；

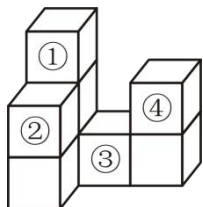
B. $a^{12} \div a^2 = a^{12-2} = a^{10}$ ，故选项不符合题意；

C. $a^3 + a^3 = 2a^3$ ，故选项不符合题意；

D. $(a^2)^3 = a^{2 \times 3} = a^6$ ，故选项符合题意；

故选：D.

3. 下图是由 8 个大小相同的小正方体组成的几何体，若从标号为①②③④的小正方体中取走一个，使新几何体的左视图既是轴对称图形又是中心对称图形，则应取走（ ）



A. ①

B. ②

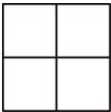
C. ③

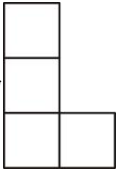
D. ④

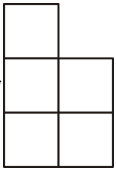
【答案】A

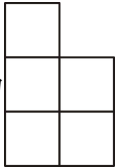
【解析】

【分析】本题考查几何体的三视图，熟练掌握三视图的画法是解题的关键．分别画出各选项得出的左视图，再判断即可．

【详解】解：A、取走①时，左视图为 ，既是轴对称图形又是中心对称图形，故选项 A 符合题意；

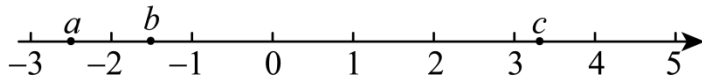
B、取走②时，左视图为 ，既不是轴对称图形也不是中心对称图形，故选项 B 不符合题意；

C、取走③时，左视图为 ，既不是轴对称图形也不是中心对称图形，故选项 C 不符合题意；

D、取走④时，左视图为 ，既不是轴对称图形也不是中心对称图形，故选项 D 不符合题意；

故选：A.

4. 实数 a , b , c 在数轴上的位置如图所示，下列结论正确的是 ()



- A. $b+c>3$ B. $a-c<0$ C. $|a|>|c|$ D. $-2a<-2b$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了数轴，绝对值，不等式的性质，根据数轴分别判断 a , b , c 的正负，然后判断即可，解题的关键是结合数轴判断 a , b , c 的正负.

【详解】由数轴可得， $-3<a<-2$ ， $-2<b<-1$ ， $3<c<4$ ，

A、 $b+c<3$ ，原选项判断错误，不符合题意，

B、 $a-c<0$ ，原选项判断正确，符合题意，

C、根据数轴可知： $|a|<|c|$ ，原选项判断错误，不符合题意，

D、根据数轴可知： $a<b$ ，则 $-2a>-2b$ ，原选项判断错误，不符合题意，

故选：B.

5. 目前全球最薄的手撕钢产自中国，厚度只有 0.015 毫米，约是 A4 纸厚度的六分之一，已知 1 毫米=1 百万纳米，0.015 毫米等于多少纳米？将结果用科学记数法表示为 ()

- A. 0.15×10^3 纳米 B. 1.5×10^4 纳米 C. 15×10^{-5} 纳米 D. 1.5×10^{-6} 纳米

【答案】B

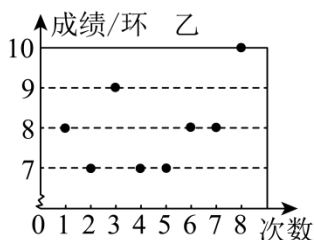
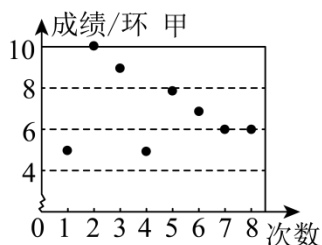
【解析】

【分析】本题考查科学记数法，根据科学记数法的表示方法： $a\times 10^n$, $1\leq|a|<10$, n 为整数进行表示即可.

【详解】解：0.015 毫米 $= 0.015\times 1000000 = 1.5\times 10^4$ 纳米；

故选 B.

6. 射击运动队进行射击测试，甲、乙两名选手的测试成绩如下图，其成绩的方差分别记为 $S_{\text{甲}}^2$ 和 $S_{\text{乙}}^2$ ，则 $S_{\text{甲}}^2$ 和 $S_{\text{乙}}^2$ 的大小关系是 ()



- A. $S_{\text{甲}}^2 > S_{\text{乙}}^2$ B. $S_{\text{甲}}^2 < S_{\text{乙}}^2$ C. $S_{\text{甲}}^2 = S_{\text{乙}}^2$ D. 无法确定

【答案】 A

【解析】

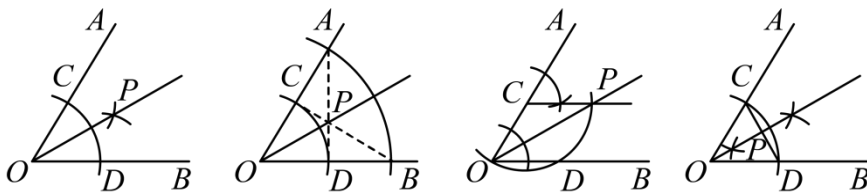
【分析】 本题考查比较方差的大小，根据折线图，得到乙选手的成绩波动较小，即可得出结果.

【详解】 解： $\because$ 方差表示数据的离散程度，方差越大，数据波动越大，方差越小，数据波动越小，由折线图可知乙选手的成绩波动较小，

$$\therefore S_{\text{甲}}^2 > S_{\text{乙}}^2;$$

故选 A.

7. 某班开展“用直尺和圆规作角平分线”的探究活动，各组展示作图痕迹如下，其中射线 OP 为 $\angle AOB$ 的平分线的有 ()



- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查角平分线的判定，全等三角形的判定和性质，等腰三角形的判定和性质，中垂线的性质和判定，根据作图痕迹，逐一进行判断即可.

【详解】 解： 第一个图为尺规作角平分线的方法， OP 为 $\angle AOB$ 的平分线；

第二个图，由作图可知： $OC = OD, OA = OB$,

$$\therefore AC = BD,$$

$$\therefore \angle AOD = \angle BOC,$$

$$\therefore \triangle AOD \cong \triangle BOC,$$

$$\therefore \angle OAD = \angle OBC,$$

$$\therefore AC = BD, \angle BPD = \angle APC,$$

$$\therefore \triangle BPD \cong \triangle APC,$$

$$\therefore AP = BP,$$

$$\because OA = OB, OP = OP,$$

$$\therefore \triangle AOP \cong \triangle BOP,$$

$$\therefore \angle AOP = \angle BOP,$$

$\therefore OP$ 为 $\angle AOB$ 的平分线;

第三个图, 由作图可知 $\angle ACP = \angle AOB, OC = CP$,

$$\therefore CP \parallel BO, \angle COP = \angle CPO,$$

$$\therefore \angle CPO = \angle BOP$$

$$\therefore \angle COP = \angle BOP,$$

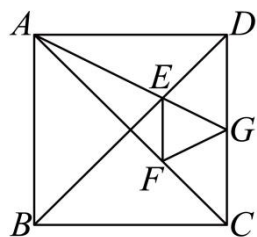
$\therefore OP$ 为 $\angle AOB$ 的平分线;

第四个图, 由作图可知: $OP \perp CD, OC = OD$,

$\therefore OP$ 为 $\angle AOB$ 的平分线;

故选 D.

8. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E, F 分别为对角线 BD, AC 的三等分点, 连接 AE 并延长交 CD 于点 G , 连接 EF, FG , 若 $\angle AGF = \alpha$, 则 $\angle FAG$ 用含 α 的代数式表示为 ()



A. $\frac{45^\circ - \alpha}{2}$

B. $\frac{90^\circ - \alpha}{2}$

C. $\frac{45^\circ + \alpha}{2}$

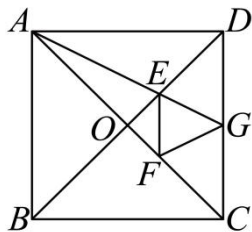
D. $\frac{\alpha}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了正方形的性质, 相似三角形的判定和性质, 全等三角形的判定和性质, 三角形的外角性质. 证明 $\triangle EOF \sim \triangle DOC$, 求得 $\angle OFE = 45^\circ$, 证明 $\triangle ABE \sim \triangle GDE$, 证得 $DG = \frac{1}{2}CD = CG$, 推出 $\triangle DEG \cong \triangle CFG$ (SAS), 得到 $GE = GF$, 据此求解即可.

【详解】解: $\because$ 正方形 $ABCD$ 中, 点 E, F 分别为对角线 BD, AC 的三等分点,



$$\therefore OD = OC, \angle ODC = \angle OCD = 45^\circ, DE = CF,$$

$$\therefore OE = OF,$$

$$\because \angle EOF = \angle DOC, \frac{OE}{OD} = \frac{OF}{OC},$$

$$\therefore \triangle EOF \sim \triangle DOC,$$

$$\therefore \angle OFE = \angle OCD = 45^\circ,$$

$\because$ 点 E, F 分别为对角线 BD, AC 的三等分点,

$$\therefore \frac{DE}{BE} = \frac{1}{2},$$

$\because$ 正方形 $ABCD$,

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle GDE,$$

$$\therefore \frac{DG}{AB} = \frac{DE}{BE} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore DG = \frac{1}{2}CD = CG,$$

$$\therefore \triangle DEG \cong \triangle CFG (\text{SAS}),$$

$$\therefore GE = GF,$$

$$\therefore \angle GEF = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AGF) = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha,$$

$$\therefore \angle FAG = \angle GEF - \angle AFE = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha - 45^\circ = 45^\circ - \frac{1}{2}\alpha = \frac{90^\circ - \alpha}{2},$$

故选: B.

9. 《周髀算经》是中国现存最早的数理天文著作. 书中记载这样一道题: “今有女子不善织, 日减功迟. 初日织五尺, 末日织一尺, 今三十日织, 问织几何?” 意思是: 现有一个不擅长织布的女子, 织布的速度越来越慢, 并且每天减少的数量相同. 第一天织了五尺布, 最后一天仅织了一尺布, 30 天完工, 问一共织了多少布?



A. 45 尺

B. 88 尺

C. 90 尺

D. 98 尺

【答案】C

【解析】

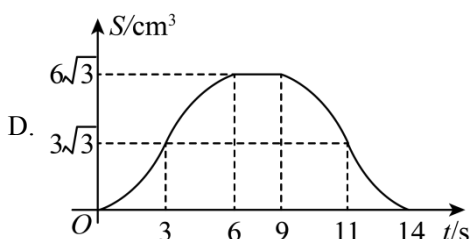
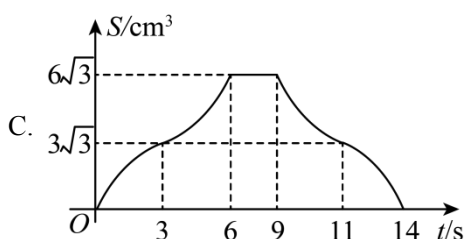
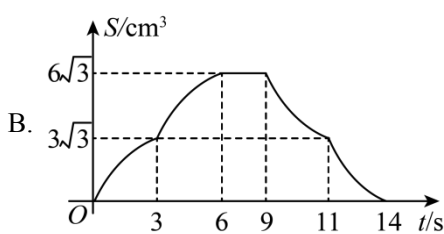
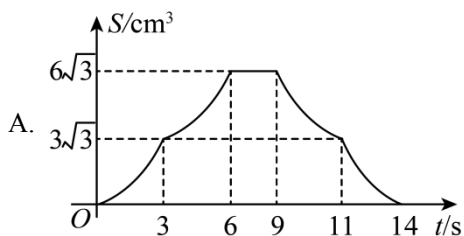
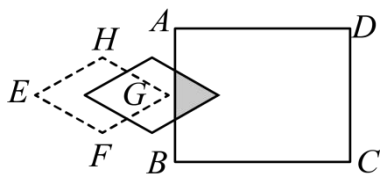
【分析】本题考查了数字的变化规律，由题意可知每天减少的量一样，由数的规律求和 $\frac{1}{2}(1+5) \times 30$ 即可，读懂题意，找出规律是解题的关键.

【详解】解：由题意得，第一天织布 5 尺，第 30 天织布 1 尺，

$$\therefore \text{一共织布 } \frac{1}{2}(1+5) \times 30 = 90 \text{ (尺)},$$

故选：C.

10. 如图，水平放置的矩形 $ABCD$ 中， $AB = 6\text{cm}$ ， $BC = 8\text{cm}$ ，菱形 $EFGH$ 的顶点 E ， G 在同一水平线上，点 G 与 AB 的中点重合， $EF = 2\sqrt{3}\text{cm}$ ， $\angle E = 60^\circ$ ，现将菱形 $EFGH$ 以 1cm/s 的速度沿 BC 方向匀速运动，当点 E 运动到 CD 上时停止，在这个运动过程中，菱形 $EFGH$ 与矩形 $ABCD$ 重叠部分的面积 $S(\text{cm}^2)$ 与运动时间 $t(\text{s})$ 之间的函数关系图象大致是 ()

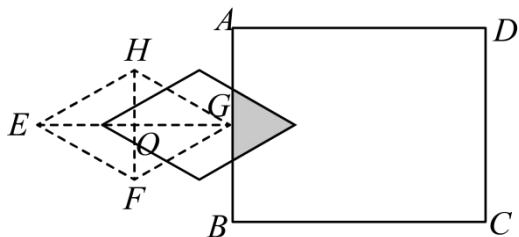


【答案】D

【解析】

【分析】 本题考查了解直角三角形的应用，菱形的性质，动点问题的函数图象，二次函数的图象的性质，先求得菱形的面积为 $6\sqrt{3}$ ，进而分三种情形讨论，重合部分为三角形，重合部分为五边形，重合部分为菱形，分别求得面积与运动时间的函数关系式，结合选项，即可求解.

【详解】 解： 如图所示， 设 EG, HF 交于点 O ，



$\because$ 菱形 $EFGH$ ， $\angle E = 60^\circ$ ，

$\therefore HG = GF$

又 $\because \angle E = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle HFG$ 是等边三角形，

$\because EF = 2\sqrt{3}\text{cm}$ ， $\angle HEF = 60^\circ$ ，

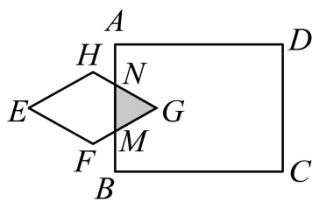
$\therefore \angle OEF = 30^\circ$

$\therefore EG = 2EO = 2 \times EF \cos 30^\circ = \sqrt{3}EF = 6$

$\therefore S_{\text{菱形}EFGH} = \frac{1}{2}EG \cdot FH = \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

当 $0 \leq x \leq 3$ 时， 重合部分为 $\triangle MNG$ ，

如图所示，

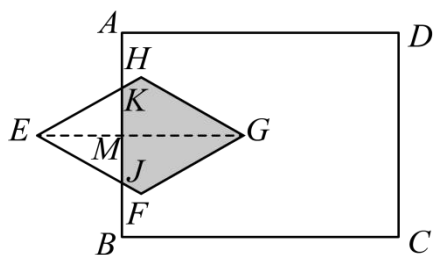


依题意， $\triangle MNG$ 为等边三角形，

运动时间为 t ， 则 $NG = \frac{t}{\cos 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}t$ ，

$\therefore S = \frac{1}{2} \times NG \times NG \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}t \right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}t^2$

当 $3 < x \leq 6$ 时， 如图所示，



依题意, $EM = EG - t = 6 - t$, 则 $EK = \frac{EM}{\sin 60^\circ} = \frac{6-t}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}(6-t)$

$$\therefore S_{\triangle EKJ} = \frac{1}{2} EJ \cdot EM = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} (6-t)^2 = \frac{\sqrt{3}}{3} (6-t)^2$$

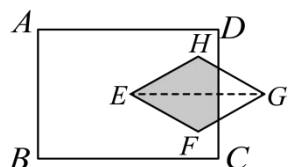
$$\therefore S = S_{\text{菱形}EFGH} - S_{\triangle EKJ}$$

$$= 6 - \frac{\sqrt{3}}{3} (6-t)^2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} t^2 + 4\sqrt{3}t - 12\sqrt{3} + 6$$

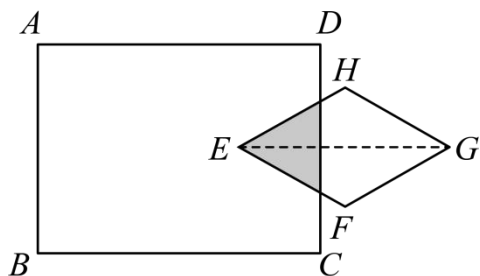
$$\therefore EG = 6 < BC$$

$$\therefore \text{当 } 6 < x \leq 8 \text{ 时, } S = 6\sqrt{3}$$

$$\text{当 } 8 < x \leq 11 \text{ 时, 同理可得, } S = 6 - \frac{\sqrt{3}}{3} (t-8)^2$$



$$\text{当 } 11 < x \leq 14 \text{ 时, 同理可得, } S = \frac{\sqrt{3}}{3} [6 - (t-8)]^2 = \frac{\sqrt{3}}{3} (14-t)^2$$



综上所述, 当 $0 \leq x \leq 3$ 时, 函数图象为开口向上的一段抛物线, 当 $3 < x \leq 6$ 时, 函数图象为开口向下的一段抛物线, 当 $6 < x \leq 8$ 时, 函数图象为一条线段, 当 $8 < x \leq 11$ 时, 函数图象为开口向下的一段抛物线, 当 $11 < x \leq 14$ 时, 函数图象为开口向上的一段抛物线;

故选: D.

二、填空题（本大题共 6 个小题，每小题 3 分，满分 18 分）

11. 若代数式 $\frac{3}{\sqrt{x-1}}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围为_____.

【答案】 $x > 1$

【解析】

【分析】 本题考查代数式有意义，根据分式的分母不为 0，二次根式的被开方数为非负数，进行求解即可.

【详解】 解：由题意，得： $x-1 > 0$ ，

解得： $x > 1$ ；

故答案为： $x > 1$.

12. 关于 x 的不等式 $m - \frac{x}{2} \leq 1 - x$ 有正数解， m 的值可以是_____（写出一个即可）.

【答案】 0（答案不唯一）

【解析】

【分析】 本题考查了一元一次不等式的求解，先求出不等式的解集，根据不等式有正数解可得关于 m 的一元一次不等式，即可求出 m 的取值范围，进而可得 m 的值，求出 m 的取值范围是解题的关键.

【详解】 解：不等式移项合并同类项得， $\frac{1}{2}x \leq 1 - m$ ，

系数化为 1 得， $x \leq 2 - 2m$ ，

$\therefore$ 不等式 $m - \frac{x}{2} \leq 1 - x$ 有正数解，

$\therefore 2 - 2m > 0$ ，

解得 $m < 1$ ，

$\therefore m$ 的值可以是 0，

故答案为： 0.

13. 若一元二次方程 $2x^2 - 4x - 1 = 0$ 的两根为 m ， n ， 则 $3m^2 - 4m + n^2$ 的值为_____.

【答案】 6

【解析】

【分析】 本题考查了根与系数的关系及利用完全平方公式求解，若 x_1, x_2 是一元二次方程

$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两根时， $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ ， 熟练掌握一元二次方程根与系数的关系是解题

关键.

根据根与系数的关系得 $m+n=2$, $mn=-\frac{1}{2}$, $2m^2-4m=1$, 再把 $3m^2-4m+n^2$ 变形为 $2m^2-4m+m^2+n^2$, 然后利用整体代入的方法计算, 再利用完全平方公式求解即可.

【详解】解: $\because$ 一元二次方程 $2x^2-4x-1=0$ 的两个根为 m , n ,

$$\therefore m+n=2, \quad mn=-\frac{1}{2}, \quad 2m^2-4m=1$$

$$\therefore 3m^2-4m+n^2$$

$$= 2m^2-4m+m^2+n^2$$

$$= m^2+n^2+1$$

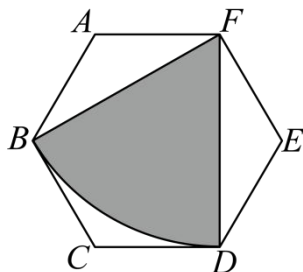
$$= (m+n)^2-2mn+1$$

$$= 2^2-2\times(-\frac{1}{2})+1$$

$$= 6$$

故答案为: 6.

14. 如图, 在边长为 6 的正六边形 $ABCDEF$ 中, 以点 F 为圆心, 以 FB 的长为半径作 $\widehat{BD}$, 剪下图中阴影部分做一个圆锥的侧面, 则这个圆锥的底面半径为_____.



【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查正多边形的性质, 求圆锥的底面半径, 先求出正六边形的一个内角的度数, 进而求出扇形的圆心角的度数, 过点 A 作 $AG \perp BF$, 求出 BF 的长, 再利用圆锥底面圆的周长等于扇形的弧长, 进行求解即可.

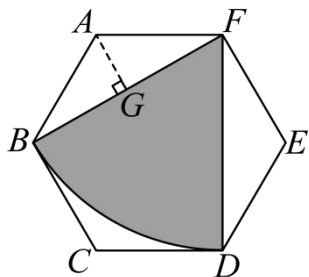
【详解】解: $\because$ 正六边形 $ABCDEF$,

$$\therefore \angle BAF = \angle AFE = \angle E = \frac{(6-2) \cdot 180^\circ}{6} = 120^\circ, \quad AB = AF = EF = DE = 6,$$

$$\therefore \angle AFB = \angle ABF = \frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ, \quad \angle EFD = \angle EDF = \frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BFD = 120^\circ - 2 \times 30^\circ = 60^\circ,$$

过点 A 作 $AG \perp BF$ 于点 G, 则: $BF = 2FG = 2AF \cdot \cos 30^\circ = 2 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$,

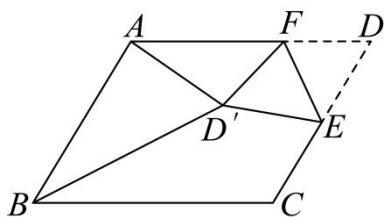


设圆锥的底面圆的半径为 r , 则: $2\pi r = \frac{60\pi}{180} \times 6\sqrt{3}$,

$$\therefore r = \sqrt{3};$$

故答案为: $\sqrt{3}$.

15. 如图, 在 $ABCD$ 中, $\angle C = 120^\circ$, $AB = 8$, $BC = 10$. E 为边 CD 的中点, F 为边 AD 上的一动点, 将 $\triangle DEF$ 沿 EF 翻折得 $\triangle D'EF$, 连接 AD' , BD' , 则 $\triangle ABD'$ 面积的最小值为_____.



【答案】 $20\sqrt{3} - 16$

【解析】

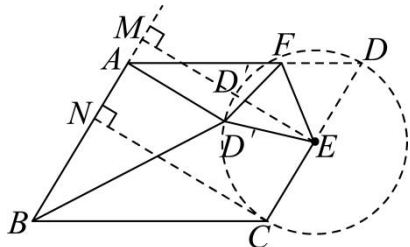
【分析】根据平行四边形的性质得到 $CD = AB = 8$, $AB \parallel CD$, $\angle ABC = 60^\circ$, 由折叠性质得到 $ED' = DE = 4$, 进而得到点 D' 在以 E 为圆心, 4 为半径的圆上运动, 如图, 过 E 作 $EM \perp AB$ 交 AB 延长线于 M , 交圆 E 于 D' , 此时 D' 到边 AB 的距离最短, 最小值为 $D'M$ 的长, 即此时 $\triangle ABD'$ 面积的最小, 过 C 作 $CN \perp AB$ 于 N , 根据平行线间的距离处处相等得到 $EM = CN$, 故只需利用锐角三角函数求得 $CN = 5\sqrt{3}$ 即可求解.

【详解】解: $\because$ 在 $ABCD$ 中, $\angle BCD = 120^\circ$, $AB = 8$,
 $\therefore CD = AB = 8$, $AB \parallel CD$, 则 $\angle ABC = 180^\circ - \angle BCD = 60^\circ$,
 $\because E$ 为边 CD 的中点,
 $\therefore DE = CE = \frac{1}{2}CD = 4$,

$\therefore \triangle DEF$ 沿 EF 翻折得 $\triangle D'EF$,

$\therefore ED' = DE = 4$,

$\therefore$ 点 D' 在以 E 为圆心, 4 为半径的圆上运动, 如图, 过 E 作 $EM \perp AB$ 交 AB 延长线于 M , 交圆 E 于 D'' , 此时 D'' 到边 AB 的距离最短, 最小值为 $D'M$ 的长, 即 $\triangle ABD'$ 面积的最小,



过 C 作 $CN \perp AB$ 于 N ,

$\therefore AB \parallel CD$,

$\therefore EM = CN$,

在 $Rt\triangle BCN$ 中, $BC = 10$, $\angle CBN = 60^\circ$,

$$\therefore CN = BC \cdot \sin 60^\circ = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3},$$

$$\therefore D'M = ME - ED' = 5\sqrt{3} - 4,$$

$$\therefore \triangle ABD' \text{ 面积的最小值为 } \frac{1}{2} \times 8 \times (5\sqrt{3} - 4) = 20\sqrt{3} - 16,$$

故答案为: $20\sqrt{3} - 16$.

【点睛】本题考查平行四边形的性质、折叠性质、圆的有关性质以及直线与圆的位置关系、锐角三角函数等知识, 综合性强的填空压轴题, 得到点 D' 的运动路线是解答的关键.

16. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的 y 与 x 的部分对应值如下表:

x	-4	-3	-1	1	5
y	0	5	9	5	-27

下列结论: ① $abc > 0$; ② 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 9$ 有两个相等的实数根; ③ 当 $-4 < x < 1$

时, y 的取值范围为 $0 < y < 5$; ④ 若点 (m, y_1) , $(-m-2, y_2)$ 均在二次函数图象上, 则 $y_1 = y_2$; ⑤ 满足

$ax^2 + (b+1)x + c < 2$ 的 x 的取值范围是 $x < -2$ 或 $x > 3$. 其中正确结论的序号为_____.

【答案】①②④

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数的图象和性质， 利用待定系数法求出 a 、 b 、 c 的值即可判断①； 利用根的判别式即可判断②； 利用二次函数的性质可判断③； 利用对称性可判断④； 画出函数图形可判断⑤； 掌握二次函数的图象和性质是解题的关键.

【详解】 解： 把 $(-4,0)$ ， $(-1,9)$ ， $(1,5)$ 代入 $y = ax^2 + bx + c$ 得，

$$\begin{cases} 16a - 4b + c = 0 \\ a - b + c = 9 \\ a + b + c = 5 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = 8 \end{cases},$$

$\therefore abc > 0$ ， 故① 正确；

$\because a = -1$ ， $b = -2$ ， $c = 8$ ，

$\therefore y = -x^2 - 2x + 8$ ，

当 $y = 9$ 时， $-x^2 - 2x + 8 = 9$ ，

$\therefore x^2 + 2x + 1 = 0$ ，

$\because \Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$ ，

$\therefore$ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 9$ 有两个相等的实数根， 故② 正确；

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = \frac{-3+1}{2} = -1$ ，

$\therefore$ 抛物线的顶点坐标为 $(-1,9)$ ，

又 $\because a < 0$ ，

$\therefore$ 当 $x < -1$ 时， y 随 x 的增大而增大， 当 $x > -1$ 时， y 随 x 的增大而减小， 当 $x = -1$ 时， 函数取最大值 9，

$\therefore x = -3$ 与 $x = 1$ 时函数值相等， 等于 5，

$\therefore$ 当 $-4 < x < 1$ 时， y 的取值范围为 $0 < y \leq 9$ ， 故③ 错误；

$\therefore \frac{m + (-m-2)}{2} = -1$ ，

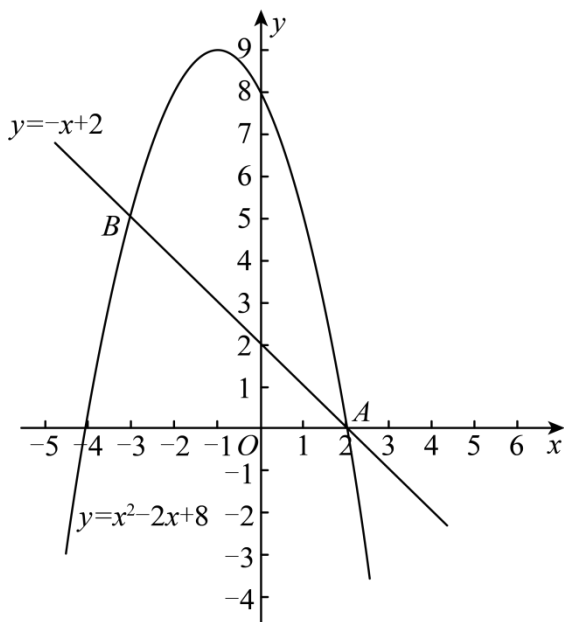
$\therefore$ 点 (m, y_1) ， $(-m-2, y_2)$ 关于对称轴 $x = -1$ 对称，

$\therefore y_1 = y_2$, 故④正确;

由 $ax^2 + (b+1)x + c < 2$ 得 $ax^2 + bx + c < -x + 2$,

即 $-x^2 - 2x + 8 < -x + 2$,

画函数 $y = -x^2 - 2x + 8$ 和 $y = -x + 2$ 图象如下:



由 $\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = -x^2 - 2x + 8 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = 5 \end{cases}$,

$\therefore A(2, 0)$, $B(-3, 5)$,

由图形可得, 当 $x < -3$ 或 $x > 2$ 时, $-x^2 - 2x + 8 < -x + 2$, 即 $ax^2 + (b+1)x + c < 2$, 故⑤错误;

综上, 正确的结论为①②④,

故答案为: ①②④.

三、解答题 (本大题共 8 个小题, 满分 72 分)

17. 利用课本上的计算器进行计算, 按键顺序如下: $\boxed{3} \boxed{x^2} \boxed{-} \boxed{5} \boxed{=}$, 若 m 是其显示结果的

平方根, 先化简: $\left(\frac{m}{m-3} + \frac{7m-4}{9-m^2} \right) \div \frac{4-2m}{m+3}$, 再求值.

【答案】 $\frac{m-2}{6-2m}$, $-\frac{2}{5}$.

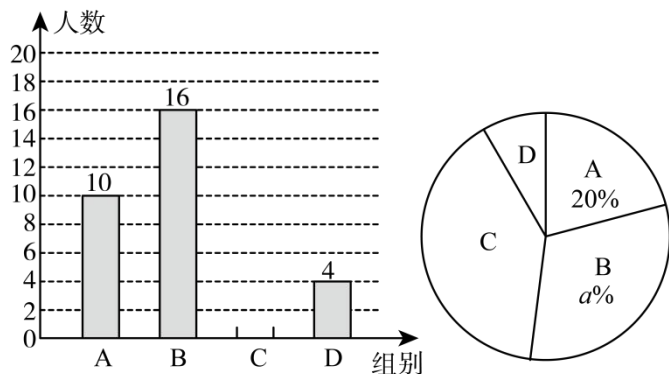
【解析】

【分析】 本题考查了分式的化简求值, 先利用分式的性质和运算法则对分式化简, 然后根据题意求出 m 的

值，把 m 的值代入到化简后的结果中计算即可求解，正确化简分式和求出 m 的值是解题的关键.

$$\begin{aligned}
 & \text{【详解】解：} \left(\frac{m}{m-3} + \frac{7m-4}{9-m^2} \right) \div \frac{4-2m}{m+3} \\
 &= \left(\frac{m}{m-3} - \frac{7m-4}{m^2-9} \right) \div \frac{2(2-m)}{m+3}, \\
 &= \left[\frac{m(m+3)}{(m+3)(m-3)} - \frac{7m-4}{(m+3)(m-3)} \right] \times \frac{m+3}{2(2-m)}, \\
 &= \left[\frac{m^2+3m}{(m+3)(m-3)} - \frac{7m-4}{(m+3)(m-3)} \right] \times \frac{m+3}{2(2-m)}, \\
 &= \frac{m^2-4m+4}{(m+3)(m-3)} \times \frac{m+3}{2(2-m)}, \\
 &= \frac{(m-2)^2}{(m+3)(m-3)} \times \frac{m+3}{-2(m-2)}, \\
 &= \frac{m-2}{-2(m-3)}, \\
 &= \frac{m-2}{6-2m}, \\
 &\because 3^2-5=4, \\
 &\therefore 3^2-5 \text{ 的平方根为 } \pm 2, \\
 &\because 4-2m \neq 0, \\
 &\therefore m \neq 2, \\
 &\text{又} \because m \text{ 为 } 3^2-5 \text{ 的平方根,} \\
 &\therefore m = -2, \\
 &\therefore \text{原式} = \frac{-2-2}{6-2 \times (-2)} = -\frac{2}{5}.
 \end{aligned}$$

18. “山海同行，舰回烟台”. 2024 年 4 月 23 日，烟台舰与家乡人民共庆人民海军成立 75 周年. 值此，某学校开展了“奋进万亿新征程，共筑强国强军梦”的主题研学活动，为了解学生参与情况，随机抽取部分学生对研学活动时长（用 t 表示，单位：h）进行调查. 经过整理，将数据分成四组（A 组： $0 \leq t < 2$ ；B 组： $2 \leq t < 4$ ；C 组： $4 \leq t < 6$ ；D 组： $6 \leq t < 8$ ），并绘制了如下不完整的条形统计图和扇形统计图.



- (1) 请补全条形统计图；
- (2) 扇形统计图中， a 的值为____， D 组对应的扇形圆心角的度数为____；
- (3) D 组中有男、女生各两人，现从这四人中随机抽取两人进行研学宣讲，请用树状图或表格求所抽取的两人恰好是一名男生和一名女生的概率。

【答案】(1) 图见解析

(2) 32, 28.8°

(3) $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】本题考查条形图和扇形图的综合应用，列表法或树状图法求概率：

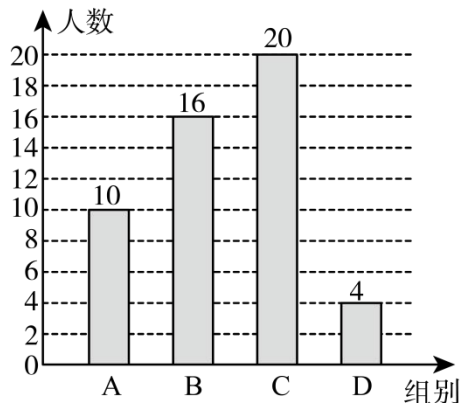
- (1) A 组人数除以所占的比例，求出总人数，进而求出 C 组人数，补全条形图即可；
- (2) 用 B 组人数除以总数，求出 a 的值， D 组人数所占的比例乘以 360 度求出圆心角的度数；
- (3) 列出表格，再利用概率公式进行计算即可。

【小问 1 详解】

解： $10 \div 20\% = 50$ ，

$\therefore C$ 组人数为： $50 - 10 - 16 - 4 = 20$ ；

补全条形图如图：



【小问 2 详解】

$$a\% = \frac{16}{50} \times 100\% = 32\%$$

$$\therefore a = 32,$$

$$D \text{ 组对应的扇形圆心角的度数为 } 360^\circ \times \frac{4}{50} = 28.8^\circ;$$

故答案为：32, 28.8°;

【小问 3 详解】

列表如下：

	男 1	男 2	女 1	女 2
男 1		男 1, 男 2	男 1, 女 1	男 1, 女 2
男 2	男 2, 男 1		男 2, 女 1	男 2, 女 2
女 1	女 1, 男 1	女 1, 男 2		女 1, 女 2
女 2	女 2, 男 1	女 2, 男 2	女 2, 女 1	

共有 12 种等可能的结果，其中一男一女的结果有 8 种，

$$\therefore P = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

19. 根据收集的素材，探索完成任务.

探究太阳能热水器的安装		
素材一	太阳能热水器是利用绿色能源造福人类的一项发明. 某品牌热水器主要部件太阳能板需要安装在每天都可以有太阳光照射到的地方，才能保证使用效果，否则不予安装.	
素材二	某市位于北半球，太阳光线与水平线的夹角为 α ，冬至日时， $14^\circ \leq \alpha \leq 29^\circ$ ；夏至日时，	$\sin 14^\circ \approx 0.24, \cos 14^\circ \approx 0.97,$ $\tan 14^\circ \approx 0.25$ $\sin 29^\circ \approx 0.48, \cos 29^\circ \approx 0.87,$

	$43^\circ \leq \alpha \leq 76^\circ$.	$\tan 29^\circ \approx 0.55$ $\sin 43^\circ \approx 0.68$, $\cos 43^\circ \approx 0.73$, $\tan 43^\circ \approx 0.93$ $\sin 76^\circ \approx 0.97$, $\cos 76^\circ \approx 0.24$, $\tan 76^\circ \approx 4.01$
素材三	如图，该市甲楼位于乙楼正南方向，两楼东西两侧都无法获得太阳光照射。现准备在乙楼南面墙上安装该品牌太阳能板。已知两楼间距为 54 米，甲楼 AB 共 11 层，乙楼 CD 共 15 层，一层从地面起，每层楼高皆为 3.3 米，AE 为某时刻的太阳光线。	
问题解决		
任务一	确定使用数据	要判断乙楼哪些楼层不能安装该品牌太阳能板，应选择_____日（填冬至或夏至）时，α为_____（填14°，29°，43°，76°中的一个）进行计算。
任务二	探究安装范围	利用任务一中选择的数据进行计算，确定乙楼中哪些楼层不能安装该品牌太阳能热水器。

【答案】任务一：冬至， 14° ；任务二：乙楼中 7 层（含 7 层）以下不能安装该品牌太阳能热水器

【解析】

【分析】本题考查解直角三角形的应用，理解题意是解答的关键。

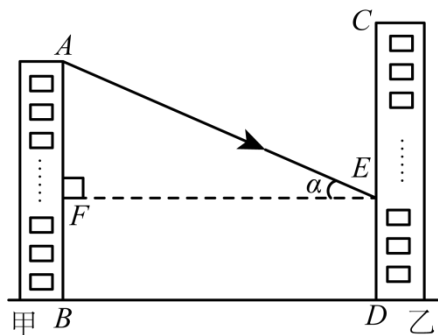
任务一：根据题意直接求解即可；

任务二：过 E 作 $EF \perp AB$ 于 F ，利用正切定义求得

【详解】解：任务一：根据题意，要判断乙楼哪些楼层不能安装该品牌太阳能板，只需 α 为冬至日时的最小角度，即 $\alpha = 14^\circ$ ，

故答案为：冬至， 14° ；

任务二：过 E 作 $EF \perp AB$ 于 F ，则 $\angle AFE = 90^\circ$ ， $EF = 54$ 米， $BF = DF$ ，



在 $\text{Rt}\triangle AFE$ 中， $\tan \alpha = \frac{AF}{EF}$ ，

$$\therefore AF = EF \cdot \tan 14^\circ \approx 54 \times 0.25 = 13.5 \text{ (米)},$$

$$\therefore AB = 11 \times 3.3 = 36.3 \text{ (米)},$$

$$\therefore DE = BF = AB - AF = 36.3 - 13.5 = 22.8 \text{ (米)},$$

$$22.8 \div 3.3 \approx 7 \text{ (层)},$$

答：乙楼中 7 层（含 7 层）以下不能安装该品牌太阳能热水器。

20. 每年 5 月的第三个星期日为全国助残日，今年的主题是“科技助残，共享美好生活”，康宁公司新研发了一批便携式轮椅计划在该月销售，根据市场调查，每辆轮椅盈利 200 元时，每天可售出 60 辆；单价每降低 10 元，每天可多售出 4 辆。公司决定在成本不变的情况下降价销售，但每辆轮椅的利润不低于 180 元，设每辆轮椅降价 x 元，每天的销售利润为 y 元。

(1) 求 y 与 x 的函数关系式；每辆轮椅降价多少元时，每天的销售利润最大？最大利润为多少元？

(2) 全国助残日当天，公司共获得销售利润 12160 元，请问这天售出了多少辆轮椅？

【答案】(1) $y = -\frac{2}{5}x^2 + 20x + 12000$ ，每辆轮椅降价 20 元时，每天的利润最大，为 12240 元

(2) 这天售出了 64 辆轮椅

【解析】

【分析】本题考查二次函数的实际应用，正确的列出函数关系式，是解题的关键：

(1) 根据总利润等于单件利润乘以销量，列出二次函数关系式，再根据二次函数的性质求最值即可；

(2) 令 $y = 12160$ ，得到关于 x 的一元二次方程，进行求解即可。

【小问 1 详解】

解：由题意，得： $y = (200 - x) \left(60 + \frac{x}{10} \times 4 \right) = -\frac{2}{5}x^2 + 20x + 12000$ ；

$\therefore$ 每辆轮椅的利润不低于 180 元，

$$\therefore 200 - x \geq 180,$$

$$\therefore x \leq 20,$$

$$\therefore y = -\frac{2}{5}x^2 + 20x + 12000 = -\frac{2}{5}(x-25)^2 + 12250,$$

$\therefore$ 当 $x < 25$ 时, y 随 x 的增大而增大,

$\therefore$ 当 $x = 20$ 时, 每天的利润最大, 为 $-\frac{2}{5} \times (20-25)^2 + 12250 = 12240$ 元;

答: 每辆轮椅降价 20 元时, 每天的利润最大, 为 12240 元;

【小问 2 详解】

$$\text{当 } y = 12160 \text{ 时, } -\frac{2}{5}x^2 + 20x + 12000 = 12160,$$

解得: $x_1 = 10, x_2 = 40$ (不合题意, 舍去);

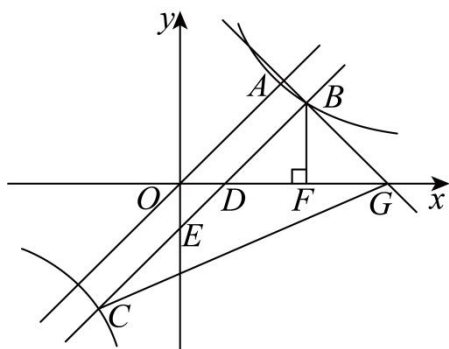
$$\therefore 60 + \frac{10}{10} \times 4 = 64 \text{ (辆)};$$

答: 这天售出了 64 辆轮椅.

21. 如图, 正比例函数 $y = x$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象交于点 $A(\sqrt{6}, a)$, 将正比例函数图象向下平移

$n(n > 0)$ 个单位后, 与反比例函数图象在第一、三象限交于点 B, C , 与 x 轴, y 轴交于点 D, E , 且满足

$BE:CE = 3:2$. 过点 B 作 $BF \perp x$ 轴, 垂足为点 F , G 为 x 轴上一点, 直线 BC 与 BG 关于直线 BF 成轴对称, 连接 CG .



(1) 求反比例函数的表达式;

(2) 求 n 的值及 $\triangle BCG$ 的面积.

【答案】(1) $y = \frac{6}{x}$

(2) 1, 10

【解析】

【分析】本题考查反比例函数与一次函数的综合应用:

(1) 先求出 a 的值, 进而求出反比例函数的解析式即可;

(2) 根据平移规则, 得到平移后的解析式 $y = x - n$, 联立两个解析式, 表示出 B, C 的坐标, 过点 B, C 作 x 轴的平行线交 y 轴于点 M, N , 根据 $BE : CE = 3 : 2$, 进而求出 n 的值, 进而根据对称性得出 $\angle CBG = 90^\circ$, 勾股定理求得 BD , 进而求得 BG, BC 的长, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 正比例函数 $y = x$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象交于点 $A(\sqrt{6}, a)$,

$$\therefore a = \sqrt{6},$$

$$\therefore A(\sqrt{6}, \sqrt{6}),$$

$$\therefore k = \sqrt{6} \cdot \sqrt{6} = 6;$$

$$\therefore y = \frac{6}{x};$$

【小问 2 详解】

$$\therefore A(\sqrt{6}, \sqrt{6})$$

$$\therefore x_A = y_A$$

$$\therefore \tan \angle AOD = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 1$$

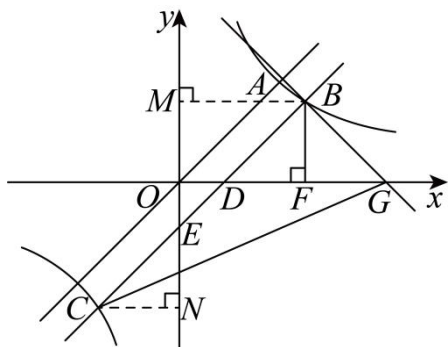
$$\therefore \angle AOD = 45^\circ$$

$\therefore$ 将正比例函数图象向下平移 $n(n > 0)$ 个单位,

$\therefore$ 平移后的解析式为: $y = x - n$,

如图所示, 过点 B, C 作 x 轴的平行线交 y 轴于点 M, N , 则 $\triangle BME, \triangle CNE$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle BEM = \angle CEN = 45^\circ$$



$$\therefore BM \parallel CN$$

$$\therefore \triangle BME \sim \triangle CNE$$

$$\therefore \frac{BM}{CN} = \frac{BE}{CE} = \frac{3}{2}$$

$$\text{设 } B\left(3m, \frac{2}{m}\right), \text{ 则 } BM = 3m$$

$$\therefore CN = 2m,$$

$$\therefore C\left(-2m, -\frac{3}{m}\right),$$

$$\therefore B\left(3m, \frac{2}{m}\right), C\left(-2m, -\frac{3}{m}\right), \text{ 在 } y = x - n \text{ 上}$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{2}{m} = 3m - n \\ -\frac{3}{m} = -2m - n \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} m = 1 \\ n = 1 \end{cases} \text{ (负值舍去)}$$

$$\therefore B(3, 2), C(-2, -3),$$

$$\therefore BC \text{ 的解析式为 } y = x - 1, BC = \sqrt{(3+2)^2 + (3+2)^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\text{当 } y = 0 \text{ 时, } x = 1, \text{ 则 } D(1, 0),$$

$$\therefore BF = DF = 2, OE = OD = 1, \text{ 则 } DE = \sqrt{2}$$

$$\therefore \text{直线 } BC \text{ 与 } BG \text{ 关于直线 } BF \text{ 成轴对称, } BF \perp x \text{ 轴,}$$

$$\therefore DF = FG = 2, \triangle BFD \text{ 和 } \triangle BFG \text{ 是等腰直角三角形,}$$

$$\therefore G(5, 0)$$

$$\therefore BD = BG = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore \triangle BFD \text{ 和 } \triangle BFG \text{ 是等腰直角三角形, } \angle DBF = \angle GBF = 45^\circ$$

$$\therefore \angle DBG = 90^\circ$$

$$\therefore S_{\triangle BCG} = \frac{1}{2} BG \times BC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = 10$$

22. 在等腰直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, D 为直线 BC 上任意一点, 连接 AD . 将线段 AD 绕点 D 按顺时针方向旋转 90° 得线段 ED , 连接 BE .

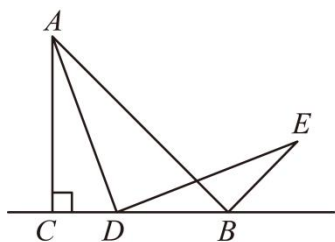


图1

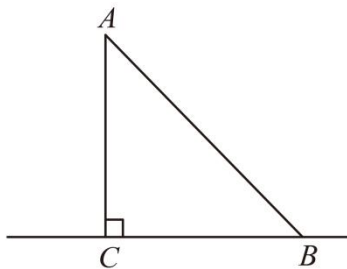


图2

【尝试发现】

(1) 如图 1, 当点 D 在线段 BC 上时, 线段 BE 与 CD 的数量关系为_____;

【类比探究】

(2) 当点 D 在线段 BC 的延长线上时, 先在图 2 中补全图形, 再探究线段 BE 与 CD 的数量关系并证明;

【联系拓广】

(3) 若 $AC = BC = 1$, $CD = 2$, 请直接写出 $\sin \angle ECD$ 的值.

【答案】(1) $BE = \sqrt{2}CD$; (2) $BE = \sqrt{2}CD$, 补图及证明见解析; (3) $\sin \angle ECD = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ 或

$$\sin \angle ECD = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

【解析】

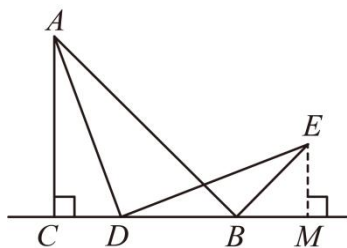
【分析】本题考查三角形全等的判定与性质, 三角函数, 掌握一线三垂直全等模型是解题的关键.

(1) 过点 E 作 $EM \perp CB$ 延长线于点 M , 利用一线三垂直全等模型证明 $\triangle ACD \cong \triangle DME$, 再证明 $BM = EM$ 即可;

(2) 同 (1) 中方法证明 $\triangle ACD \cong \triangle DME$, 再证明 $BM = EM$ 即可;

(3) 分两种情况讨论: 过点 E 作 $EM \perp CB$ 延长线于点 M , 求出 EM , CE 即可.

【详解】解: (1) 如图, 过点 E 作 $EM \perp CB$ 延长线于点 M ,



由旋转得 $AD = DE$, $\angle ADE = 90^\circ$,

$$\therefore \angle ADC + \angle EDM = 90^\circ,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle DME, \quad \angle ADC + \angle CAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle EDM,$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle DME,$$

$$\therefore CD = EM, \quad AC = DM,$$

$$\therefore AC = BC,$$

$$\therefore BM = DM - BD = AC - BD = BC - BD = CD,$$

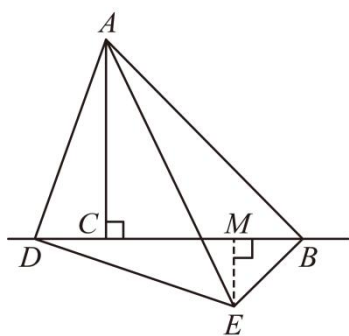
$$\therefore BM = EM,$$

$$\therefore EM \perp CB,$$

$$\therefore BE = \sqrt{2}EM = \sqrt{2}CD,$$

故答案为： $BE = \sqrt{2}CD$ ；

(2) 补全图形如图：



$BE = \sqrt{2}CD$ ，理由如下：

过点 E 作 $EM \perp BC$ 交 BC 于点 M ，

由旋转得 $AD = DE$ ， $\angle ADE = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle ADC + \angle EDM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle DME, \quad \angle ADC + \angle CAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle EDM,$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle DME,$$

$$\therefore CD = EM, \quad AC = DM,$$

$$\therefore AC = BC,$$

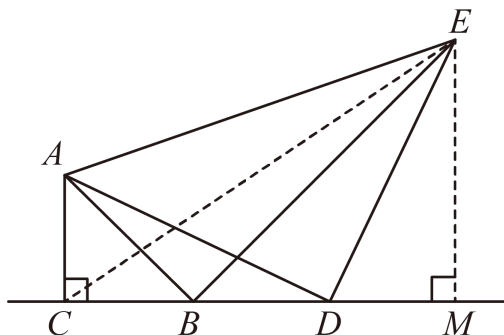
$$\therefore BM = BC - CM = DM - CM = CD,$$

$$\therefore BM = EM,$$

$$\therefore EM \perp CB,$$

$$\therefore BE = \sqrt{2}EM = \sqrt{2}CD;$$

(3) 如图，当 D 在 CB 的延长线上时，过点 E 作 $EM \perp CB$ 于点 M ，连接 CE ，



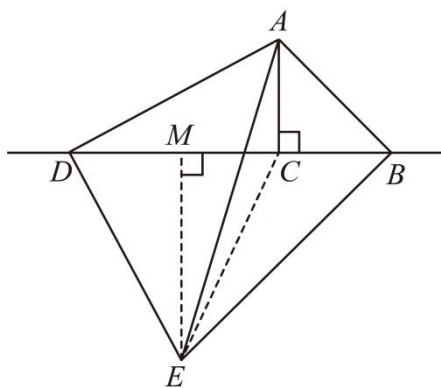
由 (2) 得 $DM = AC = 1$ ， $EM = CD = 2$ ，

$$\therefore CM = CD + DM = 3,$$

$$\therefore CE = \sqrt{CM^2 + EM^2} = \sqrt{13},$$

$$\therefore \sin \angle ECD = \frac{EM}{CE} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

当 D 在 BC 的延长线上时，过点 E 作 $EM \perp CB$ 于点 M ，如图，连接 CE ，



同理可得： $\triangle ACD \cong \triangle DME$ ，

$$\therefore DM = AC = 1, \quad ME = CD = 2,$$

$$\therefore CM = 2 - 1 = 1,$$

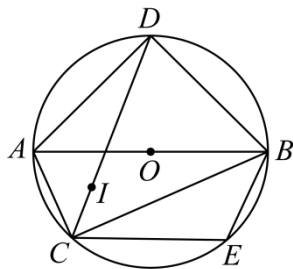
$$\therefore CE = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5},$$

$$\therefore \sin \angle ECD = \frac{EM}{CE} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5};$$

$$\text{综上: } \sin \angle ECD = \frac{2\sqrt{13}}{13} \text{ 或 } \sin \angle ECD = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

23. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ，点 I 为 $\triangle ABC$ 的内心，连接 CI 并延长交 $\odot O$ 于点 D ， E

是 $\widehat{BC}$ 上任意一点，连接 AD ， BD ， BE ， CE 。



- (1) 若 $\angle ABC = 25^\circ$ ，求 $\angle CEB$ 的度数；
- (2) 找出图中所有与 DI 相等的线段，并证明；
- (3) 若 $CI = 2\sqrt{2}$ ， $DI = \frac{13}{2}\sqrt{2}$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长。

【答案】(1) 115°

(2) $DI = AD = BD$ ，证明见解析

(3) 30

【解析】

【分析】(1) 利用圆周角定理得到 $\angle ACB = 90^\circ$ ，再根据三角形的内角和定理求 $\angle CAB = 65^\circ$ ，然后利用圆内接四边形的对角互补求解即可；

(2) 连接 AI ，由三角形的内心性质得到内心， $\angle CAI = \angle BAI$ ， $\angle ACI = \angle BCI$ ，然后利用圆周角定理得到 $\angle DAB = \angle DCB = \angle ACI$ ， $AD = BD$ ，利用三角形的外角性质证得 $\angle DAI = \angle DIA$ ，然后利用等角对等边可得结论；

(3) 过 I 分别作 $IQ \perp AB$ ， $IF \perp AC$ ， $IP \perp BC$ ，垂足分别为 Q 、 F 、 P ，根据内切圆的性质和切线长定理得到 $AQ = AF$ ， $CF = CP$ ， $BQ = BP$ ，利用解直角三角形求得 $CF = 2 = CP$ ， $AB = 13$ ，进而可求解。

【小问 1 详解】

解： $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ADB = \angle ACB = 90^\circ$ ，又 $\angle ABC = 25^\circ$ ，

$\therefore \angle CAB = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$ ，

$\because$ 四边形 $ABEC$ 是 $\odot O$ 内接四边形，

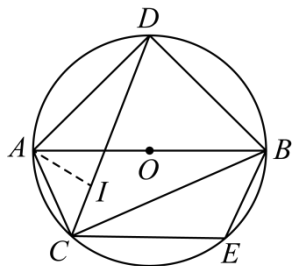
$\therefore \angle CEB + \angle CAB = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle CEB = 180^\circ - \angle CAB = 115^\circ$ ；

【小问 2 详解】

解： $DI = AD = BD$ ，

证明：连接 AI ，



$\therefore$ 点 I 为 $\triangle ABC$ 的内心，

$$\therefore \angle CAI = \angle BAI, \quad \angle ACI = \angle BCI = \frac{1}{2} \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\therefore \widehat{AD} = \widehat{BD},$$

$$\therefore \angle DAB = \angle DCB = \angle ACI, \quad AD = BD,$$

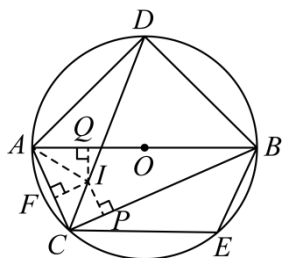
$$\therefore \angle DAI = \angle DAB + \angle BAI, \quad \angle DIA = \angle ACI + \angle CAI,$$

$$\therefore \angle DAI = \angle DIA,$$

$$\therefore DI = AD = BD;$$

【小问 3 详解】

解：过 I 分别作 $IQ \perp AB$ ， $IF \perp AC$ ， $IP \perp BC$ ，垂足分别为 Q 、 F 、 P ，



$\therefore$ 点 I 为 $\triangle ABC$ 的内心，即为 $\triangle ABC$ 的内切圆的圆心。

$\therefore Q$ 、 F 、 P 分别为该内切圆与 $\triangle ABC$ 三边的切点，

$$\therefore AQ = AF, \quad CF = CP, \quad BQ = BP,$$

$$\therefore CI = 2\sqrt{2}, \quad \angle IFC = 90^\circ, \quad \angle ACI = 45^\circ,$$

$$\therefore CF = CI \cdot \cos 45^\circ = 2 = CP,$$

$$\therefore DI = AD = BD, \quad DI = \frac{13}{2}\sqrt{2}, \quad \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\therefore AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{2} \times \frac{13}{2}\sqrt{2} = 13,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的周长为 } AB + AC + BC$$

$$= AB + AF + CF + CP + BP$$

$$\begin{aligned}
 &= AB + AQ + BQ + 2CF \\
 &= 2AB + 2CF \\
 &= 2 \times 13 + 2 \times 2 \\
 &= 30.
 \end{aligned}$$

【点睛】本题考查圆周角定理、圆内接四边形的性质、三角形的内角和定理、三角形的内心性质、三角形的外角性质、等腰三角形的判定、切线长定理以及解直角三角形，熟练掌握相关知识的联系与运用是解答的关键.

24. 如图，抛物线 $y_1 = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A, B 两点，与 y 轴交于点 C ， $OC = OA$ ， $AB = 4$ ，对称轴为直线 $l_1: x = -1$ ，将抛物线 y_1 绕点 O 旋转 180° 后得到新抛物线 y_2 ，抛物线 y_2 与 y 轴交于点 D ，顶点为 E ，对称轴为直线 l_2 .

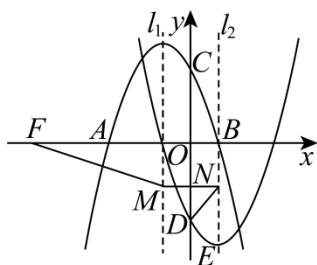


图1

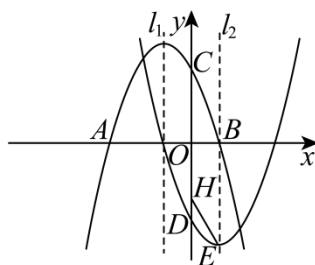


图2

- (1) 分别求抛物线 y_1 和 y_2 的表达式；
- (2) 如图1，点 F 的坐标为 $(-6, 0)$ ，动点 M 在直线 l_1 上，过点 M 作 $MN \parallel x$ 轴与直线 l_2 交于点 N ，连接 FM ， DN ，求 $FM + MN + DN$ 的最小值；
- (3) 如图2，点 H 的坐标为 $(0, -2)$ ，动点 P 在抛物线 y_2 上，试探究是否存在点 P ，使 $\angle PEH = 2\angle DHE$ ？若存在，请直接写出所有符合条件的点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

【答案】(1) $y_1 = -x^2 - 2x + 3$ ， $y_2 = x^2 - 2x - 3$

(2) $2 + 3\sqrt{5}$

(3) 存在， $P(3, 0)$ 或 $P\left(\frac{9}{11}, -\frac{480}{121}\right)$

【解析】

【分析】(1) 先求出点 A, B, C 坐标，再用待定系数法求出抛物线 y_1 的表达式，求出其顶点坐标，由旋转可知抛物线 y_2 的二次项系数 a 为原来的相反数，顶点坐标与抛物线 y_1 的顶点坐标关于原点对称，即可求解；

(2) 将点 F 向右平移 2 个单位至 F' , 则 $FF'=2$, $F'(-4,0)$, 过点 D 作直线 l_2 的对称点为 D' , 连接 $F'N, F'D', ND'$, 则四边形 $FF'NM$ 为平行四边形, 则 $MF = NF'$, $ND' = ND$, 因此 $FM + MN + DN = NF' + 2 + ND' \geq 2 + F'D'$, 即可求解;

(3) 当点 P 在直线 l_2 右侧抛物线上时, 可得 $\angle 1 = \angle 2$, 作 H 关于直线 l_2 的对称点 H' , 则点 H' 在直线 PE 上, 可求直线 PE 的表达式为 $y = 2x - 6$, 联立 $\begin{cases} y = 2x - 6 \\ y_2 = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$, 解得: $x = 3$ 或 $x = 1$ (舍), 故 $P(3, 0)$;

当点 P 在直线 l_2 左侧抛物线上时, 延长 EP 交 y 轴于点 N , 作 HN 的垂直平分线交 HE 于点 Q , 交 y 轴于点 M , 过点 E 作 $EK \perp y$ 轴于点 K , 则 $QM \parallel EK$, 可得 $QH = QN$, 可证明出 $NQ = NE$, 由 $QM \parallel EK$, 得 $\triangle HMQ \sim \triangle HKE$, 设 $HM = 2m, MQ = m$, 则 $MN = HM = 2m$, $NK = 2 - 4m$, 在 $\text{Rt}\triangle QMN$ 和

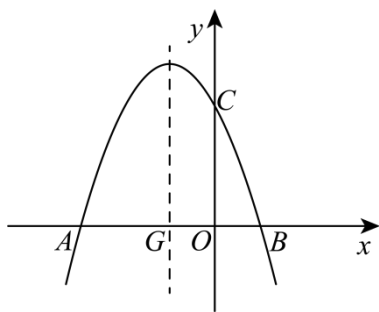
$\text{Rt}\triangle ENK$ 中, 由勾股定理得 $m^2 + (2m)^2 = (2 - 4m)^2 + 1^2$, 解得: $m = \frac{5}{11}$ 或 $m = 1$ (舍), 所以 $N\left(0, -\frac{42}{11}\right)$,

可求直线 PE 表达式为: $y = -\frac{2}{11}x - \frac{42}{11}$, 联立 $\begin{cases} y = -\frac{2}{11}x - \frac{42}{11} \\ y_2 = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$, 解得: $x = \frac{9}{11}$ 或 $x = 1$ (舍), 故

$$P\left(\frac{9}{11}, -\frac{480}{121}\right).$$

【小问 1 详解】

解: 设对称轴与 x 轴交于点 G ,



由题意得 $AG = BG = 2$,

$\therefore$ 对称轴为直线 $x = -1$,

$$\therefore B(1, 0), A(-3, 0),$$

$$\therefore OC = OA = 3,$$

$$\therefore C(0, 3),$$

将 A 、 B 、 C 分别代入 $y_1 = ax^2 + bx + c$,

$$\text{得: } \begin{cases} a+b+c=0 \\ 9a-3b+c=0 \\ c=3 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \\ c=3 \end{cases}$$

$$\therefore y_1 = -x^2 - 2x + 3,$$

$$\therefore y_1 = -x^2 - 2x + 3 = -(x+1)^2 + 4, \text{ 顶点为 } (-1, 4)$$

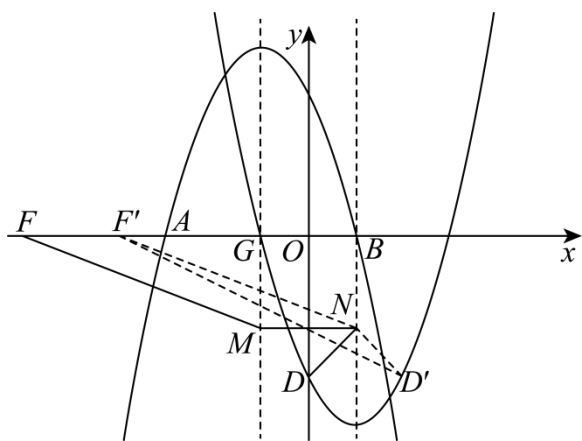
$\therefore$ 抛物线 y_1 绕点 O 旋转 180° 后得到新抛物线 y_2 ,

$\therefore$ 抛物线 y_2 的 $a=1$, 顶点为 $(1, -4)$,

$$\therefore y_2 \text{ 的表达式为: } y_2 = (x-1)^2 - 4, \text{ 即 } y_2 = x^2 - 2x - 3$$

【小问 2 详解】

解: 将点 F 向右平移 2 个单位至 F' , 则 $FF'=2$, $F'(-4, 0)$, 过点 D 作直线 l_2 的对称点为 D' , 连接 $F'N, F'D', ND'$,



$$\therefore ND = ND',$$

$$\therefore y_2 = (x-1)^2 - 4,$$

$\therefore$ 直线 l_2 为直线 $x=1$,

$\therefore MN \parallel x$ 轴,

$$\therefore MN = 1 - (-1) = 2,$$

对于抛物线 $y_2 = x^2 - 2x - 3$ ，令 $x = 0$ ，则 $y_2 = -3$ ，

$$\therefore D(0, -3),$$

$\because$ 点 D 与点 D' 关于直线 $x = 1$ 对称，

$$\therefore \text{点 } D'(2, -3),$$

$\because MN \parallel x$ 轴， $FF' = MN = 2$ ，

$\therefore$ 四边形 $FF'NM$ 为平行四边形，

$$\therefore MF = NF',$$

$$\therefore FM + MN + DN = NF' + 2 + ND' \geq 2 + F'D',$$

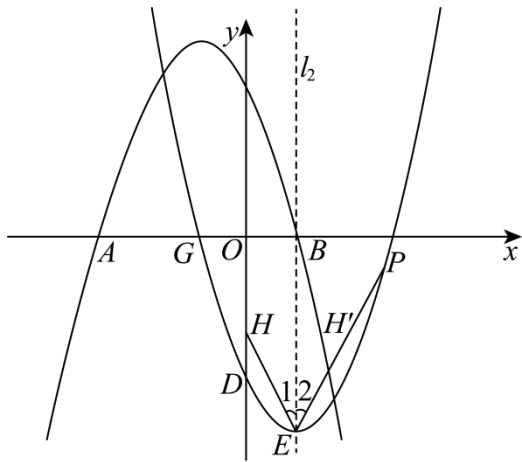
当点 F', N, D' 三点共线时，取得最小值，

$$\text{而 } F'D' = \sqrt{(-4-2)^2 + (-3-0)^2} = 3\sqrt{5},$$

$\therefore FM + MN + DN$ 的最小值为 $2 + 3\sqrt{5}$ ；

【小问 3 详解】

解：当点 P 在直线 l_2 右侧抛物线上时，如图：



$\because$ 抛物线 $y_2 = (x-1)^2 - 4$ ，

$$\therefore E(1, -4)$$

$\because l_2 \parallel y$ 轴，

$$\therefore \angle DHE = \angle 1,$$

$$\because \angle PEH = 2\angle DHE,$$

$$\therefore \angle PEH = 2\angle 1 = \angle 1 + \angle 2,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2,$$

作 H 关于直线 l_2 的对称点 H' ，则点 H' 在直线 PE 上，

$\because$ 点 H 的坐标为 $(0, -2)$ ，直线 $l_2: x = 1$ ，

$\therefore H'(2, -2)$ ，

设直线 PE 的表达式为： $y = kx + b (k \neq 0)$ ，

代入 $H'(2, -2)$ ， $E(1, -4)$ ，

$$\text{得: } \begin{cases} 2k + b = -2 \\ k + b = -4 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = 2 \\ b = -6 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 PE 的表达式为 $y = 2x - 6$ ，

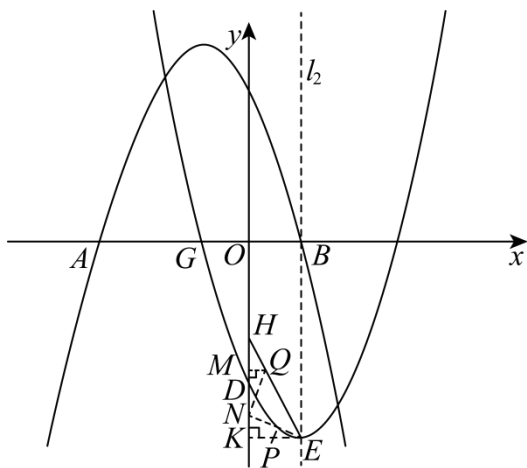
$$\text{联立 } \begin{cases} y = 2x - 6 \\ y_2 = x^2 - 2x - 3 \end{cases}, \text{ 得: } x^2 - 2x - 3 = 2x - 6,$$

解得： $x = 3$ 或 $x = 1$ (舍)，

$\therefore P(3, 0)$ ；

②当点 P 在直线 l_2 左侧抛物线上时，延长 EP 交 y 轴于点 N ，作 HN 的垂直平分线交 HE 于点 Q ，交 y 轴于

点 M ，过点 E 作 $EK \perp y$ 轴于点 K ，则 $QM \parallel EK$ ，如图：



$\because QM$ 垂直平分 HN ，

$\therefore QH = QN$ ，

$\therefore \angle QHN = \angle QNH$ ，

$$\therefore \angle NQE = 2\angle NHE,$$

$$\because \angle PEH = 2\angle DHE$$

$$\therefore \angle NQE = \angle PEH,$$

$$\therefore NQ = NE,$$

由点 $H(0, -2), E(1, -4)$

得: $EK = 1, KH = 2,$

$$\because QM \parallel EK,$$

$$\therefore \triangle HMQ \sim \triangle HKE,$$

$$\therefore \frac{HM}{HK} = \frac{MQ}{KE},$$

$$\therefore \frac{HM}{2} = \frac{MQ}{1},$$

设 $HM = 2m, MQ = m,$

$$\therefore MN = HM = 2m, \quad NK = 2 - 4m,$$

在 $\text{Rt}\triangle QMN$ 和 $\text{Rt}\triangle ENK$ 中, 由勾股定理得 $QM^2 + MN^2 = NK^2 + KE^2,$

$$\therefore m^2 + (2m)^2 = (2 - 4m)^2 + 1^2,$$

解得: $m = \frac{5}{11}$ 或 $m = 1$ (舍)

$$\therefore NK = 2 - \frac{20}{11} = \frac{2}{11},$$

$$\therefore ON = 4 - \frac{2}{11} = \frac{42}{11},$$

$$\therefore N\left(0, -\frac{42}{11}\right),$$

设直线 PE 表达式为: $y = a_1x + b_1 (a_1 \neq 0),$

代入点 $N, E,$

$$\text{得: } \begin{cases} a_1 + b_1 = -4 \\ b_1 = -\frac{42}{11} \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a_1 = -\frac{2}{11} \\ b_1 = -\frac{42}{11} \end{cases}$$

$$\therefore \text{直线 } PE \text{ 表达式为: } y = -\frac{2}{11}x - \frac{42}{11},$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = -\frac{2}{11}x - \frac{42}{11} \\ y_2 = x^2 - 2x - 3 \end{cases},$$

$$\text{得: } -\frac{2}{11}x - \frac{42}{11} = x^2 - 2x - 3,$$

$$\text{整理得: } 11x^2 - 20x + 9 = 0$$

$$\text{解得: } x = \frac{9}{11} \text{ 或 } x = 1 \text{ (舍)},$$

$$\therefore P\left(\frac{9}{11}, -\frac{480}{121}\right),$$

$$\text{综上所述, } P(3, 0) \text{ 或 } P\left(\frac{9}{11}, -\frac{480}{121}\right).$$

【点睛】本题是一道二次函数与角度有关的综合题，考查了待定系数法求函数解析式，三角形三边关系求最值，平行四边形的判定与性质，中心对称图形的性质，勾股定理，相似三角形的判定与性质，熟练掌握知识点，正确添加辅助线是解决本题的关键.