

滨州市二〇二四年初中学业水平考试

数学试题

温馨提示：

1. 本试卷分第Ⅰ卷和第Ⅱ卷两部分，共6页，满分120分，考试用时120分钟。考试结束后，将试题卷和答题卡一并交回。
2. 答卷前，考生务必用0.5毫米黑色签字笔将自己的姓名、准考证号、座号填写在试题卷和答题卡规定的位置上。
3. 第Ⅰ卷每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。答案不能答在试题卷上。
4. 第Ⅱ卷必须用0.5毫米黑色签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置，不能写在试题卷上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用涂改液、胶带纸、修正带。不按以上要求作答的答案无效。

第Ⅰ卷（选择题共24分）

一、选择题：本大题共8个小题，每小题3分，满分24分。每小题只有一个选项符合题目要求。

1. $-\frac{1}{2}$ 的绝对值是（ ）

A. 2

B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{1}{2}$

D. -2

【答案】B

【解析】

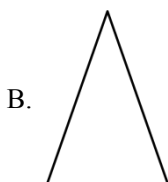
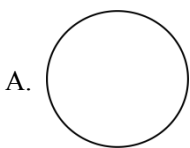
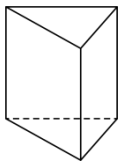
【分析】本题考查了绝对值，根据数轴上某个数与原点的距离叫做这个数的绝对值的定义进行求解即可。

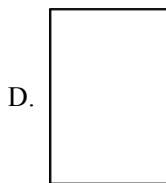
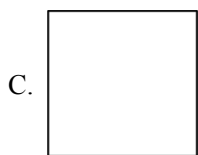
【详解】解：∵ $\left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$ ，

∴ $-\frac{1}{2}$ 的绝对值是 $\frac{1}{2}$ ，

故选：B。

2. 如图，一个三棱柱无论怎么摆放，其主视图不可能是（ ）





【答案】 A

【解析】

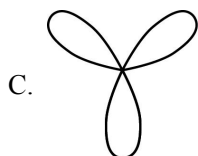
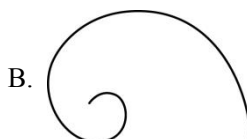
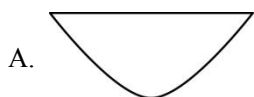
【分析】 本题考查了物体的三视图，根据三棱柱的表面由 2 个三角形，1 个正方形，2 个矩形构成即可判断求解，掌握三棱柱的结构特点是解题的关键.

【详解】 解： $\because$ 三棱柱的表面由 2 个三角形，1 个正方形，2 个矩形构成，

$\therefore$ 其主视图可能是三角形或正方形或矩形，不可能是圆，

故选： A .

3. 数学中有许多精美的曲线，以下是“悬链线”“黄金螺旋线”“三叶玫瑰线”和“笛卡尔心形线”. 其中不是轴对称图形的是 ()



【答案】 B

【解析】

【分析】 根据轴对称图形的概念：如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形叫做轴对称图形，这条直线叫做对称轴，这时，我们也可以说这个图形关于这条直线（成轴）对称，进行判断即可.

【详解】 解： A， C， D 选项中的图形都能找到这样的一条直线，使图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，所以是轴对称图形；

B 选项中的图形不能找到这样的一条直线，使图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，所以不是轴对称图形.

故选： B.

4. 下列运算正确的是 ()

A. $(n^3)^3 = n^6$

B. $(-2a)^2 = -4a^2$

C. $x^8 \div x^2 = x^4$

D. $m^2 \cdot m = m^3$

【答案】 D

【解析】

【分析】本题考查了幂的运算. 根据幂的乘方运算、积的乘方运算、同底数幂的乘法运算、同底数幂的除法运算逐项验证即可得到答案.

【详解】解：A、 $(n^3)^3 = n^9 \neq n^6$ ，本选项不符合题意；

B、 $(-2a)^2 = 4a^2 \neq -4a^2$ ，本选项不符合题意；

C、 $x^8 \div x^2 = x^6 \neq x^4$ ，本选项不符合题意；

D、 $m^2 \cdot m = m^3$ ，本选项符合题意；

故选：D.

5. 若点 $N(1-2a, a)$ 在第二象限，那么 a 的取值范围是 ()

A. $a > \frac{1}{2}$

B. $a < \frac{1}{2}$

C. $0 < a < \frac{1}{2}$

D. $0 \leq a < \frac{1}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查各象限内的点的坐标特点，解一元一次不等式组. 根据点 $N(1-2a, a)$ 在第二象限可得不

等式组 $\begin{cases} 1-2a < 0 \\ a > 0 \end{cases}$ ，求解即可.

【详解】解： $\because$ 点 $N(1-2a, a)$ 在第二象限，

$$\therefore \begin{cases} 1-2a < 0 \\ a > 0 \end{cases},$$

解得： $a > \frac{1}{2}$.

故选：A.

6. 在一次中学生田径运动会上，参加男子跳高的15名运动员的成绩如下表所示：

成绩/m	1.50	1.60	1.65	1.70	1.75	1.80
人数	2	3	2	3	4	1

某同学分析上表后得出如下结论：

①这些运动员成绩的平均数是 1.65；

②这些运动员成绩的中位数是 1.70；

③这些运动员成绩的众数是 1.75.

上述结论中正确的是 ()

A. ②③

B. ①③

C. ①②

D. ①②③

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了平均数、中位数、众数. 根据平均数、中位数、众数的意义求解即可.

【详解】 解: ①这些运动员成绩的平均数是 $\frac{1}{15}(2 \times 1.5 + 3 \times 1.6 + 2 \times 1.65 + 3 \times 1.7 + 4 \times 1.75 + 1 \times 1.8) = 1.6$,

原说法不正确;

②这些运动员成绩的中位数是从小到大排列第 8 个数为 1.70, 原说法正确;

③这些运动员成绩出现最多的是 1.75, 则的众数是 1.75, 原说法正确.

故选: A.

7. 点 $M(x_1, y_1)$ 和点 $N(x_2, y_2)$ 在反比例函数 $y = \frac{k^2 - 2k + 3}{x}$ (k 为常数) 的图象上, 若 $x_1 < 0 < x_2$, 则

$y_1, y_2, 0$ 的大小关系为 ()

A. $y_1 < y_2 < 0$

B. $y_1 > y_2 > 0$

C. $y_1 < 0 < y_2$

D. $y_1 > 0 > y_2$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数的性质, 利用配方法可得 $k^2 - 2k + 3 = (k - 1)^2 + 2 > 0$, 进而得到反比例函数的图象分布在一、三象限, $x > 0$ 时, $y > 0$, $x < 0$ 时, $y < 0$, 据此即可求解, 利用配方法得到

$k^2 - 2k + 3 = (k - 1)^2 + 2 > 0$ 是解题的关键.

【详解】 解: $\because k^2 - 2k + 3 = (k - 1)^2 + 2 > 0$,

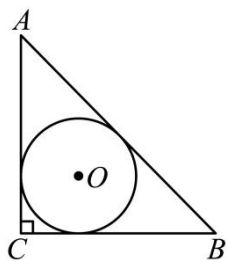
$\therefore$ 反比例函数的图象分布在一、三象限, $x > 0$ 时, $y > 0$, $x < 0$ 时, $y < 0$,

$\because x_1 < 0 < x_2$,

$\therefore y_1 < 0 < y_2$,

故选: C.

8. 刘徽 (今山东滨州人) 是魏晋时期我国伟大的数学家, 中国古典数学理论的奠基者之一, 被誉为“世界古代数学泰斗”. 刘徽在注释《九章算术》时十分重视一题多解, 其中最典型的是勾股容方和勾股容圆公式的推导, 他给出了内切圆直径的多种表达形式. 如图, $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, AB, BC, CA 的长分别为 c, a, b . 则可以用含 c, a, b 的式子表示出 $\triangle ABC$ 的内切圆直径 d , 下列表达式错误的是 ()



A. $d = a + b - c$

B. $d = \frac{2ab}{a+b+c}$

C. $d = \sqrt{2(c-a)(c-b)}$

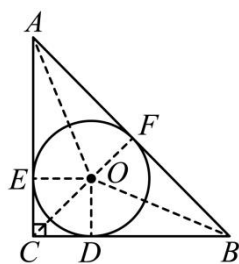
D. $d = |(a-b)(c-b)|$

【答案】D

【解析】

【分析】如图，设 E 、 F 、 G 为切点，连接 OC 、 OD 、 OE 、 OF ，则 $OE \perp AC$ ，再结合切线长定理可判定 A，再结合三角形的面积可判定 B，再由 $d = a + b - c$ ，结合完全平方公式与勾股定理可判断 C，通过举反例可得 D 错误。

【详解】解：如图，设 E 、 F 、 G 为切点，连接 OC 、 OD 、 OE 、 OF ，则 $OE \perp AC$ ， $OD \perp BC$ ， $OF \perp AB$ ，
 $OD = OE = OF = \frac{d}{2}$ ，



由切线长定理得， $AE = AF$ ， $CE = CD$ ， $BD = BF$ ，

$$\therefore \angle ACB = \angle OEC = \angle ODC = 90^\circ, \quad CE = CD,$$

$\therefore$ 四边形 $ODCE$ 是正方形，

$$\therefore CE = CD = OD = \frac{d}{2},$$

$$\therefore AE = b - \frac{d}{2}, \quad BD = a - \frac{d}{2},$$

$$\therefore BF = a - \frac{d}{2},$$

$$\therefore AF = c - \left(a - \frac{d}{2}\right) = c - a + \frac{d}{2},$$

$$\therefore AE = AF,$$

$$\therefore b - \frac{d}{2} = c - a + \frac{d}{2},$$

$\therefore d = a + b - c$ ，故 A 正确，不合题意；

$$\because S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOC} + S_{\triangle AOB},$$

$$\therefore \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a \times \frac{d}{2} + \frac{1}{2}b \times \frac{d}{2} + \frac{1}{2}c \times \frac{d}{2},$$

$$\therefore 2ab = ad + bd + cd$$

$$\therefore d = \frac{2ab}{a+b+c}, \text{ 故 B 正确，不合题意；}$$

$$\because d = a + b - c,$$

$$\therefore d^2 = (a + b - c)^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc,$$

$$\because a^2 + b^2 = c^2,$$

$$\therefore d^2 = 2c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

$$= 2c(c - a) - 2b(c - a)$$

$$= 2(c - a)(c - b),$$

$$\because d > 0,$$

$$\therefore d = \sqrt{2(c - a)(c - b)}, \text{ 故 C 正确；}$$

$$\text{令 } a = 3, b = 4, c = 5,$$

$$\therefore d = a + b - c = 3 + 4 - 5 = 2,$$

$$\text{而 } |(a - b)(c - b)| = |(3 - 4) \times (5 - 4)| = 1,$$

$$\therefore d \neq |(a - b)(c - b)|, \text{ 故 D 错误；}$$

故选 D

【点睛】 本题考查的是三角形的内切圆的性质，勾股定理的应用，分解因式的应用，举反例的应用，切线长定理的应用，掌握基础知识并灵活应用是解本题的关键.

第 II 卷 (非选择题共 96 分)

二、填空题：本大题共 8 个小题，每小题 3 分，满分 24 分.

9. 若分式 $\frac{1}{x-1}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \neq 1$

【解析】

【分析】分式有意义的条件是分母不等于零.

【详解】 $\because$ 分式 $\frac{1}{x-1}$ 在实数范围内有意义,

$$\therefore x-1 \neq 0,$$

解得: $x \neq 1$

故答案为 $x \neq 1$.

【点睛】此题考查分式有意义的条件, 解题关键在于分母不等于零使得分式有意义.

10. 写出一个比 $\sqrt{3}$ 大且比 $\sqrt{10}$ 小的整数是_____.

【答案】2 或 3

【解析】

【分析】先估算出 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{10}$ 的大小, 然后确定范围在其中的整数即可.

【详解】 $\because \sqrt{3} < 2$, $3 < \sqrt{10}$

$$\therefore \sqrt{3} < 2 < 3 < \sqrt{10}$$

即比 $\sqrt{3}$ 大且比 $\sqrt{10}$ 小的整数为 2 或 3,

故答案为: 2 或 3

【点睛】本题考查了无理数的估算和大小比较, 掌握无理数估算的方法是正确解答的关键.

11. 将抛物线 $y = -x^2$ 先向右平移 1 个单位长度, 再向上平移 2 个单位长度, 则平移后抛物线的顶点坐标为_____.

【答案】(1,2)

【解析】

【分析】本题考查了二次函数的图象与几何变换和二次函数的性质. 根据“上加下减, 左加右减”的规律进行解答即可.

【详解】解: 由抛物线 $y = -x^2$ 先向右平移 1 个单位长度, 再向上平移 2 个单位长度,

根据“上加下减, 左加右减”规律可得抛物线是 $y = -(x-1)^2 + 2$,

$\therefore$ 顶点坐标是 (1,2)

故答案为: (1,2).

12. 一副三角板如图 1 摆放, 把三角板 AOB 绕公共顶点 O 顺时针旋转至图 2, 即 $AB \parallel OD$ 时, $\angle 1$ 的大小

为_____°.

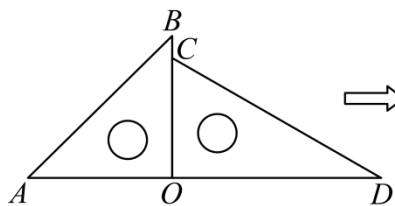


图1

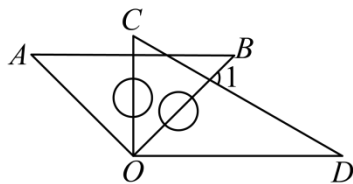


图2

【答案】 75

【解析】

【分析】 本题考查了平行线的性质，三角形的外角性质. 由 $AB \parallel OD$ ，推出 $\angle BOD = \angle B = 45^\circ$ ，再利用三角形的外角性质即可求解.

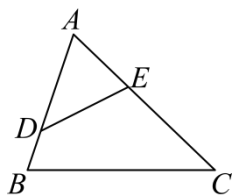
【详解】 解： $\because AB \parallel OD$ ，

$$\therefore \angle BOD = \angle B = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle BOD + \angle D = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ,$$

故答案为： 75.

13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D, E 分别在边 AB, AC 上. 添加一个条件使 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ ，则这个条件可以是_____。（写出一种情况即可）



【答案】 $\angle ADE = \angle C$ 或 $\angle AED = \angle B$ 或 $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的判定：两组对应边的比相等且夹角对应相等的两个三角形相似；有两组角对应相等的两个三角形相似.

利用有两组角对应相等的两个三角形相似添加条件.

【详解】 解： $\because \angle DAE = \angle CAB$ ，

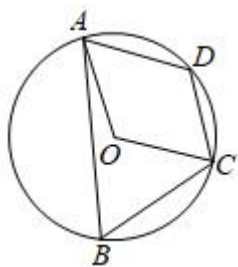
$$\therefore \text{当 } \angle ADE = \angle C \text{ 时， } \triangle ADE \sim \triangle ACB.$$

$$\text{当 } \angle AED = \angle B \text{ 时， } \triangle ADE \sim \triangle ACB.$$

$$\text{当 } \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} \text{ 时， } \triangle ADE \sim \triangle ACB.$$

$$\text{故答案为： } \angle ADE = \angle C \text{ 或 } \angle AED = \angle B \text{ 或 } \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}.$$

14. 如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$ ，若四边形 $AOCD$ 是菱形， $\angle B$ 的度数是_____.



【答案】 60° 度

【解析】

【分析】 根据圆内接四边形的性质得到 $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ，根据菱形的性质，圆周角定理列式计算即可.

【详解】 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$,

$$\therefore \angle B + \angle D = 180^\circ,$$

$\because$ 四边形 $OACD$ 是菱形,

$$\therefore \angle AOC = \angle D,$$

$$\text{由圆周角定理得, } \angle B = \frac{1}{2} \angle AOC,$$

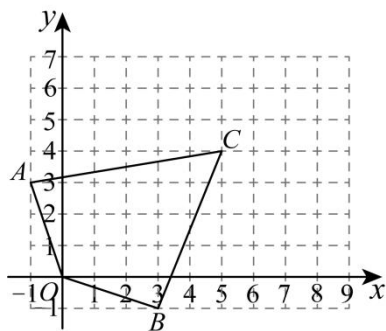
$$\therefore \angle B + 2\angle B = 180^\circ,$$

$$\text{解得, } \angle B = 60^\circ,$$

故答案为: 60° .

【点睛】 本题考查的是圆内接四边形的性质，菱形的性质，掌握圆内接四边形的对角互补是解题的关键.

15. 如图，四边形 $AOBC$ 四个顶点的坐标分别是 $A(-1,3)$ ， $O(0,0)$ ， $B(3,-1)$ ， $C(5,4)$ ，在该平面内找一点 P ，使它到四个顶点的距离之和 $PA + PO + PB + PC$ 最小，则 P 点坐标为_____.

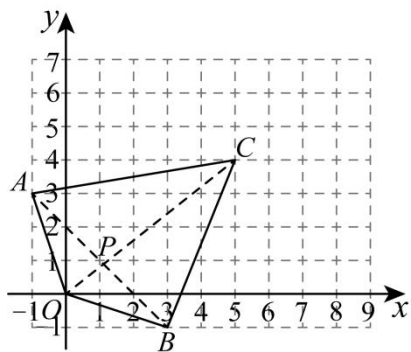


【答案】 $\left(\frac{10}{9}, \frac{8}{9}\right)$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的应用，两点之间线段最短. 连接 AB 、 OC 相交于点 P ，根据“两点之间线段最短”知 $PA + PO + PB + PC$ 最小，利用待定系数法求得直线 AB 和 OC 的解析式，联立即可求解.

【详解】解：连接 AB 、 OC 相交于点 P ，根据“两点之间线段最短”知 $PA + PO + PB + PC$ 最小，



设直线 AB 的解析式为 $y = kx + b$ ，则有
$$\begin{cases} -k + b = 3 \\ 3k + b = -1 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} k = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 AB 的解析式为 $y = -x + 2$ ，

设直线 OC 的解析式为 $y = mx$ ，

则有 $4 = 5m$ ，

解得 $m = \frac{4}{5}$ ，

$\therefore$ 直线 OC 的解析式为 $y = \frac{4}{5}x$ ，

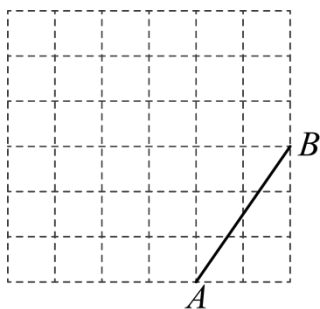
联立得 $\frac{4}{5}x = -x + 2$ ，

解得 $x = \frac{10}{9}$ ，则 $y = \frac{4}{5} \times \frac{10}{9} = \frac{8}{9}$ ，

$\therefore P$ 点坐标为 $\left(\frac{10}{9}, \frac{8}{9}\right)$ ，

故答案为： $\left(\frac{10}{9}, \frac{8}{9}\right)$ 。

16. 如图，在边长为 1 的正方形网格中，点 A ， B 均在格点上。



(1) AB 的长为_____；

(2) 请只用无刻度的直尺，在如图所示的网格中，画出以 AB 为边的矩形 $ABCD$ ，使其面积为 $\frac{26}{3}$ ，并简要说明点 C, D 的位置是如何找到的（不用证明）：_____.

【答案】 ①. $\sqrt{13}$ ②. 取点 E, F ，得到正方形 $ABEF$ ， AF 交格线于点 C ， BE 交格线于点 D ，连接 DC ，得到矩形 $ABCD$ ，即为所求.

【解析】

【分析】 本题考查了网格与勾股定理，勾股定理的逆定理，矩形的性质与判定，掌握勾股定理是解题的关键.

(1) 根据勾股定理直接计算即可求解；

(2) 取点 E, F ，得到正方形 $ABEF$ ， AF 交格线于点 D ， BE 交格线于点 C ，连接 DC ，得到矩形 $ABCD$ ，即为所求.

【详解】 (1) $AB = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

故答案为： $\sqrt{13}$ ；

(2) 取点 E, F ，则 $AF = AB = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ ，得到正方形 $ABEF$ ，

$\therefore$ 正方形 $ABEF$ 的面积为 $\sqrt{13} \times \sqrt{13} = 13$ ，

AF 交格线于点 D ， BE 交格线于点 C ，

连接 DC ，得到矩形 $ABCD$ ，

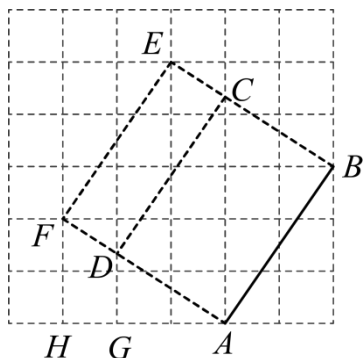
$\therefore DG \parallel FH$ ，

$$\therefore \frac{AD}{AF} = \frac{AG}{AH} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore AD = \frac{2}{3} AF = \frac{2}{3} \sqrt{13} = BC,$$

$$\therefore \text{矩形 } ABCD \text{ 的面积为 } \frac{2}{3} \sqrt{13} \times \sqrt{13} = \frac{26}{3},$$

如图，矩形 $ABCD$ ，即为所求.



故答案为：取点 E, F ，得到正方形 $ABEF$ ， AF 交格线于点 D ， BE 交格线于点 C ，连接 DC ，得到矩形 $ABCD$ ，即为所求。

三、解答题：本大题共 8 个小题，满分 72 分。解答时请写出必要的演推过程。

17. 计算： $2^{-1} + (-2) \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \sqrt{\frac{9}{4}}$ 。

【答案】 0

【解析】

【分析】 本题考查了实数的混合运算，根据实数的运算法则和运算律即可求解，掌握据实数的运算法则和运算律是解题的关键。

【详解】 解：原式 $= \frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{2}$ ，
 $= \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1$ ，
 $= -1 + 1$ ，
 $= 0$ 。

18. 解方程：

(1) $\frac{2x-1}{3} = \frac{x+1}{2}$ ；

(2) $x^2 - 4x = 0$ 。

【答案】 (1) $x = 5$

(2) $x_1 = 0$ ， $x_2 = 4$ 。

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元一次方程和一元二次方程，解题的关键是熟练掌握解方程的一般步骤，准确计算。

(1) 先去分母，再去括号，然后移项并合并同类项，最后系数化为 1 即可得解；

(2) 用因式分解法，解一元二次方程即可。

【小问 1 详解】

解： $\frac{2x-1}{3} = \frac{x+1}{2}$ ，

去括号得： $2(2x-1) = 3(x+1)$ ，

去括号得： $4x-2 = 3x+3$ ，

移项合并同类项得： $x = 5$ ；

【小问 2 详解】

解： $x^2 - 4x = 0$,

分解因式得： $x(x-4) = 0$,

$\therefore x = 0$ 或 $x - 4 = 0$,

解得： $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

19. 欧拉是历史上享誉全球的最伟大的数学家之一，他不仅在高等数学各个领域作出杰出贡献，也在初等数学中留下了不凡的足迹．设 a , b , c 为两两不同的数，称

$P_n = \frac{a^n}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^n}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^n}{(c-a)(c-b)} (n=0,1,2,3)$ 为欧拉分式.

(1) 写出 P_0 对应的表达式；

(2) 化简 P_1 对应的表达式.

【答案】 (1) $P_0 = \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}$

(2) $P_1 = 0$

【解析】

【分析】 本题考查分式的化简求值，弄清欧拉公式的特点，利用分式的加减法计算是解题的关键.

(1) 将 $n = 0$ 代入欧拉公式即可；

(2) 将 $n = 1$ 代入欧拉公式化简计算即可.

【小问 1 详解】

解： 当 $n = 0$ 时，

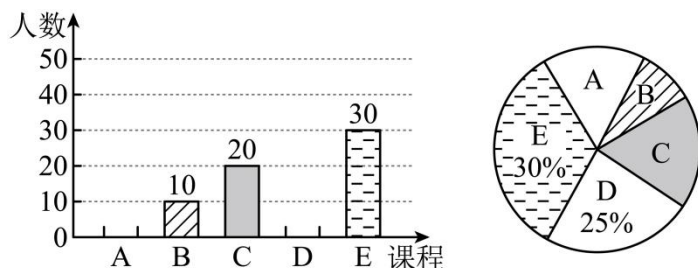
$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{a^0}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^0}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^0}{(c-a)(c-b)} \\ &= \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} \end{aligned}$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} \\ &= \frac{a}{(a-b)(a-c)} - \frac{b}{(b-c)(a-b)} + \frac{c}{(a-c)(b-c)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{a(b-c) - b(a-c) + c(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)} \\
 &= \frac{ab - ac - ab + bc + ca - bc}{(a-b)(a-c)(b-c)} \\
 &= \frac{ab - ac - ab + bc + ca - bc}{(a-b)(a-c)(b-c)} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

20. 某校劳动实践基地共开设五门劳动实践课程，分别是 A：床铺整理，B：衣物清洗，C：手工制作、D：简单烹饪、E：绿植栽培；课程开设一段时间后，季老师采用抽样调查的方式在全校学生中开展了“我最喜欢的劳动实践课程”为主题的问卷调查，根据调查所收集的数我进行整理、绘制了如下两幅不完整的统计图。



根据图中信息，请回答下列问题：

- (1) 请将条形统计图补充完整，并直接写出“手工制作”对应的扇形圆心角度数；
- (2) 若该校共有 1800 名学生，请你估计全校最喜欢“绿植栽培”的学生人数；
- (3) 小兰同学从 B，C，D 三门课程中随机选择一门参加劳动实践，小亮同学从 C，D，E 三门课程中随机选择一门参加劳动实践，求两位同学选择相同课程的概率。

【答案】 (1) 补充条形统计图见解析；“手工制作”对应的扇形圆心角度数为 72° ；

(2) 估计全校最喜欢“绿植栽培”的学生人数为 540 人；

(3) 甲乙两位同学选择相同课程的概率为： $\frac{2}{9}$ 。

【解析】

【分析】 (1) 根据选择“E”的人数及比例求出总人数，总人数乘以 D 占的比例求得“D”的人数，总人数减去其他类别的人数求得“A”的人数，据此即可将条形统计图补充完整，再用 360 度乘以“C”占的比例即为“手工制作”对应的扇形圆心角度数；

(2) 利用样本估计总体思想求解；

(3) 通过列表或画树状图列出所有等可能的情况，再从中找出符合条件的情况数，再利用概率公式计算。

【小问 1 详解】

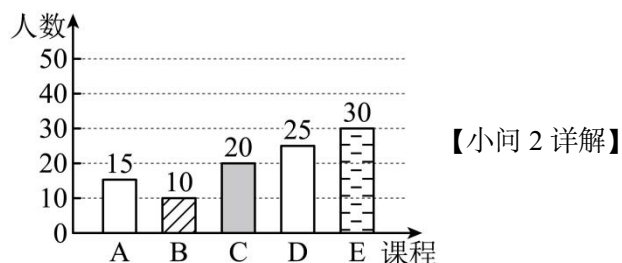
解：参与调查的总人数为： $30 \div 30\% = 100$ （人），

“D”的人数 $100 \times 25\% = 25$ （人），

“A”的人数 $100 - 10 - 20 - 25 - 30 = 15$ （人），

“手工制作”对应的扇形圆心角度数 $\frac{20}{100} \times 360^\circ = 72^\circ$ ，

补充条形统计图如图：

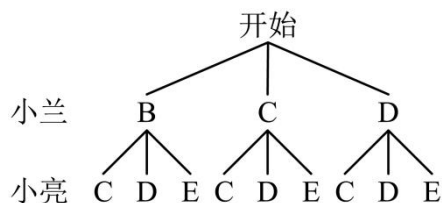


解： $1800 \times 30\% = 540$ （人），

因此估计全校最喜欢“绿植栽培”的学生人数为 540 人；

【小问 3 详解】

解：画树状图如下：



由图可知，共有 9 种等可能的情况，其中两位同学选择相同课程的情况有 2 种，

因此甲乙两位同学选择相同课程的概率为： $\frac{2}{9}$ 。

【点睛】本题考查条形统计图、扇形统计图、利用样本估计总体、利用画树状图或者列表法求概率等，解题的关键是将条形统计图与扇形统计图的信息进行关联，掌握画树状图或者列表法求概率的原理。

21. 【问题背景】

某校八年级数学社团在研究等腰三角形“三线合一”性质时发现：

①如图，在 $\triangle ABC$ 中，若 $AD \perp BC$ ， $BD = CD$ ，则有 $\angle B = \angle C$ ；

②某同学顺势提出一个问题：既然①正确，那么进一步推得 $AB = AC$ ，即知 $AB + BD = AC + CD$ ，若把

①中的 $BD = CD$ 替换为 $AB + BD = AC + CD$ ，还能推出 $\angle B = \angle C$ 吗？基于此，社团成员小军、小民进行了探索研究，发现确实能推出 $\angle B = \angle C$ ，并分别提供了不同的证明方法。

小军

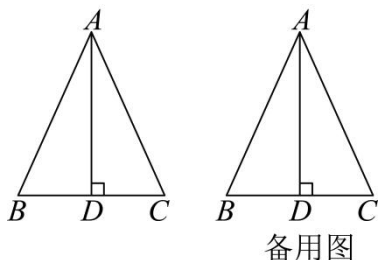
证明：分别延长 DB, DC 至 E, F 两点，

使得.....

小民

证明：∵ $AD \perp BC$.

∴ $\triangle ADB$ 与 $\triangle ADC$ 均为直角三角形、根据勾股定理，得.....



【问题解决】

- (1) 完成①的证明；
- (2) 把②中小军、小民的证明过程补充完整.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】题目主要考查全等三角形的判定和性质，勾股定理解三角形，理解题意，作出辅助线，综合运用这些知识点是解题关键.

(1) 根据题意利用全等三角形的判定和性质即可证明；

(2) 小军证明：分别延长 DB, DC 至 E, F 两点，使得 $BE = AB, CF = AC$ ，根据全等三角形的判定和性质得出 $\angle E = \angle F$ ，再由等边对等角及三角形的外角性质即可证明；

小民证明：利用勾股定理得出 $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{(AB + BD)(AB - BD)}$ ，
 $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{(AC + CD)(AC - CD)}$ ，再由等式的性质确定 $AB - BD = AC - CD$ ，然后求和得出 $AB = AC$ ，即可证明.

【小问1详解】

证明：∵ $AD \perp BC$ ，

∴ $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$ ，

在 $Rt\triangle ADB$ 与 $Rt\triangle ADC$ 中，

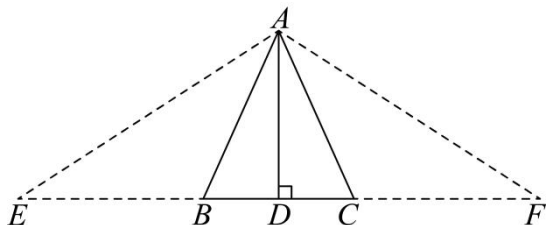
$$\begin{cases} AD = AD \\ \angle ADB = \angle ADC = 90^\circ, \\ BD = CD \end{cases}$$

$$\therefore Rt\triangle ADB \cong Rt\triangle ADC (SAS),$$

$$\therefore \angle B = \angle C;$$

【小问2详解】

小军证明：分别延长 DB, DC 至 E, F 两点，使得 $BE = AB, CF = AC$ ，如图所示：



$$\because AB + BD = AC + CD,$$

$$\therefore BE + BD = CF + CD \text{ 即 } DE = DF,$$

$$\because AD \perp BC,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle ADC = 90^\circ,$$

在 $Rt\triangle ADE$ 与 $Rt\triangle ADF$ 中，

$$\begin{cases} AD = AD \\ \angle ADB = \angle ADC = 90^\circ, \\ ED = FD \end{cases}$$

$$\therefore Rt\triangle ADE \cong Rt\triangle ADF (SAS),$$

$$\therefore \angle E = \angle F,$$

$$\because BE = AB, CF = AC,$$

$$\therefore \angle E = \angle EAB = \angle F = \angle FAC,$$

$$\therefore \angle E + \angle EAB = \angle ABC, \angle F + \angle FAC = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB;$$

小民：

证明： $\because AD \perp BC$.

$\therefore \triangle ADB$ 与 $\triangle ADC$ 均为直角三角形，

根据勾股定理， $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{(AB + BD)(AB - BD)}$ ，

$$AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{(AC + CD)(AC - CD)},$$

$$\therefore AB + BD = AC + CD \text{ ①},$$

$$\therefore AB - BD = AC - CD \text{ ②},$$

① + ② 得: $AB = AC$,

$\therefore \angle B = \angle C$.

22. 春节期间, 全国各影院上映多部影片, 某影院每天运营成本为 2000 元, 该影院每天售出的电影票数量 y (单位: 张) 与售价 x (单位: 元/张) 之间满足一次函数关系 ($30 \leq x \leq 80$, 且 x 是整数), 部分数据如下表所示:

电影票售价 x (元/张)	40	50
售出电影票数量 y (张)	164	124

(1) 请求出 y 与 x 之间的函数关系式;

(2) 设该影院每天的利润 (利润 = 票房收入 - 运营成本) 为 w (单位: 元), 求 w 与 x 之间的函数关系式;

(3) 该影院将电影票售价 x 定为多少时, 每天获利最大? 最大利润是多少?

【答案】 (1) $y = -4x + 324 (30 \leq x \leq 80)$

(2) $w = -4x^2 + 324x - 2000 (30 \leq x \leq 80)$

(3) 定价 40 元/张或 41 元/张时, 每天获利最大, 最大利润是 4560 元

【解析】

【分析】 本题是一次函数与二次函数的应用, 解题的关键是得出函数解析式, 并熟练掌握二次函数的性质.

(1) 设 y 与 x 之间的函数关系式为 $y = kx + b$, 根据待定系数法代入求解即可;

(2) “利润 = 票房收入 - 运营成本” 可得函数解析式;

(2) 将函数解析式配方成顶点式, 由 $30 \leq x \leq 80$, 且 x 是整数, 结合二次函数的性质求解可得.

【小问 1 详解】

解: 设 y 与 x 之间的函数关系式为 $y = kx + b$,

$$\text{则} \begin{cases} 164 = 40k + b \\ 124 = 50k + b \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = -4 \\ b = 324 \end{cases},$$

$\therefore y$ 与 x 之间的函数关系式 $y = -4x + 324 (30 \leq x \leq 80)$;

【小问 2 详解】

由题意得: $w = xy - 2000 = x(-4x + 324) - 2000 = -4x^2 + 324x - 2000$,

即 w 与 x 之间的函数关系式为:

$$w = -4x^2 + 324x - 2000 \quad (30 \leq x \leq 80).$$

【小问3详解】

$$w = -4x^2 + 324x - 2000 = -4\left(x - \frac{81}{2}\right)^2 + 4561 \quad (30 \leq x \leq 80),$$

$\because x$ 是整数, 且 $30 \leq x \leq 80$,

$\therefore$ 当 $x = 40$ 或 41 时, w 取得最大值, 最大值为 4560.

价格低更能吸引顾客, 定价 40 元/张或 41 元/张时, 每天获利最大, 最大利润是 4560 元.

如图 1, $\triangle ABC$ 中, 点 D, E, F 分别在三边 BC, CA, AB 上, 且满足 $DF \parallel AC, DE \parallel AB$.

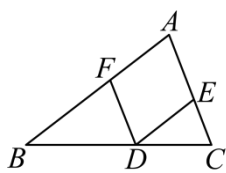


图1

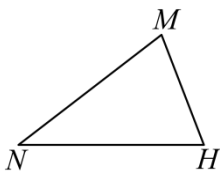


图2

23. ①求证: 四边形 $AFDE$ 为平行四边形;

②若 $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$, 求证: 四边形 $AFDE$ 为菱形;

24. 把一块三角形余料 MNH (如图 2 所示) 加工成菱形零件, 使它的一个顶点与 $\triangle MNH$ 的顶点 M 重合, 另外三个顶点分别在三边 MN, NH, HM 上, 请在图 2 上作出这个菱形. (用尺规作图, 保留作图痕迹, 不写作法.)

【答案】23. ①见解析; ②见解析

24. 见解析

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的判定定理、菱形的判定定理、尺规作图, 熟练掌握相关判定定理是解题的关键.

(1) ① $DF \parallel AC, DE \parallel AB$, 即可证明四边形 $AFDE$ 为平行四边形;

②由 $DF \parallel AC, DE \parallel AB$, 可得 $\frac{DF}{AC} = \frac{BD}{BC}, \frac{DE}{AB} = \frac{CD}{BC}$, 即 $DF \cdot BC = AC \cdot BD$,

$DE \cdot BC = AB \cdot CD$, 再由 $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$, 得 $AB \cdot DC = AC \cdot BD$, 因此 $DF = DE$, 进而即可证明四边形 $AFDE$ 为菱形;

(2) 作 $\angle NMH$ 的角平分线, 交 NH 于点 P , 作 MP 的垂直平分线, 交 MN 于点 D , 交 MH 于点 E , 则四边形 $MDPE$ 是菱形.

【23 题详解】

①证明: $\because DF \parallel AC, DE \parallel AB$,

∴ 四边形 $AFDE$ 为平行四边形；

② ∵ $DF \parallel AC$,

$$\therefore \frac{DF}{AC} = \frac{BD}{BC},$$

$$\text{即 } DF \cdot BC = AC \cdot BD$$

∵ $DE \parallel AB$,

$$\therefore \frac{DE}{AB} = \frac{CD}{BC},$$

$$\text{即 } DE \cdot BC = AB \cdot CD,$$

$$\text{又 } \therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC},$$

$$\therefore AB \cdot DC = AC \cdot BD,$$

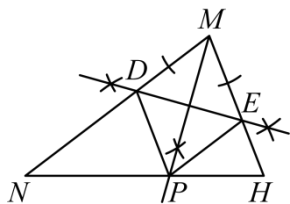
$$\therefore DF = DE,$$

由①知四边形 $AFDE$ 为平行四边形,

∴ 四边形 $AFDE$ 为菱形;

【24 题详解】

如图, 菱形 $MDPE$ 即为所求.



∵ MP 平分 $\angle NMH$,

$$\therefore \angle DMP = \angle EMP,$$

∵ DE 是 MP 的垂直平分线,

$$\therefore DM = DP, \quad EM = EP,$$

$$\therefore \angle DMP = \angle DPM, \quad \angle EMP = \angle EPM,$$

$$\therefore \angle DPM = \angle EMP, \quad \angle EPM = \angle DMP,$$

$$\therefore DP \parallel ME, \quad EP \parallel DM,$$

∴ 四边形 $MDPE$ 是平行四边形,

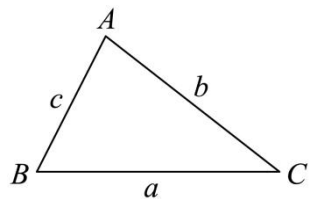
$$\therefore DM = DP,$$

∴ 平行四边形 $MDPE$ 是菱形.

25. 【教材呈现】

现行人教版九年级下册数学教材 85 页“拓广探索”第 14 题:

14. 如图, 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 探究 $\frac{a}{\sin A}$, $\frac{b}{\sin B}$, $\frac{c}{\sin C}$ 之间的关系. (提示: 分别作 AB 和 BC 边上的高.)



【得出结论】

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

【基础应用】

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 75^\circ$, $\angle C = 45^\circ$, $BC = 2$, 利用以上结论求 AB 的长;

【推广证明】

进一步研究发现, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 不仅在锐角三角形中成立, 在任意三角形中均成立, 并且还满足

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad (R \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 外接圆的半径}).$$

请利用图 1 证明: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

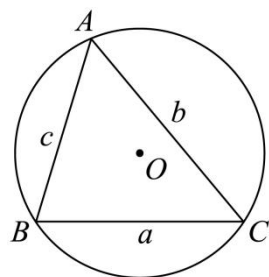


图1

【拓展应用】

如图 2, 四边形 $ABCD$ 中, $AB = 2$, $BC = 3$, $CD = 4$, $\angle B = \angle C = 90^\circ$.

求过 A , B , D 三点的圆的半径.

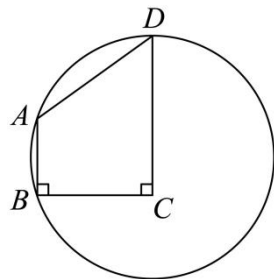


图2

【答案】教材呈现: 见解析; 基础应用: $AB = \frac{2\sqrt{6}}{3}$; 推广证明: 见解析; 拓展应用: $R = \frac{5\sqrt{13}}{6}$.

【解析】

【分析】 本题考查三角形的外接圆，三角形内角和，圆周角定理，等腰三角形性质，垂径定理，锐角三角函数。添加辅助线构造直角三角形是解题的关键。

教材呈现：分别作 $AD \perp BC, CE \perp AB$ ，垂足分别为 D, E ，根据正弦的定义，在 4 个直角三角形中分别

表示出 CE, AD ，进而将等式变形，即可求得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 。

基础应用：利用三角形内角和定理求得 $\angle A = 60^\circ$ ，利用公式 $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$ ，代入数据求解即可；

推广证明：作直径 CQ ，连接 AQ ，利用圆周角定理求得 $\angle QAC = 90^\circ$ ， $\angle B = \angle Q$ ，推出

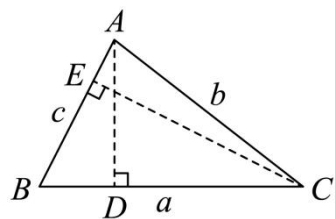
$\sin \angle Q = \frac{AC}{CQ} = \frac{b}{2R}$ ，即 $2R = \frac{b}{\sin Q} = \frac{b}{\sin B}$ ，同理 $2R = \frac{b}{\sin A}$ ， $2R = \frac{b}{\sin C}$ ，据此即可证明结论成立；

拓展应用：连接 BD ，作 $AE \perp CD$ 于点 E ，证得四边形 $ABCE$ 是矩形，利用勾股定理求得 BD 和 AD ，证

明 $\angle ABD = \angle BDC$ ，利用三角函数的定义求得 $\sin \angle ABD = \sin \angle BDC = \frac{BC}{BD} = \frac{3}{5}$ ，再根据

$\frac{AD}{\sin \angle ABD} = 2R$ ，据此即可求解。

【详解】解：教材呈现：如图，分别作 $AD \perp BC, CE \perp AB$ ，垂足分别为 D, E ，



$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中， $\sin B = \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{c}$ ，

$\therefore AD = c \cdot \sin B$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中， $\sin C = \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{b}$ ，

$\therefore AD = b \cdot \sin C$ ，

$\therefore c \cdot \sin B = b \cdot \sin C$ ，

$\therefore \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AEC$ 中， $\sin A = \frac{EC}{b}$ ，

$\therefore EC = \sin A \cdot b$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BEC$ 中， $\sin B = \frac{EC}{a}$ ，

$\therefore EC = \sin B \cdot a$ ，

$$\therefore \sin A \cdot b = \sin B \cdot a,$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

基础应用： $\because \triangle ABC$ 中， $\angle B = 75^\circ$ ， $\angle C = 45^\circ$ ，

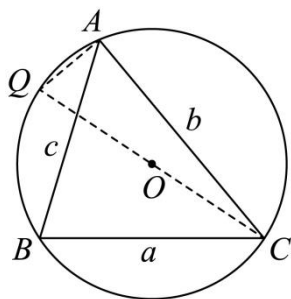
$$\therefore \angle A = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ = 60^\circ,$$

由题意得 $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A},$

$$\therefore \frac{\frac{AB}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{2},$$

解得 $AB = \frac{2\sqrt{6}}{3};$

推广证明：作直径 CQ ，连接 AQ ，



$\because$ 直径 CQ ，

$$\therefore \angle QAC = 90^\circ,$$

$$\because \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AC},$$

$$\therefore \angle B = \angle Q,$$

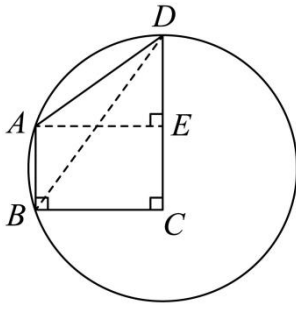
$$\therefore \sin \angle Q = \frac{AC}{CQ} = \frac{b}{2R},$$

$$\therefore 2R = \frac{b}{\sin Q} = \frac{b}{\sin B},$$

同理 $2R = \frac{b}{\sin A}, \quad 2R = \frac{b}{\sin C},$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R;$$

拓展应用：连接 BD ，作 $AE \perp CD$ 于点 E ，



$$\therefore \angle ABC = \angle C = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCE$ 是矩形,

$$\therefore AB = 2, \quad BC = 3, \quad CD = 4,$$

$$\therefore AE = BC = 3, \quad DE = CD - CE = 4 - 2 = 2, \quad BD = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\therefore AD = \sqrt{AE^2 + DE^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13},$$

$$\therefore \angle ABC = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle BDC,$$

$$\therefore \sin \angle ABD = \sin \angle BDC = \frac{BC}{BD} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \frac{AD}{\sin \angle ABD} = 2R, \quad \text{即} \quad \frac{\sqrt{13}}{\frac{3}{5}} = 2R,$$

$$\therefore R = \frac{5\sqrt{13}}{6}.$$