

参照秘密级管理★启用前

试卷类型：A

济宁市二〇二四年初中学业水平考试

数学试题

注意事项：

1. 本试卷共 6 页，考试时间 120 分钟，共 100 分.
2. 答题前，考生务必先核对条形码上的姓名、准考证号和座号，然后用 0.5 毫米黑色墨水签字笔将本人的姓名、准考证号和座号填写在答题卡相应位置.
3. 答选择题时，必须使用 2B 铅笔填涂答题卡上相应题目的答案标号，如需改动，必须先用橡皮擦干净，再改涂其它答案.
4. 答非选择题时，必须使用 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上书写，务必在题号所指示的答题区域内作答.
5. 填空题请直接将答案填写在答题卡上，解答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤.
6. 考试结束后，将本试卷和答题卡一

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.

1. -3 的绝对值是 ()

- A. $-\frac{1}{3}$ B. -3 C. $\frac{1}{3}$ D. 3

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查绝对值，属于简单基础题，根据绝对值的意义求解即可.

【详解】解： -3 的绝对值是 3，

故选：D.

2. 如图是一个正方体的展开图，把展开图折叠成正方体后，有“建”字一面的相对面上的字是 ()



- A. 人 B. 才 C. 强 D. 国

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了正方体相对两个面上的文字，正方体的表面展开图，相对的面之间一定相隔一个正方形，“Z”型首尾是相对的面，根据这一特点作答.

【详解】解：由图可得，有“建”字一面的相对面上的字是“国”，
故选：D.

3. 下列运算正确的是（ ）

A. $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$

B. $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10}$

C. $2 \div \sqrt{2} = 1$

D. $\sqrt{(-5)^2} = -5$

【答案】B

【解析】

【分析】此题考查二次根式的运算法则，根据二次根式的加法法则对 A 进行判断；根据二次根式的乘法法则对 B 进行判断；根据二次根式的除法法则对 C 进行判断；根据二次根式的性质对 D 进行判断.

【详解】A. $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{3}$ 不能合并，所以 A 选项错误；

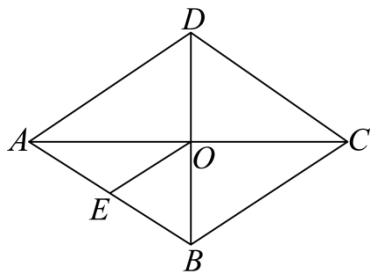
B. $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10}$ ，所以 B 选项正确；

C. $2 \div \sqrt{2} = \sqrt{4 \div 2} = \sqrt{2}$ ，所以 C 选项错误；

D. $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$ ，所以 D 选项错误.

故选：B.

4. 如图，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC ， BD 相交于点 O ， E 是 AB 的中点，连接 OE ．若 $OE = 3$ ，则菱形的边长为（ ）



A. 6

B. 8

C. 10

D. 12

【答案】A

【解析】

【分析】根据菱形的性质可得 $AC \perp BD$ ，根据“直角三角形斜边中线等于斜边的一半”可得 $OE = \frac{1}{2} AB$ ，即可得解.

本题主要考查了菱形的性质和“直角三角形中斜边中线等于斜边一半”的性质，熟练掌握以上知识是解题的关键.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore AC \perp BD,$$

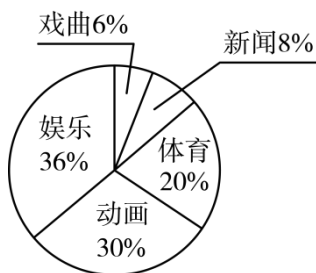
$\therefore E$ 是 AB 的中点,

$$\therefore OE = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore AB = 2OE = 2 \times 3 = 6.$$

故选：A.

5. 为了解全班同学对新闻、体育、动画、娱乐、戏曲五类节目的喜爱情况，班主任对全班 50 名同学进行了问卷调查（每名同学只选其中的一类），依据 50 份问卷调查结果绘制了全班同学喜爱节目情况扇形统计图（如图所示）. 下列说法正确的是（ ）



A. 班主任采用的是抽样调查

B. 喜爱动画节目的同学最多

C. 喜爱戏曲节目的同学有 6 名

D. “体育” 对应扇形的圆心角为 72°

【答案】D

【解析】

【分析】根据全班共 50 名学生，班主任制作了 50 份问卷调查，可知班主任采用的是普查，由此可判断 A；根据喜爱娱乐节目的同学所占的百分比最多，可判断 B；用 50 乘以喜爱戏曲节目的同学所占的百分比计算出喜爱戏曲节目的同学的人数，可判断 C；用 360° 乘以“体育”所占的百分比求出“体育”对应扇形的圆心角的度数，即可判断 D.

本题考查了扇形统计图，从扇形统计图中正确获取信息是解题关键.

【详解】全班共 50 名学生，班主任制作了 50 份问卷调查，

所以班主任采用的是全面调查，

故 A 选项错误；

喜爱娱乐节目的同学所占的百分比最多，因此喜爱娱乐节目的同学最多，

故 B 选项错误；

喜爱戏曲节目的同学有 $50 \times 6\% = 3$ 名，

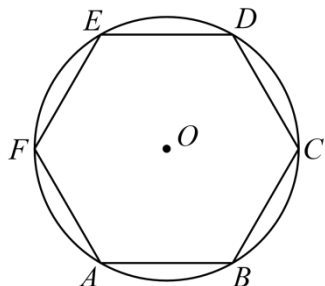
故 C 选项错误；

“体育” 对应扇形的圆心角为 $360^\circ \times 20\% = 72^\circ$ ，

故 D 选项正确.

故选: D.

6. 如图, 边长为 2 的正六边形 $ABCDEF$ 内接于 $\odot O$, 则它的内切圆半径为 ()



A. 1

B. 2

C. $\sqrt{2}$

D. $\sqrt{3}$

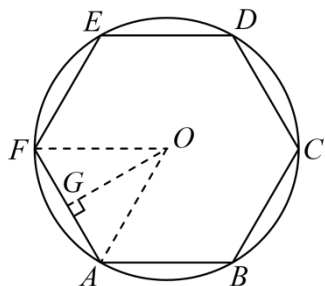
【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了正多边形与圆, 等边三角形的判定和性质, 勾股定理;

连接 OA , OF , 作 $OG \perp AF$ 于 G , 证明 $\triangle AOF$ 是等边三角形, 可得 $FG = \frac{1}{2}AF = 1$, 然后利用勾股定理求出 OG 即可.

【详解】解: 如图, 连接 OA , OF , 作 $OG \perp AF$ 于 G ,



$$\therefore OF = OA, \angle AOF = 360^\circ \times \frac{1}{6} = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle AOF$ 是等边三角形,

$$\therefore OF = OA = AF = 2,$$

$\therefore OG \perp AF$,

$$\therefore FG = \frac{1}{2}AF = 1,$$

$$\therefore OG = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3},$$

即它的内切圆半径为 $\sqrt{3}$,

故选: D.

7. 已知点 $A(-2, y_1)$, $B(-1, y_2)$, $C(3, y_3)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k < 0)$ 的图象上, 则 y_1, y_2, y_3 的大小关系是 ()

- A. $y_1 < y_2 < y_3$ B. $y_2 < y_1 < y_3$ C. $y_3 < y_1 < y_2$ D. $y_3 < y_2 < y_1$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征, 根据反比例函数的性质得到函数 $y = \frac{k}{x} (k < 0)$ 的图象分布在第二、四象限, 在每一象限, y 随 x 的增大而增大, 结合三点的横坐标即可求解, 掌握反比例函数图象的性质是解题的关键.

【详解】解: $\because k < 0$,

$\therefore$ 函数 $y = \frac{k}{x} (k < 0)$ 的图象分布在第二、四象限, 在每一象限, y 随 x 的增大而增大,

$\because -2 < -1 < 0 < 3$,

$\therefore y_3 < 0 < y_1 < y_2$

$\therefore y_3 < y_1 < y_2$,

故选: C.

8. 解分式方程 $1 - \frac{1}{3x-1} = -\frac{5}{2-6x}$ 时, 去分母变形正确的是 ()

- A. $2 - 6x + 2 = -5$ B. $6x - 2 - 2 = -5$
C. $2 - 6x - 1 = 5$ D. $6x - 2 + 1 = 5$

【答案】A

【解析】

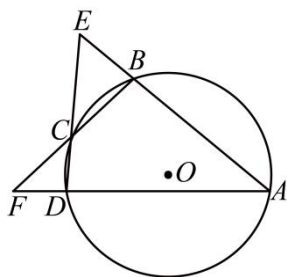
【分析】本题考查通过去分母将分式方程转化为整式方程, 方程两边同乘各分母的最简公分母, 即可去分母.

【详解】解: 方程两边同乘 $2 - 6x$, 得 $2 - 6x - (2 - 6x) \times \frac{1}{3x-1} = -\frac{5}{2-6x} \times (2 - 6x)$,

整理可得: $2 - 6x + 2 = -5$

故选: A.

9. 如图, 分别延长圆内接四边形 $ABCD$ 的两组对边, 延长线相交于点 E, F . 若 $\angle E = 54^\circ 41'$, $\angle F = 43^\circ 19'$, 则 $\angle A$ 的度数为 ()

A. 42° B. $41^\circ 20'$ C. 41° D. $40^\circ 20'$

【答案】C

【解析】

【分析】根据“圆的内接四边形对角互补”可得 $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, $\angle A + \angle BCD = 180^\circ$. 根据三角形外角定理可得 $\angle ABC = \angle E + \angle ECB$, $\angle ADC = \angle F + \angle DCF$, 由此可得 $\angle ECB = 41^\circ$, 又由 $\angle ECB + \angle BCD = 180^\circ$, 可得 $\angle A = \angle ECB$, 即可得解.

本题主要考查了“圆的内接四边形对角互补”和三角形外角定理, 熟练掌握以上知识是解题的关键.

【详解】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形我

$$\therefore \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ, \quad \angle A + \angle BCD = 180^\circ,$$

$$\because \angle ABC = \angle E + \angle ECB, \quad \angle ADC = \angle F + \angle DCF,$$

$$\therefore \angle E + \angle ECB + \angle F + \angle DCF = 180^\circ,$$

$$\because \angle ECB = \angle DCF, \quad \angle E = 54^\circ 41', \quad \angle F = 43^\circ 19',$$

$$\therefore 54^\circ 41' + 43^\circ 19' + 2\angle ECB = 180^\circ,$$

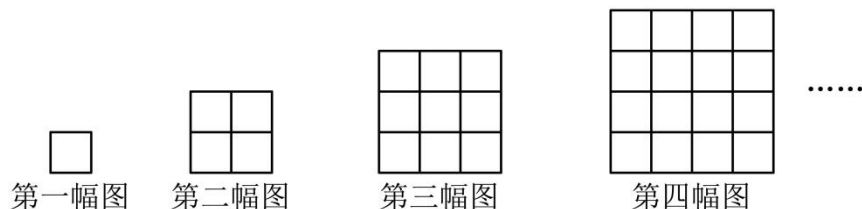
$$\text{解得 } \angle ECB = 41^\circ,$$

$$\because \angle ECB + \angle BCD = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle ECB = 41^\circ.$$

故选: C

10. 如图, 用大小相等的小正方形按照一定规律拼正方形. 第一幅图有 1 个正方形, 第二幅图有 5 个正方形, 第三幅图有 14 个正方形……按照此规律, 第六幅图中正方形的个数为 ()



A. 90

B. 91

C. 92

D. 93

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了规律型问题，解题的关键是仔细观察图形并找到有关图形个数的规律．仔细观察图形知道第1个图形有1个正方形，第2个有 $5 = 1^2 + 2^2$ 个，第3个图形有 $14 = 1^2 + 2^2 + 3^2$ 个，…由此得到规律求得第6个图形中正方形的个数即可．

【详解】第1个图形有1个正方形，

第2个图形有 $5 = 1^2 + 2^2$ 个正方形，

第3个图形有 $14 = 1^2 + 2^2 + 3^2$ 个正方形，

……

第6个图形有 $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 91$ （个）正方形，

故选：B．

二、填空题：本大题共5小题，每小题3分，共15分．

11. 我国自主研发的500m口径球面射电望远镜（FAST）有“中国天眼”之称，它的反射面面积约为 250000m^2 ．将数250000用科学记数法表示为_____．

【答案】 2.5×10^5

【解析】

【分析】本题考查了科学记数法．科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数．确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值大于1与小数点移动的位数相同．

【详解】解： $250000 = 2.5 \times 10^5$ ，

故答案为： 2.5×10^5 ．

12. 已知 $a^2 - 2b + 1 = 0$ ，则 $\frac{4b}{a^2 + 1}$ 的值是_____．

【答案】2

【解析】

【分析】本题考查了代数式的求值，解题的关键是熟练掌握整体思想的运用．根据对已知条件进行变形得到 $a^2 + 1 = 2b$ ，代入进而即可求解

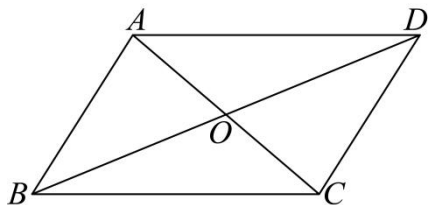
【详解】解： $\because a^2 - 2b + 1 = 0$ ，

$\therefore a^2 + 1 = 2b$

$$\therefore \frac{4b}{a^2+1} = \frac{4b}{2b} = 2,$$

故答案为：2

13. 如图，四边形 $ABCD$ 的对角线 AC ， BD 相交于点 O ， $OA = OC$ ，请补充一个条件_____，使四边形 $ABCD$ 是平行四边形.



【答案】 $AD \parallel BC$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】 本题考查平行四边形的判定，根据一组对边平行且相等的四边形是平行四边形即可求解.

【详解】 解：添加条件： $AD \parallel BC$ ，

证明： $\because AD \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle DAO = \angle BCO,$$

在 $\triangle AOD$ 和 $\triangle COB$ 中，

$$\begin{cases} \angle DAO = \angle BCO \\ AO = CO \\ \angle AOD = \angle COB \end{cases},$$

$$\therefore \triangle DAO \cong \triangle BCO (\text{ASA})$$

$$\therefore AD = BC,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

故答案为： $AD \parallel BC$ (答案不唯一)

14. 将抛物线 $y = x^2 - 6x + 12$ 向下平移 k 个单位长度. 若平移后得到的抛物线与 x 轴有公共点，则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k \geq 3$

【解析】

【分析】 先根据平移的规律写出抛物线 $y = x^2 - 6x + 12$ 向下平移 k 个单位长度后的抛物线的表达式，再根据平移后得到的抛物线与 x 轴有公共点可得 $\Delta \geq 0$ ，由此列不等式即可求出 k 的取值范围.

此题考查了二次函数图像的平移与几何变换，以及抛物线与 x 轴的交点问题，利用抛物线解析式的变化规律：左加右减，上加下减是解题关键.

【详解】解：将抛物线 $y = x^2 - 6x + 12$ 向下平移 k 个单位长度得 $y = x^2 - 6x + 12 - k$ ，

$\therefore y = x^2 - 6x + 12 - k$ 与 x 轴有公共点，

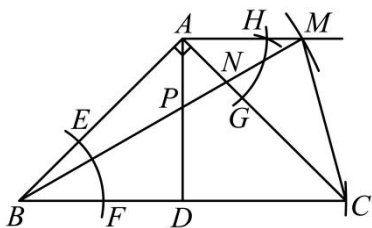
$\therefore \Delta \geq 0$ ，

即 $(-6)^2 - 4(12 - k) \geq 0$ ，

解得 $k \geq 3$ ，

故答案为： $k \geq 3$ 。

15. 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ， AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线。



(1) 以点 B 为圆心，适当长为半径画弧，分别交 BA ， BC 于点 E ， F 。

(2) 以点 A 为圆心， BE 长为半径画弧，交 AC 于点 G 。

(3) 以点 G 为圆心， EF 长为半径画弧，与 (2) 中所画的弧相交于点 H 。

(4) 画射线 AH 。

(5) 以点 B 为圆心， BC 长为半径画弧，交射线 AH 于点 M 。

(6) 连接 MC ， MB ， MB 分别交 AC ， AD 于点 N ， P 。

根据以上信息，下面五个结论中正确的是_____。（只填序号）

① $BD = CD$ ；② $\angle ABM = 15^\circ$ ；③ $\angle APN = \angle ANP$ ；④ $\frac{AM}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ；⑤ $MC^2 = MN \cdot MB$ 。

【答案】①②⑤

【解析】

【分析】本题为尺规作图几何综合题，涉及到了等腰三角形的性质即判定，矩形的判定，含 30° 角的直角三角形的定义，锐角三角函数的比值关系，相似三角形的判定及性质等知识点，灵活运用角的等量代换是解题的关键。

根据等腰三角形的性质即可判断出①；过 M 作 $MK \perp BC$ 于点 K ，证出四边形 $ADKM$ 为矩形，即可通过边的比值关系求出 $\angle MBK = 30^\circ$ ，即可求出 $\angle ABM$ 判断②；利用三角形外角和分别求出两个角的值进行比较即可判断③；设 $AP = x$ ，则 $PD = AD - x$ ，用含 x 的式子分别表达出 AM 和 AD 的长度后即可判断④；判定出 $\triangle BMC \sim \triangle CMN$ 即可判断⑤。

【详解】解：∵ $AB = AC$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ，

∴ 三角形 ABC 为等腰直角三角形， $\angle ABD = \angle ACD = 45^\circ$ ，

又∵ AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，

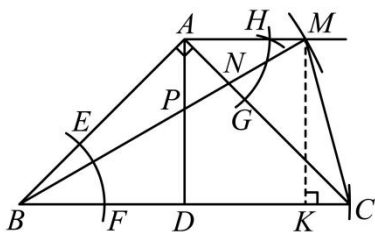
$$\therefore \angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ACD = \angle BAD = \angle CAD = 45^\circ,$$

∴ $BD = AD = DC$ ，故①正确；

根据题意作图可得： $\angle MAC = \angle ABD = 45^\circ$ ， $BM = BC$ ，

过 M 作 $MK \perp BC$ 于点 K ，则 $\angle MKB = 90^\circ$ ，如图所示：



∵ AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，由三线合一可得： $AD \perp BC$ ，即 $\angle ADC = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle DAM = \angle DAC + \angle MAC = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAM = \angle MKB = \angle ADC = 90^\circ,$$

∴ 四边形 $ADKM$ 为矩形，

$$\therefore MK = AD = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} BM,$$

$$\therefore \angle MBK = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ABM = \angle ABD - \angle MBK = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ, \text{ 故②正确；}$$

$$\therefore \angle APN = \angle ABM + \angle BAD = 15^\circ + 45^\circ = 60^\circ, \quad \angle ANP = \angle MBK + \angle DAC = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ,$$

∴ $\angle APN \neq \angle ANP$ ，故③错误；

设 $AP = x$ ，则 $PD = AD - x$ ，

∵ $AM \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle AMB = \angle MBC = 30^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle AMB = \tan 30^\circ = \frac{AP}{AM} = \frac{x}{AM} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 即 } AM = \sqrt{3}x,$$

$$\tan \angle MBC = \tan 30^\circ = \frac{PD}{BD} = \frac{AD - x}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 即 } AD = \frac{3x + \sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \frac{AM}{AD} = \frac{\sqrt{3}x}{\frac{3x + \sqrt{3}x}{2}} = \sqrt{3} - 1, \text{ 故④错误;}$$

$$\therefore \angle BMC = \angle BCM = \frac{180^\circ - \angle MBC}{2} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle MNC = \angle ANP = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle MNC = \angle BCM,$$

$$\text{又} \because \angle BMC = \angle CMN,$$

$$\therefore \triangle BMC \sim \triangle CMN,$$

$$\therefore \frac{MC}{MB} = \frac{MN}{MC},$$

$$\therefore MC^2 = MN \cdot MB, \text{ 故⑤正确;}$$

综上所述，正确的有：①②⑤；

故答案为：①②⑤.

三、解答题：本大题共 7 小题，共 55 分.

16. 先化简，再求值：

$$x(y - 4x) + (2x + y)(2x - y), \text{ 其中 } x = \frac{1}{2}, y = 2.$$

【答案】 -3

【解析】

【分析】先将原式利用多项式乘以多项式，以及平方差公式化简，去括号合并同类项得到最简结果，再把 x 与 y 的值代入计算即可求出结果.

此题考查了整式的混合运算及化简求值，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

【详解】解： $x(y - 4x) + (2x + y)(2x - y)$

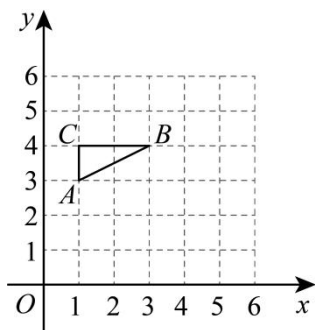
$$= xy - 4x^2 + 4x^2 - y^2$$

$$= xy - y^2,$$

$$\text{当 } x = \frac{1}{2}, y = 2 \text{ 时,}$$

$$\text{原式} = \frac{1}{2} \times 2 - 2^2 = 1 - 4 = -3.$$

17. 如图， $\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别是 $A(1,3), B(3,4), C(1,4)$.



- (1) 将 $\triangle ABC$ 向下平移 2 个单位长度得 $\triangle A_1B_1C_1$ ，画出平移后的图形，并直接写出点 B_1 的坐标；
- (2) 将 $\triangle A_1B_1C_1$ 绕点 B_1 逆时针旋转 90° 得 $\triangle A_2B_1C_2$ 。画出旋转后的图形，并求点 C_1 运动到点 C_2 所经过的路径长。

【答案】(1) 作图见解析， $B_1(3, 2)$

(2) 作图见解析， π

【解析】

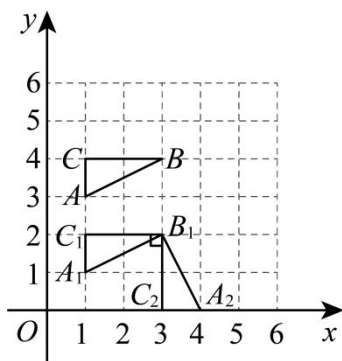
【分析】本题考查了作图—平移变换和旋转变换，弧长公式，解题的关键熟练掌握平移和旋转的性质，

(1) 利用平移的性质作出对应点，再连线即可，

(2) 利用旋转的性质分别作出对应点，再连线， C_1 运动到点 C_2 所经过的路径长即为弧长即可求解

【小问 1 详解】

解： $\triangle A_1B_1C_1$ 如下图所示：



由图可知： $B_1(3, 2)$ ；

【小问 2 详解】

解： $\triangle A_2B_1C_2$ 如上图所示：

C_1 运动到点 C_2 所经过的路径为：
$$\frac{\pi \times B_1C_1 \times 90^\circ}{180} = \frac{\pi \times 2 \times 90^\circ}{180} = \pi$$

18. 为做好青少年安全教育工作，某校开展了主题为“珍爱生命，牢记安全”的知识竞赛（共 20 题，每题 5 分，满分 100 分）。该校从学生成绩都不低于 80 分的八年级（1）班和（3）班中，各随机抽取了 20 名学生

成绩进行整理，绘制了不完整的统计表、条形统计图及分析表.

【收集数据】

八年级（1）班 20 名学生成绩：85，95，100，90，90，80，85，90，80，100，80，85，95，90，95，95，95，95，100，95.

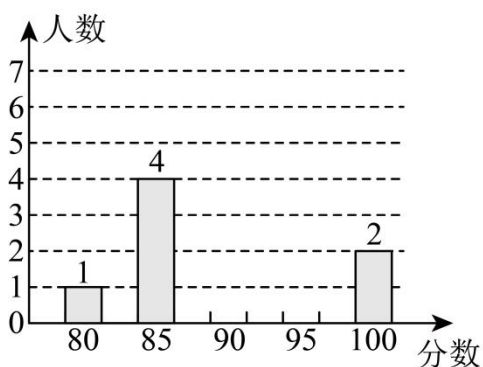
八年级（3）班 20 名学生成绩：90，80，100，95，90，85，85，100，85，95，85，90，90，95，90，90，95，90，95，95.

【描述数据】

八年级（1）班 20 名学生成绩统计表

分数	80	85	90	95	100
人数	3	3	a	b	3

八年级(3)前20名学生成绩条形统计图



【分析数据】

八年级（1）班和（3）班 20 名学生成绩分析表

统计量 班级	平均 数	中位 数	众 数	方 差
八年级（1） 班	m	n	95	41.5
八年级（3） 班	91	90	p	26.5

【应用数据】

根据以上信息，回答下列问题.

- (1) 请补全条形统计图；
- (2) 填空： $m = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $n = \underline{\hspace{2cm}}$ ；
- (3) 你认为哪个班级的成绩更好一些？请说明理由；
- (4) 从上面 5 名得 100 分的学生中，随机抽取 2 名学生参加市级知识竞赛，请用列表法或画树状图法求所抽取的 2 名学生恰好在同一个班级的概率。

【答案】(1) 见详解 (2) 91, 92.5

(3) 八年级 (1) 班成绩较好，理由见详解

(4) $\frac{2}{5}$

【解析】

【分析】(1) 由八年级 (3) 班 20 名学生成绩统计可得 90 分学生有 7 人，95 分学生有 6 人，补全条形统计图即可；

(2) 由八年级 (1) 班 20 名学生成绩统计可得 $a = 4$ ， $b = 7$ ，根据平均数和中位数的定义进行计算即可；

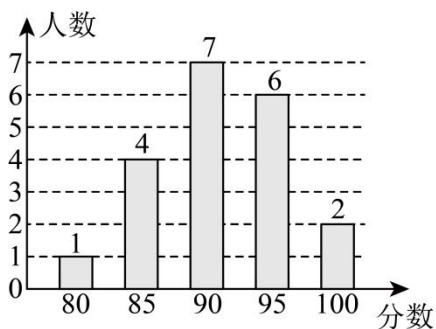
(3) 从平均数，中位数和众数综合分析得八年级 (1) 班成绩较好；

(4) 设八年级 (1) 班的三名 100 分的学生用 A 、 B 、 C 表示，八年级 (3) 班的两名 100 分的学生用 X 、 Y 表示，用列表法表示出所有可能结果，再从中找出 2 名学生恰好在同一个班级的结果数，再根据概率的计算公式进行计算即可。

【小问 1 详解】

解：由八年级 (3) 班 20 名学生成绩统计可得 90 分学生有 7 人，95 分学生有 6 人，补全条形统计图如图所示：

八年级(3)前20名学生成绩条形统计图



【小问 2 详解】

解：由八年级 (1) 班 20 名学生成绩统计可得 $a = 4$ ， $b = 7$ ，

$$\therefore m = \frac{80 \times 3 + 85 \times 3 + 90 \times 4 + 95 \times 7 + 100 \times 3}{20} = 91,$$

一共 20 名学生，中位数应该为第 10 名与第 11 名的平均数，

$$n = \frac{95 + 90}{2} = 92.5.$$

【小问 3 详解】

解：八年级（1）班和八年级（3）班的平均成绩相同，但八年级（1）班的中位数和众数都比八年级（3）班高，即八年级（1）班高分段人数较多，因此八年级（1）班成绩较好。

【小问4详解】

解：设八年级（1）班的三名100分的学生用 A 、 B 、 C 表示，八年级（3）班的两名100分的学生用 X 、 Y 表示，则随机抽两名学生的所有情况如下：

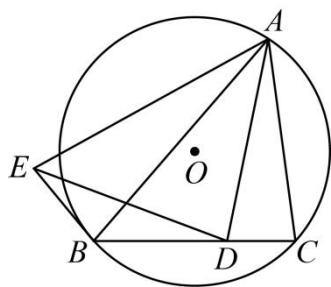
(1)班 \ (3)班	A	B	C	X	Y
A		AB	AC	AX	AY
B	BA		BC	BX	BY
C	CA	CB		CX	CY
X	XA	XB	XC		XY
Y	YA	YB	YC	YX	

一共有20种情况，其中两名同学在同一个班级的有 AB 、 AC 、 BA 、 BC 、 CA 、 CB 、 XY 、 YX 共8种，

∴所抽取的2名学生恰好在同一个班级的概率为： $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ 。

【点睛】本题考查读统计表和统计图，利用统计图获取信息的能力以及中位数，众数和平均数，以及概率的计算，利用统计表获取信息时，必须认真观察、分析、研究统计图，才能作出正确的判断和解决问题。

19. 如图， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， D 是 BC 上一点， $AD = AC$ 。 E 是 $\odot O$ 外一点， $\angle BAE = \angle CAD$ ， $\angle ADE = \angle ACB$ ，连接 BE 。



(1) 若 $AB = 8$ ，求 AE 的长；

(2) 求证: EB 是 $\odot O$ 的切线.

【答案】(1) $AE = 8$

(2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据 $\angle BAE = \angle CAD$ 可得 $\angle DAE = \angle CAB$, 然后证明 $\triangle DAE \cong \triangle CAB$ (ASA), 根据全等三角形的性质可得答案;

(2) 连接 OA, OB , 首先证明 $\angle ABE = \angle AEB = \angle ADC = \angle ACD$, 再根据三角形内角和定理和圆周角定理求出 $\angle OBA = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle AOB$, 然后计算出 $\angle OBE = \angle OBA + \angle ABE = 90^\circ$ 即可.

【小问 1 详解】

解: $\because \angle BAE = \angle CAD$,

$\therefore \angle DAE = \angle CAB$,

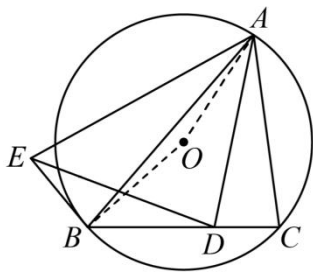
又 $\because AD = AC$, $\angle ADE = \angle ACB$,

$\therefore \triangle DAE \cong \triangle CAB$ (ASA),

$\therefore AE = AB = 8$;

【小问 2 详解】

证明: 如图, 连接 OA, OB ,



由 (1) 得: $AE = AB, AD = AC$,

$\therefore \angle ABE = \angle AEB$, $\angle ADC = \angle ACD$,

$\because \angle BAE = \angle CAD$,

$\therefore \angle ABE = \angle AEB = \angle ADC = \angle ACB$,

$\because OA = OB$,

$\therefore \angle OBA = \angle OAB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOB) = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle AOB$,

$$\text{又} \because \angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB,$$

$$\therefore \angle OBA = 90^\circ - \angle ACB,$$

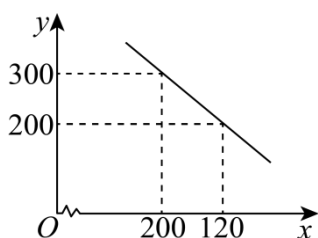
$$\therefore \angle OBE = \angle OBA + \angle ABE = 90^\circ - \angle ACB + \angle ACB = 90^\circ,$$

$\therefore OB$ 是半径,

$\therefore EB$ 是 $\odot O$ 的切线.

【点睛】本题考查了全等三角形的判定和性质，等腰三角形的性质，三角形内角和定理，圆周角定理，切线的判定等知识，熟练掌握相关判定定理和性质定理是解题的关键.

20. 某商场以每件 80 元的价格购进一种商品，在一段时间内，销售量 y (单位：件) 与销售单价 x (单位：元/件) 之间是一次函数关系，其部分图象如图所示.



(1) 求这段时间内 y 与 x 之间的函数解析式;

(2) 在这段时间内，若销售单价不低于 100 元，且商场还要完成不少于 220 件的销售任务，当销售单价为多少时，商场获得利润最大？最大利润是多少？

【答案】(1) 这段时间内 y 与 x 之间的函数解析式为 $y = -5x + 800$

(2) 当销售单价为 116 元时，商场获得利润最大，最大利润是 7920 元

【解析】

【分析】(1) 设这段时间内 y 与 x 之间的函数解析式为 $y = kx + b$ ，函数经过 $(100, 300)$ ， $(120, 200)$ ，可以利用待定系数法建立二元一次方程组，即可求出解析式；

(2) 根据销售单价不低于 100 元，且商场还要完成不少于 220 件，建立一元一次不等式组，即可求出销售单价的取值范围，要求最大利润，首先设获得利润为 z ，写出 z 关于 x 的二次函数解析式，根据二次函数的增减性和 x 的取值范围，即可求出获得利润的最大值

【小问 1 详解】

解：设这段时间内 y 与 x 之间的函数解析式为 $y = kx + b$ ，

$\therefore$ 由图象可知，函数经过 $(100, 300)$ ， $(120, 200)$ ，

$$\therefore \text{可得} \begin{cases} 100k + b = 300 \\ 120k + b = 200 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = -5 \\ b = 800 \end{cases},$$

∴这段时间内 y 与 x 之间的函数解析式为 $y = -5x + 800$;

【小问 2 详解】

解：∵销售单价不低于 100 元，且商场还要完成不少于 220 件，

$$\therefore x \geq 100, y \geq 220,$$

$$\text{即} \begin{cases} -5x + 800 \geq 220 \\ x \geq 100 \end{cases}, \text{解得 } 100 \leq x \leq 116,$$

设获得利润为 z ，即 $z = (-5x + 800)x - (-5x + 800) \times 80 = -5x^2 + 1200x - 64000$ ，

$$\therefore \text{对称轴 } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1200}{2 \times (-5)} = 120,$$

∵ $-5 < 0$ ，即二次函数开口向下， x 的取值范围是 $100 \leq x \leq 116$ ，

∴在 $100 \leq x \leq 120$ 范围内， z 随着 x 的增大而增大，

即当销售单价 $x = 116$ 时，获得利润 z 有最大值，

$$\therefore \text{最大利润 } z = -5 \times 116^2 + 1200 \times 116 - 64000 = 7920 \text{ 元}.$$

【点睛】 本题考查了求一次函数的解析式，二次函数的性质，解二元一次方程组，解一元一次不等式组，解题的关键是用待定系数法求函数的解析式，掌握二次函数的性质以及二次函数最大值的求解.

21. 综合与实践

某校数学课外活动小组用一张矩形纸片 (如图 1, 矩形 $ABCD$ 中, $AB > AD$ 且 AB 足够长) 进行探究活动.

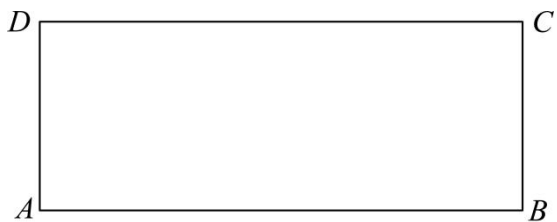


图1

【动手操作】

如图 2, 第一步, 沿点 A 所在直线折叠, 使点 D 落在 AB 上的点 E 处, 折痕为 AF , 连接 EF , 把纸片展平.

第二步, 把四边形 $AEFD$ 折叠, 使点 A 与点 E 重合, 点 D 与点 F 重合, 折痕为 GH , 再把纸片展平.

第三步, 连接 GF .

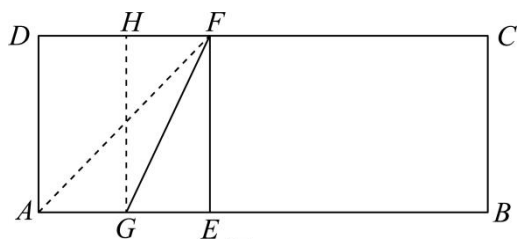


图2

【探究发现】

根据以上操作，甲、乙两同学分别写出了一个结论.

甲同学的结论：四边形 $AEFD$ 是正方形.

乙同学的结论： $\tan \angle AFG = \frac{1}{3}$.

(1) 请分别判断甲、乙两同学的结论是否正确. 若正确，写出证明过程；若不正确，请说明理由.

【继续探究】

在上面操作的基础上，丙同学继续操作.

如图 3，第四步，沿点 G 所在直线折叠，使点 F 落在 AB 上的点 M 处，折痕为 GP ，连接 PM ，把纸片展平.

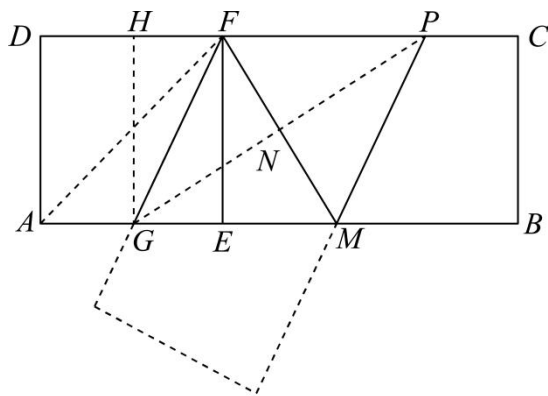


图3

第五步，连接 FM 交 GP 于点 N .

根据以上操作，丁同学写出了一个正确结论： $FN \cdot AM = GN \cdot AD$.

(2) 请证明这个结论.

【答案】(1) 甲、乙同学的结论正确，证明见解析，(2) 证明见解析

【解析】

【分析】本题主要考查了折叠的性质，矩形的性质和判定，正方形的判定和性质，菱形的判定和性质，全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，等腰三角形的三线合一性质，解题的关键是正确作出辅助线并熟练掌握相关的性质定理，

(1) 先证明四边形 $AEFD$ 为矩形，再根据 $AD = AE$ 即可证明四边形 $AEFD$ 为正方形，设 $AG = a$ ，由折

叠性质可知： $GE = AG = \frac{1}{2}AE = a$ ， $EF = AE = 2a$ ，再根据等腰直角三角形的性质分别求出 $AM = MG$ ， AF ，即可得出 $MF = AF - AM$ ，进而可得出结论；

(2) 作 $GR \parallel QS$ 交 SM 于点 R ，利用 HL 证明 $Rt\triangle GHP \cong Rt\triangle GRP$ ，得出 $\angle FPG = \angle MPG$ ，再证明四边形 $GMPF$ 为菱形，得出 $GM = MP$ ，进而证明 $AM = RP$ ，再根据 SAS 证明 $Rt\triangle DAM \cong Rt\triangle GRP$ ，得出 $\angle AMD = \angle RPG$ ，进而证明 $\triangle DAM \sim \triangle FNG$ ，即可得出结论

【详解】解：(1) 甲、乙同学的结论都正确，理由如下：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore \angle DAE = \angle D = 90^\circ$$

由第一步操作根据折叠性质可知： $AD = AE$ ， $DF = EF$ ， $\angle AEF = \angle D = 90^\circ$

$$\therefore \angle DAE = \angle AEF = \angle D = 90^\circ$$

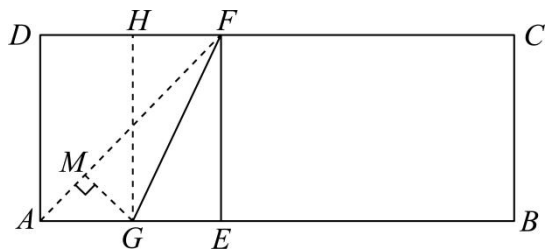
$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 为矩形，

又 $\because AD = AE$

$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 为正方形，

故甲同学的结论正确；

作 $GM \perp AF$ 于点 M ，



$\because$ 四边形 $AEFD$ 为正方形，

$$\therefore \angle FAE = 45^\circ$$

设 $AG = a$ ，

由第二步操作根据折叠性质可知： $GE = AG = \frac{1}{2}AE = a$ ，

$$\therefore EF = AE = 2a$$

在 $Rt\triangle AMG$ 中，

$$\therefore \angle MAG = 45^\circ$$

$$\therefore AM = MG = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

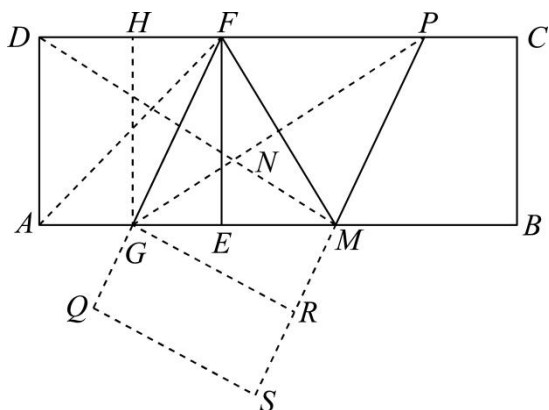
在 $Rt\triangle AEF$ 中， $AF = \sqrt{2}AE = 2\sqrt{2}a$ ，

$$\therefore MF = AF - AM = 2\sqrt{2}a - \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$$

$$\therefore \tan \angle AFG = \frac{MG}{MF} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{3\sqrt{2}}{2}a} = \frac{1}{3}$$

故乙同学的结论正确;

(2) 作 $GR \parallel QS$ 交 SM 于点 R , 如图所示:



$\therefore GP$ 为折痕,

$$\therefore AG = OG, AD = OS, DF = SM, DP = SP, FP = MP, \angle ADF = \angle DAE = \angle O = \angle S = 90^\circ$$

$$\therefore GR \parallel QS$$

$$\therefore \angle SRG = \angle QGR = \angle Q = \angle S = 90^\circ$$

$\therefore$ 四边形 $QSRG$ 为矩形,

$$\therefore SR = QG = AG = DH, \quad GR = QS = AD = HG$$

在 $Rt_{\Delta}GHP$ 和 $Rt_{\Delta}GRP$ 中,

$$\begin{cases} GP = GP \\ HG = GR \end{cases}$$

$$\therefore Rt_{\Delta}GHP \cong Rt_{\Delta}GRP(\text{HL})$$

$$\therefore \angle FPG = \angle MPG$$

$$\text{又} \because FP = MP$$

$$\therefore PG \perp FM, FN = MN$$

由折叠性质可知: $GF = GM$

$$\because PG \perp FM, FN = MN$$

$$\therefore \angle FGP = \angle MGP$$

$$\because FP \parallel GM$$

$$\therefore \angle FPG = \angle GMP$$

$$\therefore \angle FPG = \angle MPG = \angle FGP = \angle MGP$$

$$\therefore FG = FP = PM = GM$$

$\therefore$ 四边形 $GMPF$ 为菱形,

$$\therefore GM = MP$$

$$\because RM = SM - SR = DF - DH = HF = AG$$

$$\therefore AG + GM = RM + MP$$

$$\text{即 } AM = RP$$

在 $Rt\triangle DAM$ 和 $Rt\triangle GRP$ 中,

$$\begin{cases} AD = GR \\ \angle DAM = \angle GRP = 90^\circ \\ AM = RP \end{cases}$$

$$\therefore Rt\triangle DAM \cong Rt\triangle GRP (SAS)$$

$$\therefore \angle AMD = \angle RPG$$

$$\because \angle RPG = \angle FGN$$

$$\therefore \angle FGN = \angle AMD$$

$$\because PG \perp FM$$

$$\therefore \angle FNG = 90^\circ$$

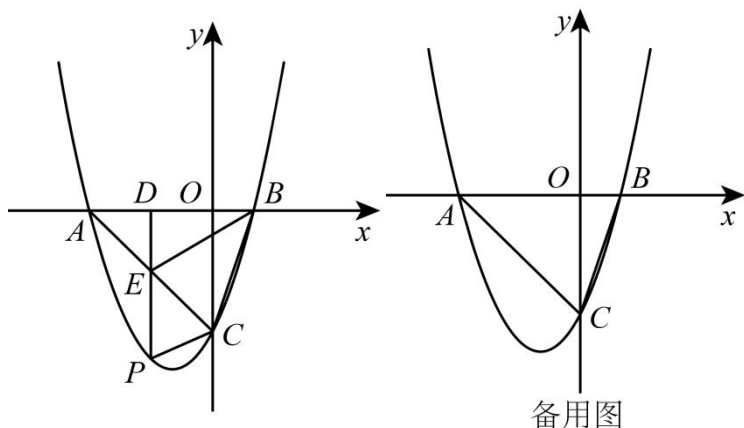
$$\therefore \angle FNG = \angle DAM = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle DAM \sim \triangle FNG$$

$$\therefore \frac{AD}{AM} = \frac{FN}{GN}$$

$$\therefore FN \cdot AM = GN \cdot AD$$

22. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像经过 $(0, -3)$, $(-b, c)$ 两点, 其中 a, b, c 为常数, 且 $ab > 0$.



(1) 求 a, c 的值;

(2) 若该二次函数的最小值是 -4 , 且它的图像与 x 轴交于点 A, B (点 A 在点 B 的左侧), 与 y 轴交于点 C .

①求该二次函数的解析式, 并直接写出点 A, B 的坐标;

②如图, 在 y 轴左侧该二次函数的图像上有一动点 P , 过点 P 作 x 轴的垂线, 垂足为 D , 与直线 AC 交于点 E , 连接 PC, CB, BE . 是否存在点 P , 使 $\frac{S_{\triangle PCE}}{S_{\triangle CBE}} = \frac{3}{8}$? 若存在, 求此时点 P 的横坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $a = 1, c = -3$

(2) ①该二次函数的解析式为: $y = x^2 + 2x - 3$; $A(-3, 0), B(1, 0)$

②存在, P 点横坐标为: $\frac{-3+\sqrt{3}}{2}$ 或 $\frac{-3-\sqrt{3}}{2}$ 或 $\frac{-3-\sqrt{15}}{2}$

【解析】

【分析】 (1) 先求得 $c = -3$, 则可得 $(0, -3)$ 和 $(-b, c)$ 关于对称轴 $x = -\frac{b}{2a}$ 对称, 由此可得 $\frac{0-b}{2} = -\frac{b}{2a}$, 进而可求得 $a = 1$;

(2) ①根据抛物线顶点坐标公式得 $y_{\text{最小值}} = \frac{-12-b^2}{4} = -4$, 由此可求得 $b = 2$, 进而可得抛物线的表达式

为 $y = x^2 + 2x - 3$, 进而可得 $A(-3, 0), B(1, 0)$;

②分两种情况进行讨论: 当点 P 在点 A 右侧时, 当点 P 在点 A 左侧时, 分别画出图形, 求出点 P 的坐标即可.

【小问 1 详解】

解: $\because y = ax^2 + bx + c$ 的图像经过 $(0, -3)$,

$$\therefore c = -3,$$

$$\therefore (0, -3) \text{ 和 } (-b, c) \text{ 关于对称轴 } x = -\frac{b}{2a} \text{ 对称,}$$

$$\therefore \frac{0-b}{2} = -\frac{b}{2a},$$

$$\because b \neq 0,$$

$$\therefore a = 1,$$

$$\therefore a = 1, \quad c = -3.$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: ①} \because a = 1, \quad c = -3,$$

$$\therefore y = x^2 + bx - 3,$$

$$\because y_{\text{最小值}} = \frac{-12 - b^2}{4} = -4,$$

$$\therefore \text{解得 } b = \pm 2,$$

$$\because ab > 0, \text{ 且 } a > 0,$$

$$\therefore b > 0,$$

$$\therefore b = 2,$$

$$\therefore \text{该二次函数的解析式为: } y = x^2 + 2x - 3,$$

$$\text{当 } y = 0 \text{ 时, } x^2 + 2x - 3 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = -3, \quad x_2 = 1,$$

$$\therefore A(-3, 0), \quad B(1, 0).$$

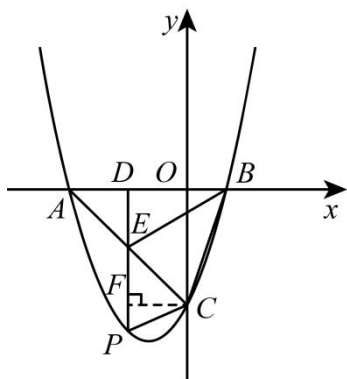
$$\text{②设直线 } AC \text{ 的表达式为: } y = k_1x + b_1,$$

$$\text{则} \begin{cases} -3k_1 + b_1 = 0 \\ b_1 = -3 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k_1 = -1 \\ b_1 = -3 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } AC \text{ 的表达式为: } y = -x - 3,$$

当点 P 在点 A 右侧时, 作 $CF \perp PD$ 于 F , 如图所示:



设 $P(m, m^2 + 2m - 3)$ ($-3 < m < 0$), 则 $E(m, -m - 3)$, $D(m, 0)$,

$$\text{则 } PE = (-m - 3) - (m^2 + 2m - 3) = -m^2 - 3m,$$

$$CF = 0 - m = -m,$$

$$\therefore S_{\triangle PCE} = \frac{1}{2} \cdot PE \cdot CF = \frac{1}{2}(-m^2 - 3m) \cdot (-m) = \frac{1}{2}m(m^2 + 3m),$$

$$\because AB = 1 - (-3) = 4, \quad OC = 3, \quad DE = -(-m - 3) = m + 3,$$

$$\therefore S_{\triangle CBE} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ABE}$$

$$= \frac{1}{2} AB \times OC - \frac{1}{2} \times AB \times DE$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 3 - \frac{1}{2} \times 4 \times (m + 3)$$

$$= -2m,$$

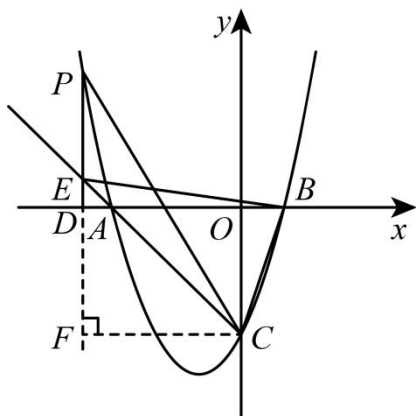
$$\therefore \frac{S_{\triangle PCE}}{S_{\triangle CBE}} = \frac{3}{8},$$

$$\therefore \frac{\frac{1}{2}m(m^2 + 3m)}{-2m} = \frac{3}{8},$$

$$\text{解得: } m_1 = \frac{-3 + \sqrt{3}}{2}, \quad m_2 = \frac{-3 - \sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 横坐标为 } \frac{-3 + \sqrt{3}}{2} \text{ 或 } \frac{-3 - \sqrt{3}}{2};$$

当点 P 在点 A 左侧时, 作 $CF \perp PD$ 于 F , 如图所示:



设 $P(m, m^2 + 2m - 3)$ ($m < -3$), 则 $E(m, -m - 3)$, $D(m, 0)$,

$$\text{则 } PE = (m^2 + 2m - 3) - (-m - 3) = m^2 + 3m,$$

$$CF = 0 - m = -m,$$

$$\therefore S_{\triangle PCE} = \frac{1}{2} \cdot PE \cdot CF = \frac{1}{2} (m^2 + 3m) \cdot (-m) = -\frac{1}{2} m (m^2 + 3m),$$

$$\therefore AB = 1 - (-3) = 4, \quad OC = 3, \quad DE = -m - 3,$$

$$\therefore S_{\triangle CBE} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ABE}$$

$$= \frac{1}{2} AB \times OC + \frac{1}{2} \times AB \times DE$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 3 + \frac{1}{2} \times 4 \times (-m - 3)$$

$$= -2m,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle PCE}}{S_{\triangle CBE}} = \frac{3}{8},$$

$$\therefore \frac{-\frac{1}{2} m (m^2 + 3m)}{-2m} = \frac{3}{8},$$

$$\text{解得: } m_1 = \frac{-3 - \sqrt{15}}{2}, \quad m_2 = \frac{-3 + \sqrt{15}}{2} \text{ (舍去),}$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 横坐标为 } \frac{-3 - \sqrt{15}}{2},$$

$$\text{综上所述, } P \text{ 点横坐标为: } \frac{-3 + \sqrt{3}}{2} \text{ 或 } \frac{-3 - \sqrt{3}}{2} \text{ 或 } \frac{-3 - \sqrt{15}}{2}.$$

【点睛】 本题考查了二次函数与一次函数综合，二次函数与几何综合，利用待定系数法求二次函数和一次函数的表达式. 熟练掌握“三角形面积 = $\frac{1}{2} \times$ 水平宽 $\times$ 铅锤高”是解题的关键.