

泰安市 2024 年年初中学业水平考试

数学试题

一、选择题（本大题共 12 小题，在每小题给出的四个选项中，只有一个是正确的，请把正确选项选出来，每小题选对得 4 分，选错、不选或选出的答案超过一个，均记零分）

1. $-\frac{5}{6}$ 的相反数是（ ）

A. $\frac{6}{5}$

B. $-\frac{6}{5}$

C. $-\frac{5}{6}$

D. $\frac{5}{6}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据只有符号不同的两个数互为相反数进行求解即可.

【详解】解： $-\frac{5}{6}$ 的相反数是 $\frac{5}{6}$.

故选：D.

【点睛】本题考查了求一个数的相反数，熟练掌握相反数的概念以及求解方法是解题的关键.

2. 下列运算正确的是（ ）

A. $2x^2y - 3xy^2 = -x^2y$

B. $4x^8y^2 \div 2x^2y^2 = 2x^4$

C. $(x-y)(-x-y) = x^2 - y^2$

D. $(x^2y^3)^2 = x^4y^6$

【答案】D

【解析】

【分析】根据合并同类项法则、单项式除以单项式法则、平方差公式、积的乘方进行判断即可求解.

【详解】解：A、 $2x^2y$ 与 $3xy^2$ 不是同类项，不能合并同类项，故不符合题意；

B、 $4x^8y^2 \div 2x^2y^2 = 2x^6$ ，故不符合题意；

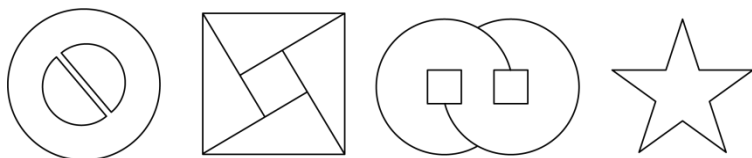
C、 $(x-y)(-x-y) = -(x-y)(x+y) = -(x^2 - y^2) = y^2 - x^2$ ，故不符合题意；

D、 $(x^2y^3)^2 = x^4y^6$ ，故符合题意；

故选：D.

【点睛】本题考查合并同类项法则、单项式除以单项式法则、平方差公式、积的乘方，熟练掌握相关运算法则是解题的关键.

3. 下面图形中，中心对称图形的个数有（ ）



- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了中心对称图形的概念，熟练掌握概念是解题的关键。根据中心对称图形的概念对各图形分析判断即可求解。

【详解】解：第一个是中心对称图形，符合题意；

第二个是是中心对称图形，符合题意；

第三个是是中心对称图形，符合题意；

第四个不是中心对称图形，不符合题意；

所以符合题意的有 3 个。

故选：C。

4. 据泰山景区 2024 年 1 月 4 日消息，2023 年泰山景区累计接待进山游客超 860 万人次，同比增长 301.36%，刷新了历年游客量最高记录，数据 860 万用科学记数法表示为（ ）

- A. 8.60×10^7 B. 86.0×10^5 C. 0.860×10^7 D. 8.60×10^6

【答案】D

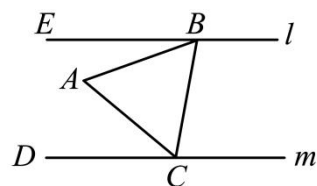
【解析】

【分析】本题主要考查科学记数法的表示方法，科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数，正确确定 a 的值以及 n 的值是解题的关键。直接运用科学记数法的定义解答即可。

【详解】解：860 万 $= 8600000 = 8.6 \times 10^6$ 。

故选：D。

5. 如图，直线 $l \parallel m$ ，等边三角形 ABC 的两个顶点 B, C 分别落在直线 l, m 上，若 $\angle ABE = 21^\circ$ ，则 $\angle ACD$ 的度数是（ ）



- A. 45° B. 39° C. 29° D. 21°

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查平行线的性质、等边三角形的性质，根据平行线的性质可得 $\angle EBC + \angle DCB = 180^\circ$ ，从而可得 $\angle EBA + \angle ABC + \angle ACB + \angle ACD = 180^\circ$ ，再根据等边三角形的性质可得 $\angle ABC = \angle ACB = 60^\circ$ ，即可求解。

【详解】解： $\because l \parallel m$ ，

$$\therefore \angle EBC + \angle DCB = 180^\circ,$$

$$\text{即 } \angle EBA + \angle ABC + \angle ACB + \angle ACD = 180^\circ,$$

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 60^\circ,$$

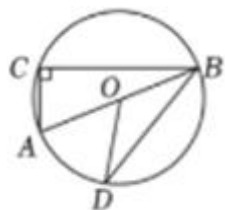
$$\text{又 } \because \angle ABE = 21^\circ,$$

$$\therefore 21^\circ + 60^\circ + 60^\circ + \angle ACD = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = 39^\circ,$$

故选：B.

6. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， C, D 是 $\odot O$ 上两点， BA 平分 $\angle CBD$ ，若 $\angle AOD = 50^\circ$ ，则 $\angle A$ 的度数为（ ）



A. 65°

B. 55°

C. 50°

D. 75°

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查圆周角定理、角平分线的定义、三角形的内角和定理，先根据角平分线的定义得到根据圆周角定理得到 $\angle ABC = \angle ABD$ ，再根据圆周角定理得到 $\angle ACB = 90^\circ$ ，

$\angle ABC = \angle ABD = \frac{1}{2} \angle AOD = 25^\circ$ ，然后利用三角形的内角和定理求解即可。

【详解】解： $\because BA$ 平分 $\angle CBD$ ，

$$\therefore \angle ABC = \angle ABD,$$

$$\because AB \text{ 是 } \odot O \text{ 的直径, } \angle AOD = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ, \angle ABD = \frac{1}{2} \angle AOD = 25^\circ, \text{ 则 } \angle ABC = 25^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 180^\circ - \angle C - \angle ABC = 180^\circ - 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ,$$

故选：A.

7. 关于 x 的一元二次方程 $2x^2 - 3x + k = 0$ 有实数根，则实数 k 的取值范围是 ()

A. $k < \frac{9}{8}$

B. $k \leq \frac{9}{8}$

C. $k \geq \frac{9}{8}$

D. $k < -\frac{9}{8}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了判别式与一元二次方程根的情况，熟知一元二次方程有实数根的条件是解题的关键.

根据一元二次方程有实数根的条件是 $\Delta \geq 0$ ，据此列不等式求解即可.

【详解】解：∵关于 x 的一元二次方程 $2x^2 - 3x + k = 0$ 有实数根，

$$\therefore \Delta = (-3)^2 - 4 \times 2k \geq 0, \text{ 解得 } k \leq \frac{9}{8}.$$

故选 B.

8. 我国古代《四元玉鉴》中记载“二果问价”问题，其内容如下：九百九十九文钱，甜果苦果买一千， $\dots$ ， $\dots$ ，试问甜苦果几个，又问各该几个钱？若设买甜果 x 个，买苦果 y 个，列出符合题意的二元一次方程组：

$$\begin{cases} x + y = 1000 \\ \frac{11}{9}x + \frac{4}{7}y = 999 \end{cases}.$$

根据已有信息，题中用“ $\dots$ ， $\dots$ ”表示的缺失的条件应为 ()

A. 甜果九个十一文，苦果七个四文钱

B. 甜果七个四文钱，苦果九个十一文

C. 甜果十一个九文，苦果四个七文钱

D. 甜果四个七文钱，苦果十一个九文

【答案】A

【解析】

【分析】根据 $\begin{cases} x + y = 1000 \\ \frac{11}{9}x + \frac{4}{7}y = 999 \end{cases}$ 可得甜果苦果买一千，甜果九个十一文，苦果七个四文钱，

【详解】解：根据 $\begin{cases} x + y = 1000 \\ \frac{11}{9}x + \frac{4}{7}y = 999 \end{cases}$ ，可得甜果九个十一文，苦果七个四文钱，

故选 A

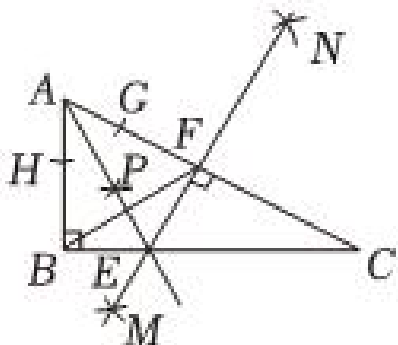
【点睛】本题考查由实际问题抽象出二元一次方程组，解答本题的关键是明确题意，根据方程组找出等量关系.

9. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ，分别以顶点 A ， C 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AC$ 的长为半径画弧，两弧分别相交于点 M 和点 N ，作直线 MN 分别与 BC ， AC 交于点 E 和点 F ；以点 A 为圆心，任意长为半径画

弧，分别交 AB ， AC 于点 H 和点 G ，再分别以点 H ，点 G 为圆心，大于 $\frac{1}{2}HG$ 的长为半径画弧，两弧交于点 P ，作射线 AP ，若射线 AP 恰好经过点 E ，则下列四个结论：

- ① $\angle C = 30^\circ$ ；② AP 垂直平分线段 BF ；③ $CE = 2BE$ ；④ $S_{\triangle BEF} = \frac{1}{6}S_{\triangle ABC}$ 。

其中，正确结论的个数有（ ）



- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查作图-复杂作图、角平分线的性质、线段的垂直平分线的性质等知识，读懂图象信息，灵活运用所学知识解决问题是解题的关键。

由作图可知 MN 垂直平分线段 AC 、 AE 平分 $\angle BAC$ ，进而证明 $\angle C = \angle EAC = \angle BAE = 30^\circ$ 可判定①；再说明 $AB = AF$ 可得 AP 垂直平分线段 BF 可判定②；根据直角三角形的性质可得 $AC = 2AB$ ， $AE = 2BE$ 可判定③，根据三角形的面积公式即可判定④。

【详解】解：由作图可知 MN 垂直平分线段 AC ，

$$\therefore EA = EC,$$

$$\therefore \angle EAC = \angle C,$$

由作图可知 AE 平分 $\angle BAC$ ，

$$\therefore \angle BAE = \angle CAE,$$

$$\because \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle C = \angle CAE = \angle BAE = 30^\circ, \text{ 故①正确,}$$

$$\therefore AC = 2AB,$$

$$\because AF = FC,$$

$$\therefore AB = AF,$$

$$\therefore AP \text{ 垂直平分线段 } BF, \text{ 故②正确,}$$

$$\because AE = 2BE, EA = EC,$$

$$\therefore EC = 2BE, \text{ 故③正确,}$$

$$\therefore S_{\triangle BEF} = \frac{1}{3} S_{\triangle BCF},$$

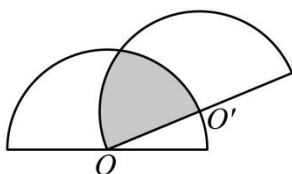
$$\because AF = FC,$$

$$\therefore S_{\triangle BFC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore S_{\triangle BEF} = \frac{1}{6} S_{\triangle ABC}, \text{ 故④正确.}$$

故选：D.

10. 两个半径相等的半圆按如图方式放置，半圆 O' 的一个直径端点与半圆 O 的圆心重合，若半圆的半径为 2，则阴影部分的面积是（ ）



A. $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$

B. $\frac{4}{3}\pi$

C. $\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$

D. $\frac{4}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$

【答案】A

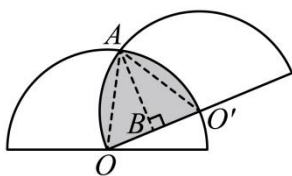
【解析】

【分析】本题主要考查了扇形的面积公式的运用、三角形的面积公式的运用等知识点，熟练掌握扇形的面积公式是关键.

如图：连接 OA, AO' ，作 $AB \perp OO'$ 于点 B ，得三角形 AOO' 是等边三角形，求出

$$AB = \sqrt{3}, S_{\text{弓形}AO'} = S_{\text{扇形}AOO'} - S_{\triangle AOO'} = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}, \text{ 再根据 } S_{\text{阴影}} = S_{\text{弓形}AO'} + S_{\text{扇形}AO'O}, \text{ 即可解答.}$$

【详解】解：如图：连接 OA, AO' ，作 $AB \perp OO'$ 于点 B ，



$$\because OA = OO' = AO' = 2,$$

$\therefore$ 三角形 AOO' 是等边三角形，

$$\therefore \angle AOO' = 60^\circ, OB = \frac{1}{2} OO' = 1,$$

$$\therefore AB = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

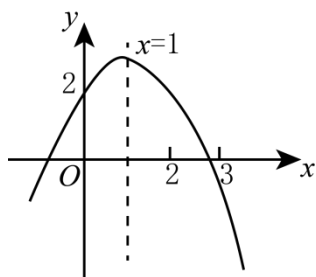
$$\therefore S_{\text{弓形}AO'} = S_{\text{扇形}AOO'} - S_{\triangle AOO'} = \frac{60\pi \times 2^2}{360} - 2 \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{弓形}AO'} + S_{\text{扇形}AO'O} = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

故选：A.

11. 如图所示是二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的部分图象，该函数图象的对称轴是直线 $x = 1$ ，图象与 y 轴交点的纵坐标是 2，则下列结论：① $2a + b = 0$ ；② 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 一定有一个根在 -2 和 -1 之间；

③ 方程 $ax^2 + bx + c - \frac{3}{2} = 0$ 一定有两个不相等的实数根；④ $b - a < 2$. 其中，正确结论的个数有 ()



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】B

【解析】

【分析】 本题主要考查的是图象法求一元二次方程的近似值、抛物线与 x 轴的交点、二次函数图象与系数的关系、二次函数与方程的关系等知识点，掌握二次函数的性质、二次函数图象与系数的关系是解题的关键.

根据抛物线与坐标轴的交点情况、二次函数与方程的关系、二次函数的性质逐个判断即可.

【详解】解： $\because$ 抛物线的对称轴为直线 $x = 1$,

$$\therefore -\frac{b}{2a} = 1,$$

$$\therefore b = -2a,$$

$$\therefore 2a + b = 0, \text{ 故①正确;}$$

$\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的对称轴为直线 $x = 1$, 与 x 轴的一个交点在 2 、 3 之间,

$\therefore$ 与 x 轴的另一个交点在 -1 、 0 之间,

$\therefore$ 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 一定有一个根在 -1 和 0 之间, 故②错误;

$\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与直线 $y = \frac{3}{2}$ 有两个交点,

$\therefore$ 方程 $ax^2 + bx + c - \frac{3}{2} = 0$ 一定有两个不相等的实数根, 故③正确;

$\therefore$ 抛物线与 x 轴的另一个交点在 $-1, 0$ 之间,

$$\therefore a - b + c < 0,$$

$\therefore$ 图象与 y 轴交点的纵坐标是 2,

$$\therefore c = 2,$$

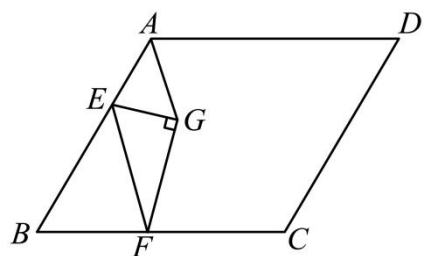
$$\therefore a - b + 2 < 0,$$

$$\therefore b - a > 2. \text{ 故④错误.}$$

综上, ①③正确, 共 2 个.

故选: B.

12. 如图, 菱形 $ABCD$ 中, $\angle B = 60^\circ$, 点 E 是 AB 边上的点, $AE = 4$, $BE = 8$, 点 F 是 BC 上的一点, $\triangle EGF$ 是以点 G 为直角顶点, $\angle EFG$ 为 30° 角的直角三角形, 连结 AG . 当点 F 在直线 BC 上运动时, 线段 AG 的最小值是 ()



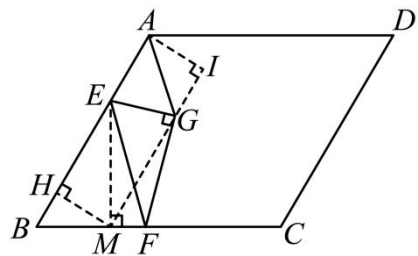
- A. 2 B. $4\sqrt{3} - 2$ C. $2\sqrt{3}$ D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】如图: 过 E 作 $EM \perp BC$ 于点 M , 作 $MH \perp AB$ 于点 H , 作 $AI \perp GM$ 于点 I , 则点 E, M, F, G 四点共圆, 从而得到 $AI = MH$, 因为 $AG \geq GF$, 所以求出 MH 的值即可解答.

【详解】解: 如图, 过 E 作 $EM \perp BC$ 于点 M , 作 $MH \perp AB$ 于点 H , 作 $AI \perp GM$ 于点 I ,



$$\therefore \angle EMF + \angle EGF = 180^\circ,$$

$\therefore$ 点 E, M, F, G 四点共圆,

$$\therefore \angle EMG = \angle EFG = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BEM = 30^\circ = \angle EMG,$$

$$\therefore MG \parallel AB,$$

$\therefore$ 四边形 $MHAI$ 是矩形,

$$\therefore MH = AI,$$

$$\therefore BE = 8,$$

$$\therefore EM = BE \cdot \cos 30^\circ = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore MH = \frac{1}{2}EM = 2\sqrt{3} = AI,$$

$$\therefore AG \geq AI = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore AG \text{ 最小值是 } 2\sqrt{3}.$$

故选：C.

【点睛】本题主要考查了菱形的性质、解直角三角形、垂线段最短、圆内接四边形对角互补等知识点，熟练掌握相关知识点和添加合适的辅助线是解题关键.

二、填空题（本大题共 6 小题，满分 24 分．只要求填写最后结果，每小题填对得 4 分）

13. 单项式 $-3ab^2$ 的次数是_____.

【答案】 3

【解析】

【分析】根据单项式次数的定义进行解答即可.

【详解】解：单项式 $-3ab^2$ 中， a 的指数是 1， b 的指数是 2，

$\therefore$ 此单项式的次数为： $1+2=3$.

故答案为：3.

【点睛】本题考查单项式的次数，一个单项式中所有字母的指数的和叫做单项式的次数．理解和掌握单项式次数的定义是解题的关键.

14. 某学校在 4 月 23 日世界读书日举行“书香校园，全员阅读”活动．小明和小颖去学校图书室借阅书籍，小明准备从《西游记》、《骆驼祥子》、《水浒传》中随机选择一本，小颖准备从《西游记》、《骆驼祥子》、《朝花夕拾》中随机选择一本，小明和小颖恰好选中书名相同的书的概率是_____.

【答案】 $\frac{2}{9}$

【解析】

【分析】本题主要考查列表法与树状图法、概率公式等知识，熟练掌握列表法与树状图法以及概率公式是解答本题的关键.

先列表可得出所有等可能的结果数以及小明和小颖恰好选中书名相同的书的结果数，再利用概率公式计算即可.

【详解】解：将《西游记》、《骆驼祥子》、《水浒传》、《朝花夕拾》分别记为 A , B , C , D ,

列表如下：

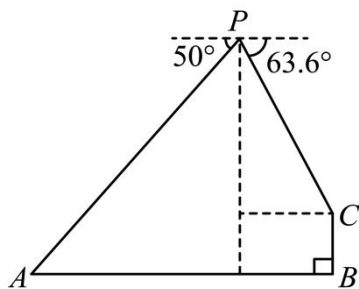
	A	B	D
A	(A, A)	(A, B)	(A, D)
B	(B, A)	(B, B)	(B, D)
C	(C, A)	(C, B)	(C, D)

共有 9 种等可能的结果，其中小明和小颖恰好选中书名相同的书的结果有 2 种，

$\therefore$ 小明和小颖恰好选中书名相同的书的概率为 $\frac{2}{9}$.

故答案为： $\frac{2}{9}$.

15. 在综合实践课上，数学兴趣小组用所学数学知识测量大汶河某河段的宽度，他们在河岸一侧的瞭望台上放飞一只无人机，如图，无人机在河上方距水面高 60 米的点 P 处测得瞭望台正对岸 A 处的俯角为 50° ，测得瞭望台顶端 C 处的俯角为 63.6° ，已知瞭望台 BC 高 12 米（图中点 A , B , C , P 在同一平面内），那么大汶河此河段的宽 AB 为_____米.（参考数据： $\sin 40^\circ \approx \frac{3}{5}$, $\sin 63.6^\circ \approx \frac{9}{10}$, $\tan 50^\circ \approx \frac{6}{5}$, $\tan 63.6^\circ \approx 2$ ）



【答案】 74

【解析】

【分析】 本题主要考查解直角三角形的应用—仰角、俯角问题等知识点，熟练掌握解直角三角形是解题关键.

根据题意可得 $\angle NPC = \angle PCF = 63.6^\circ$, $\angle MPA = \angle BAP = 50^\circ$, $BC = EF = 12\text{m}$, $PE = 60\text{m}$, 则

$PF = PE - EF = 48\text{m}$, 再通过解直角三角形求得 AE 和 BE , 最后根据线段的和差即可解答.

【详解】解：由题知 $\angle NPC = \angle PCF = 63.6^\circ$, $\angle MPA = \angle BAP = 50^\circ$, $BC = EF = 12\text{m}$, $PE = 60\text{m}$,

$$\therefore PF = PE - EF = 48\text{m},$$

$$\text{在 Rt}\triangle PFC, \tan 63.6^\circ = \frac{PF}{CF} = 2,$$

$$\therefore CF = 24\text{m},$$

$$\therefore BE = 24\text{m},$$

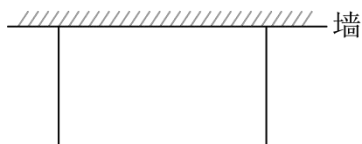
$$\text{在 Rt}\triangle APF \text{ 中}, \tan 50^\circ = \frac{PF}{AE} = \frac{6}{5},$$

$$\therefore AE = 50\text{m},$$

$$\therefore AB = AE + BE = 74\text{m}.$$

故答案为：74.

16. 如图，小明的父亲想用长为 60 米的栅栏，再借助房屋的外墙围成一个矩形的菜园，已知房屋外墙长 40 米，则可围成的菜园的最大面积是_____平方米.



【答案】450

【解析】

【分析】本题主要考查了二次函数的应用，熟练掌握并能灵活运用二次函数的性质是解题的关键.

设垂直于墙的边长为 x 米，则平行于墙的边长为 $(60 - 2x)$ 米，又墙长为 40 米，从而可得 $0 < 60 - 2x \leq 40$,

故 $10 \leq x < 30$ ，又菜园的面积 $= x(60 - 2x) = -2x^2 + 60x = -2(x - 15)^2 + 450$ ，进而结合二次函数的性质即可解答.

【详解】解：由题意，设垂直于墙的边长为 x 米，则平行于墙的边长为 $(60 - 2x)$ 米，

又墙长为 40 米，

$$\therefore 0 < 60 - 2x \leq 40.$$

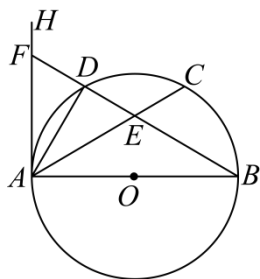
$$\therefore 10 \leq x < 30.$$

$$\text{菜园的面积} = x(60 - 2x) = -2x^2 + 60x = -2(x - 15)^2 + 450,$$

$\therefore$ 当 $x = 15$ 时，可围成的菜园的最大面积是 450，即垂直于墙的边长为 15 米时，可围成的菜园的最大面积是 450 平方米.

故答案为：450.

17. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, AH 是 $\odot O$ 的切线, 点 C 为 $\odot O$ 上任意一点, 点 D 为 $\widehat{AC}$ 的中点, 连接 BD 交 AC 于点 E , 延长 BD 与 AH 相交于点 F , 若 $DF=1$, $\tan B = \frac{1}{2}$, 则 AE 的长为_____.



【答案】 $\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题主要考查相似三角形的判定和性质、切线的性质、圆周角定理等知识, 熟练掌握相关知识是解题关键.

先证 $\angle DAF = \angle ABD$ 可得 $\triangle DAF \sim \triangle DBA$ 从而得到 $\frac{DF}{AD} = \frac{AD}{BD} = \tan B = \frac{1}{2}$, 求得 $AD = 2$, 再运用勾股定理可得 $AF = \sqrt{5}$, 再根据圆周角定理以及角的和差可得 $\angle AED = \angle AFD$, 最后根据等角对等边即可解答.

【详解】 解: $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ,$$

$\because AH$ 是 $\odot O$ 的切线,

$$\therefore \angle BAF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAF = \angle ABD = 90^\circ - \angle DAB,$$

$$\therefore \triangle DAF \sim \triangle DBA,$$

$$\therefore \frac{DF}{AD} = \frac{AD}{BD} = \tan B = \frac{1}{2},$$

$$\because DF = 1,$$

$$\therefore AD = 2,$$

$$\therefore AF = \sqrt{5},$$

$\because$ 点 D 为 $\widehat{AC}$ 的中点,

$$\therefore \widehat{AD} = \widehat{CD},$$

$$\therefore \angle ABD = \angle DAC = \angle DAF,$$

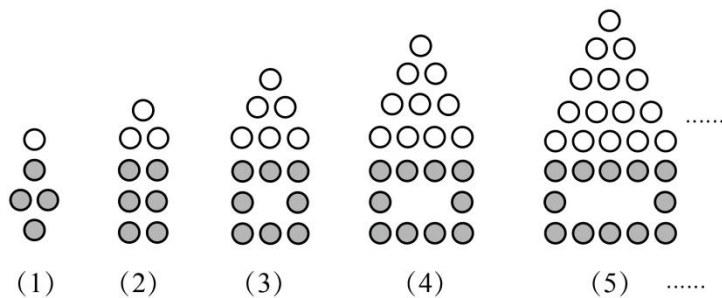
$$\therefore \angle ADE = \angle ADF = 90^\circ,$$

$$\therefore 90^\circ - \angle DAE = 90^\circ - \angle DAF, \text{ 即 } \angle AED = \angle AFD,$$

$$\therefore AE = AF = \sqrt{5}.$$

故答案为: $\sqrt{5}$.

18. 如图所示, 是用图形“○”和“●”按一定规律摆成的“小屋子”. 按照此规律继续摆下去, 第_____个“小屋子”中图形“○”个数是图形“●”个数的3倍.



【答案】12

【解析】

【分析】本题主要考查了图形变化的规律、一元二次方程的应用等知识点, 能根据所给图形发现“○”和“●”的个数变化规律是解题的关键.

根据所给图形, 依次求出“○”和“●”的个数, 发现规律, 再利用规律列出一元二次方程求解即可.

【详解】解: 由所给图形可知,

第1个“小屋子”中图形“○”的个数为: $1=1$, “●”的个数为: $4=1 \times 2 + 2$;

第2个“小屋子”中图形“○”的个数为: $3=1+2$, “●”的个数为: $6=2 \times 2 + 2$;

第3个“小屋子”中图形“○”的个数为: $6=1+2+3$, “●”的个数为: $8=3 \times 2 + 2$;

第4个“小屋子”中图形“○”的个数为: $10=1+2+3+4$, “●”的个数为: $10=4 \times 2 + 2$;

...

所以第 n 个“小屋子”中图形“○”的个数为: $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, “●”的个数为: $2n+2$;

由题知 $\frac{n(n+1)}{2} = 3(2n+2)$, 解得 $n_1 = -1$, $n_2 = 12$,

又 n 为正整数, 则 $n=12$, 即第12个“小屋子”中图形“○”个数是图形“●”个数的3倍.

故答案为: 12.

三、解答题 (本大题共7小题, 满分8分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或推演步骤)

19. (1) 计算: $2 \tan 60^\circ + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - |-\sqrt{12}| + \sqrt{(-3)^2}$;

(2) 化简: $\left(x - \frac{2x-1}{x}\right) \div \frac{x^2-1}{x}$.

【答案】 (1) 7; (2) $\frac{x-1}{x+1}$

【解析】

【分析】 本题考查了实数的运算和分式的化简，实数运算涉及特殊角的三角函数，负指数幂，二次根式和绝对值，熟练掌握相关的法则是解题的关键.

(1) 利用特殊角的三角函数，负指数幂，二次根式和绝对值进行实数的运算；

(2) 利用分式的运算法则化简即可.

【详解】 解: (1) $2 \tan 60^\circ + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - |-\sqrt{12}| + \sqrt{(-3)^2}$;

$$= 2\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3} + 3$$

$$= 7;$$

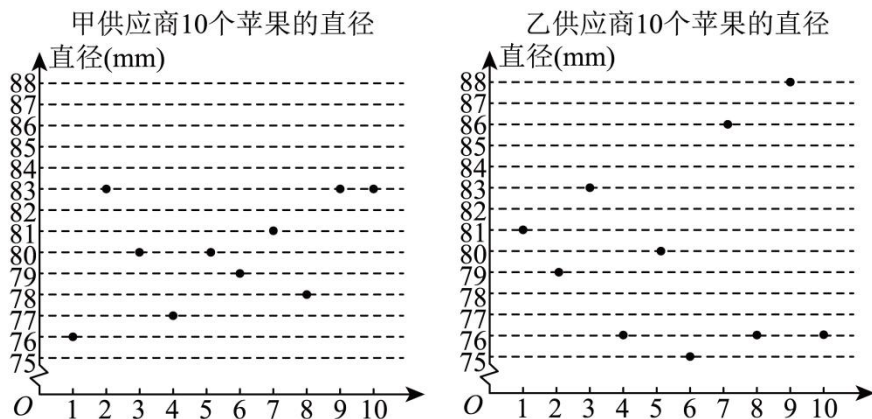
(2) $\left(x - \frac{2x-1}{x}\right) \div \frac{x^2-1}{x}$

$$= \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \cdot \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{(x-1)^2}{x} \cdot \frac{x}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{x-1}{x+1}.$$

20. 某超市打算购进一批苹果，现从甲、乙两个供应商供应的苹果中各随机抽取 10 个，测得它们的直径 (单位: mm)，并制作统计图如下:



根据以上信息，解答下列问题:

(1)

统计量供应商	平均数	中位数	众数
甲	80	80	b
乙	m	a	76

则 $m =$ _____, $a =$ _____, $b =$ _____.

(2) 苹果直径的方差越小, 苹果的大小越整齐, 据此判断, _____ 供应商供应的苹果大小更为整齐. (填“甲”或“乙”)

(3) 超市规定直径 82mm (含 82mm) 以上的苹果为大果, 超市打算购进甲供应商的苹果 2000 个, 其中, 大果约有多少个?

【答案】 (1) 80, 79.5, 83

(2) 甲 (3) 600

【解析】

【分析】 本题主要考查了平均数、中位数、众数、方差以及用样本估计总体等知识点, 掌握相关统计量的计算方法是解答本题的关键.

(1) 分别根据算术平均数, 中位数和众数的定义解答即可;

(2) 根据方差的意义解答即可;

(3) 利用样本估计总体, 即用 2000 乘样本中直径 82mm (含 82mm) 以上所占比例即可.

【小问 1 详解】

解: 由题意得: $m = (75 + 76 \times 3 + 79 + 80 + 81 + 83 + 86 + 88) \div 10 = 80$;

把乙的 10 个苹果的直径从小到大排列, 排在中间的两个数分别是 79, 80, 故中位数 $a = \frac{79 + 80}{2} = 79.5$;

甲 10 个苹果的直径中, 83 出现的次数最多, 故众数 $b = 83$.

故答案为: 80, 79.5, 83.

【小问 2 详解】

解: 甲的方差为: $\frac{1}{10} \times [(76-80)^2 + (77-80)^2 + (78-80)^2 + (79-80)^2 + 2 \times (80-80)^2 + (81-80)^2 + 3 \times (83-80)^2] = 5.8$;

乙的方差为: $\frac{1}{10} \times [(75-80)^2 + 3 \times (76-80)^2 + (79-80)^2 + (80-80)^2 + (81-80)^2 + (83-80)^2 + (86-80)^2 + (88-80)^2] = 18.4$,

因为 $5.8 < 18.4$,

所以甲供应商供应的苹果大小更为整齐.

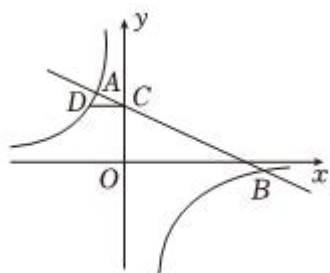
故答案为：甲.

【小问 3 详解】

解： $2000 \times \frac{3}{10} = 600$ (个).

答：大果约有 600 个.

21. 直线 $y_1 = kx + b$ ($k \neq 0$) 与反比例函数 $y_2 = -\frac{8}{x}$ 的图象相交于点 $A(-2, m)$, $B(n, -1)$, 与 y 轴交于点 C .



- (1) 求直线 y_1 的表达式;
- (2) 若 $y_1 > y_2$, 请直接写出满足条件的 x 的取值范围;
- (3) 过 C 点作 x 轴的平行线交反比例函数的图象于点 D , 求 $\triangle ACD$ 的面积.

【答案】(1) $y_1 = -\frac{1}{2}x + 3$

(2) $x < -2$ 或 $0 < x < 8$

(3) $\frac{4}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查反比例函数与一次函数的交点问题、根据函数图像求不等式解集、三角形的面积等知识点, 掌握运用待定系数法求解析式及数形结合思想是解题的关键.

(1) 分别将点 $A(-2, m)$ 、点 $B(n, -1)$ 代入 $y_2 = -\frac{8}{x}$, 求出 m 、 n 的值, 再分别代入 $y_1 = kx + b$ 中即可解答;

(2) 根据函数图像确定不等式的解集即可;

(3) 先把 $y = 3$ 代入 $y_2 = -\frac{8}{x}$ 中, 求出点 D 的坐标, 再根据三角形的面积公式计算即可.

【小问 1 详解】

解: 分别将点 $A(-2, m)$ 、点 $B(n, -1)$ 代入 $y_2 = -\frac{8}{x}$ 中, 可得: $-2m = -8$, $-n = -8$, 解得: $m = 4$, $n = 8$,

$\therefore A$ 点坐标为 $(-2, 4)$, B 点坐标为 $(8, -1)$,

把 A 点坐标 $(-2, 4)$, B 点坐标 $(8, -1)$ 分别代入 $y_1 = kx + b$, 可得 $\begin{cases} -2k + b = 4 \\ 8k + b = -1 \end{cases}$, 解得:

$$\begin{cases} k = -\frac{1}{2}, \\ b = 3 \end{cases}$$

$\therefore$ 一次函数表达式为 $y_1 = -\frac{1}{2}x + 3$.

【小问 2 详解】

解: $\because$ 直线 $y_1 = kx + b (k \neq 0)$ 与反比例函数 $y_2 = -\frac{8}{x}$ 的图象相交于点 $A(-2, 4)$, $B(8, -1)$

$\therefore$ 由图象可知, 当 $y_1 > y_2$ 时, $x < -2$ 或 $0 < x < 8$.

【小问 3 详解】

解: 把 $y = 3$ 时代入 $y_2 = -\frac{8}{x}$ 中, 得 $x = -\frac{8}{3}$,

$\therefore D$ 点坐标为 $(-\frac{8}{3}, 3)$, 即 $CD = \frac{8}{3}$,

$$\therefore S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times \frac{8}{3} \times (4 - 3) = \frac{4}{3}.$$

22. 随着快递行业的快速发展, 全国各地的农产品有了更广阔的销售空间, 某农产品加工企业有甲、乙两个组共 35 名工人. 甲组每天加工 3000 件农产品, 乙组每天加工 2700 件农产品, 已知乙组每人每天平均加工的农产品数量是甲组每人每天平均加工农产品数量的 1.2 倍, 求甲、乙两组各有多少名工人?

【答案】甲组有 20 名工人, 乙组有 15 名工人

【解析】

【分析】本题考查了分式方程的实际应用, 设甲组有 x 名工人, 则乙组有 $(35 - x)$ 名工人. 根据题意得

$$\frac{2700}{35 - x} = \frac{3000}{x} \times 1.2, \text{ 据此即可求解.}$$

【详解】解: 设甲组有 x 名工人, 则乙组有 $(35 - x)$ 名工人.

根据题意得: $\frac{2700}{35 - x} = \frac{3000}{x} \times 1.2,$

解答: $x = 20,$

经检验, $x = 20$ 是所列方程的解, 且符合题意,

$$\therefore 35 - x = 35 - 20 = 15.$$

答: 甲组有 20 名工人, 乙组有 15 名工人.

23. 综合与实践

为了研究折纸过程蕴含的数学知识，某校九年级数学兴趣小组的同学进行了数学折纸探究活动.

【探究发现】

(1) 同学们对一张矩形纸片进行折叠，如图 1，把矩形纸片 $ABCD$ 翻折，使矩形顶点 B 的对应点 G 恰好落在矩形的一边 CD 上，折痕为 EF ，将纸片展平，连结 BG ， EF 与 BG 相交于点 H 。同学们发现图形中四条线段成比例，即 $\frac{EF}{BG} = \frac{AB}{BC}$ ，请你判断同学们的发现是否正确，并说明理由.

【拓展延伸】

(2) 同学们对老师给出的一张平行四边形纸片进行研究，如图 2， BD 是平行四边形纸片 $ABCD$ 的一条对角线，同学们将该平行四边形纸片翻折，使点 A 的对应点 G ，点 C 的对应点 H 都落在对角线 BD 上，折痕分别是 BE 和 DF ，将纸片展平，连结 EG ， FH ， FG ，同学们探究后发现，若 $FG \parallel CD$ ，那么点 G 恰好是对角线 BD 的一个“黄金分割点”，即 $BG^2 = BD \cdot GD$ 。请你判断同学们的发现是否正确，并说明理由.

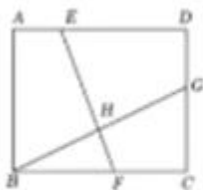


图 1

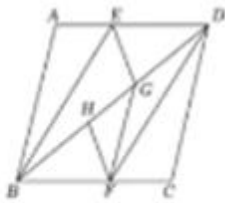


图 2

【答案】 (1) $\frac{EF}{BG} = \frac{AB}{BC}$ 正确，理由见解析；(2) 正确，理由见解析

【解析】

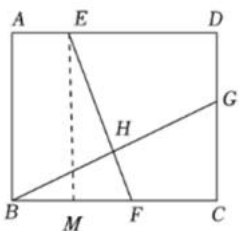
【分析】 本题主要考查了矩形的性质、平行四边形的性质、相似三角形的判定和性质、折叠的性质等知识点，掌握相关知识是解题的关键.

(1) 如图：作 $EM \perp BC$ 于点 M ，再证 $\triangle EMF \sim \triangle BCG$ 可得 $\frac{EF}{BG} = \frac{EM}{BC}$ ，再证明四边形 $ABME$ 是矩形可得 $AB = EM$ 即可证明结论；

(2) 利用平行线分线段比例可得 $\frac{CD}{FG} = \frac{BD}{BG}$ ，再说明 $GD = GF$ ，进而得到 $\frac{CD}{GD} = \frac{BD}{BG}$ ；再由由平行四边形及折叠可得 $AB = BG$ ， $AB = CD$ ，则 $\frac{BG}{CD} = \frac{BD}{BG}$ 即可证明结论.

【详解】 解：(1) $\frac{EF}{BG} = \frac{AB}{BC}$ 正确，理由如下，

作 $EM \perp BC$ 于点 M ，



$$\because EF \perp BG,$$

$$\therefore \angle BHF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FBH + \angle BFH = 90^\circ,$$

$$\because \angle EMF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MEF + \angle BFH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FBH = \angle MEF,$$

$$\text{又} \because \angle EMF = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle EMF \sim \triangle BCG.$$

$$\therefore \frac{EF}{BG} = \frac{EM}{BC}.$$

$$\because ABCD \text{ 是矩形, } EM \perp BC,$$

$$\therefore \text{四边形 } ABME \text{ 是矩形.}$$

$$\therefore AB = EM,$$

$$\therefore \frac{EF}{BG} = \frac{AB}{BC}.$$

(2) 同学们的发现说法正确, 理由如下,

$$\because CD \parallel FG,$$

$$\therefore \frac{CD}{FG} = \frac{BD}{BG}, \quad \angle CDF = \angle DFG,$$

由折叠知 $\angle CDF = \angle BDF$,

$$\therefore \angle DFG = \angle BDF,$$

$$\therefore GD = GF,$$

$$\therefore \frac{CD}{GD} = \frac{BD}{BG},$$

由平行四边形及折叠知 $AB = BG$, $AB = CD$,

$$\therefore \frac{BG}{CD} = \frac{BD}{BG},$$

$\therefore BG^2 = BD \cdot GD$, 即点 G 为 BD 的一个黄金分割点.

24. 如图 1, 在等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = CB$, 点 D , E 分别在 AB , CB 上, $DB = EB$, 连接 AE , CD , 取 AE 中点 F , 连接 BF .

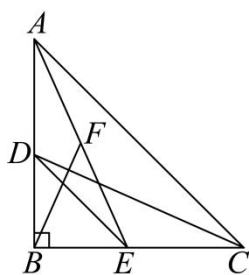


图1

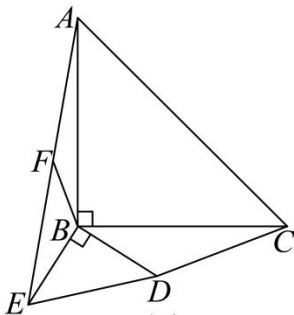


图2

(1) 求证: $CD = 2BF$, $CD \perp BF$;

(2) 将 $\triangle DBE$ 绕点 B 顺时针旋转到图 2 的位置.

①请直接写出 BF 与 CD 的位置关系: _____;

②求证: $CD = 2BF$.

【答案】(1) 见解析 (2) ① $BF \perp CD$; ②见解析

【解析】

【分析】(1) 先证明 $\triangle ABE \cong \triangle CBD$ 得到 $AE = CD$, $\angle FAB = \angle BCD$, 根据直角三角形斜边中线性质得到 $CD = AE = 2BF$, 根据等边对等角证明 $\angle FBA = \angle BCD$, 进而可证明 $BF \perp CD$;

(2) ①延长 BF 到点 G , 使 $FG = BF$, 连结 AG , 延长 BE 到 M , 使 $BE = BM$, 连接 AM 并延长交 CD 于点 N . 同 (1) 证明 $\triangle AGB \cong \triangle BDC$ 得到 $\angle ABG = \angle BCD$, 然后利用三角形的中位线性质得到 $BF \parallel AN$, 则 $\angle ABG = \angle BAN = \angle BCD$, 进而证明 $AN \perp CD$ 即可得到结论;

②延长 BF 到点 G , 使 $FG = BF$, 连接 AG . 先证明 $\triangle AGF \cong \triangle EBF$, 得到 $\angle FAG = \angle FEB$, $AG = BE$, 进而 $AG \parallel BE$, $AG = BD$. 证明 $\triangle AGB \cong \triangle BDC$ 得到 $CD = BG$ 即可得到结论.

【小问 1 详解】

证明: 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CBD$ 中,

$$\because AB = BC, \angle ABE = \angle CBD = 90^\circ, BE = BD,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBD (SAS),$$

$$\therefore AE = CD, \angle FAB = \angle BCD.$$

$\because F$ 是 $\text{Rt}\triangle ABE$ 斜边 AE 的中点,

$$\therefore AE = 2BF,$$

$$\therefore CD = 2BF,$$

$$\because BF = \frac{1}{2} AE = AF,$$

$$\therefore \angle FAB = \angle FBA.$$

$$\therefore \angle FBA = \angle BCD,$$

$$\because \angle FBA + \angle FBC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FBC + \angle BCD = 90^\circ.$$

$$\therefore BF \perp CD;$$

【小问2详解】

解：① $BF \perp CD$ ；

理由如下：延长 BF 到点 G ，使 $FG = BF$ ，连结 AG ，延长 BE 到 M ，使 $BE = BM$ ，连接 AM 并延长交 CD 于点 N 。

证明 $\triangle AGB \cong \triangle BDC$ （具体证法过程跟②一样）。

$$\therefore \angle ABG = \angle BCD,$$

$\because F$ 是 AE 中点， B 是 EM 中点，

$\therefore BF$ 是 $\triangle ABM$ 中位线，

$$\therefore BF \parallel AN,$$

$$\therefore \angle ABG = \angle BAN = \angle BCD,$$

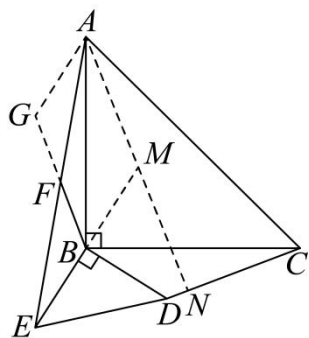
$$\therefore \angle ABC = \angle ANC = 90^\circ,$$

$$\therefore AN \perp CD,$$

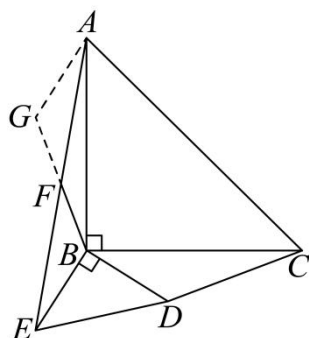
$$\because BF \parallel AN,$$

$$\therefore BF \perp CD.$$

故答案为： $BF \perp CD$ ；



②证明：延长 BF 到点 G ，使 $FG = BF$ ，连接 AG 。



$$\because AF = EF, FG = BF, \angle AFG = \angle EFB,$$

$$\therefore \triangle AGF \cong \triangle EBF (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle FAG = \angle FEB, AG = BE,$$

$$\therefore AG \parallel BE,$$

$$\therefore \angle GAB + \angle ABE = 180^\circ,$$

$$\because \angle ABC = \angle EBD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE + \angle DBC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle GAB = \angle DBC.$$

$$\because BE = BD,$$

$$\therefore AG = BD.$$

在 $\triangle AGB$ 和 $\triangle BDC$ 中,

$$\because AG = BD, \angle GAB = \angle DBC, AB = CB,$$

$$\therefore \triangle AGB \cong \triangle BDC (\text{SAS}),$$

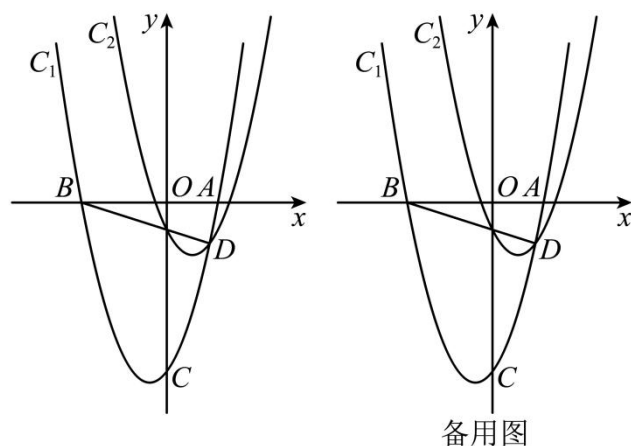
$$\therefore CD = BG,$$

$$\because BG = 2BF,$$

$$\therefore CD = 2BF.$$

【点睛】 本题考查全等三角形的判定与性质、直角三角形斜边中线性质的判定与性质、等腰三角形的判定与性质、三角形的中位线性质的判定与性质等知识，涉及知识点较多，综合性强，熟练掌握相关知识的联系与运用，灵活添加辅助线构造全等三角形是解答的关键。

25. 如图，抛物线 $C_1: y = ax^2 + \frac{4}{3}x - 4$ 的图象经过点 $D(1, -1)$ ，与 x 轴交于点 A ，点 B 。



(1) 求抛物线 C_1 的表达式；

(2) 将抛物线 C_1 向右平移 1 个单位，再向上平移 3 个单位得到抛物线 C_2 ，求抛物线 C_2 的表达式，并判断

点 D 是否在抛物线 C_2 上;

(3) 在 x 轴上方的抛物线 C_2 上, 是否存在点 P , 使 $\triangle PBD$ 是等腰直角三角形. 若存在, 请求出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $y = \frac{5}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - 4$

(2) $C_2: y = \frac{5}{3}\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{19}{15}$, 点 D 在抛物线 C_2 上

(3) 存在, 点 P 的坐标为: $(2, 2)$ 或 $(-1, 3)$

【解析】

【分析】本题主要考查了求二次函数的解析式、二次函数与几何的综合、二次函数图像的平移等知识点, 灵活利用数形结合的思想把代数和几何图形结合起来成为解题的关键.

(1) 将点 D 的坐标代入抛物线表达式 $y = ax^2 + \frac{4}{3}x - 4$, 求得 a 的值即可;

(2) 由题意得: $C_2: y = \frac{5}{3}(x-1)^2 + \frac{4}{3}(x-1) - 4 + 3 = \frac{5}{3}\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{19}{15}$, 当 $x=1$ 时,

$$y = \frac{5}{3}\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{19}{15} = \frac{5}{3}\left(1 - \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{19}{15} = -1, \text{ 即可判断点 } D \text{ 是否在抛物线 } C_2 \text{ 上;}$$

(3) 分 $\angle BAP$ 为直角、 $\angle DBP$ 为直角、 $\angle HPD$ 为直角三种情况, 分别运用全等三角形的判定与性质, 进而确定点 E 的坐标, 进而确定点 P 的坐标.

【小问 1 详解】

解: 将点 D 的坐标代入抛物线表达式 $y = ax^2 + \frac{4}{3}x - 4$ 得: $-1 = a + \frac{4}{3} - 4$, 解得: $a = \frac{5}{3}$,

则抛物线的表达式为: $y = \frac{5}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - 4$.

【小问 2 详解】

解: 由题意得: $C_2: y = \frac{5}{3}(x-1)^2 + \frac{4}{3}(x-1) - 4 + 3 = \frac{5}{3}\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{19}{15}$,

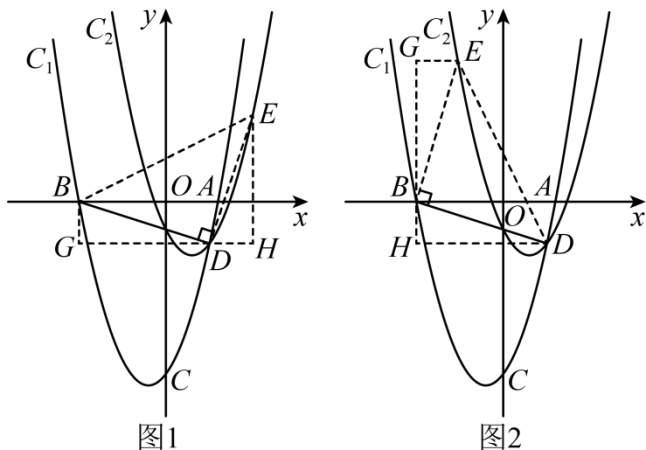
$$\text{当 } x=1 \text{ 时, } y = \frac{5}{3}\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{19}{15} = \frac{5}{3}\left(1 - \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{19}{15} = -1,$$

故点 D 在抛物线 C_2 上.

【小问 3 详解】

解: 存在, 理由如下:

①当 $\angle BAP$ 为直角时, 如图 1, 过点 D 作 $DE \perp BD$ 且 $DE = BE$, 则 $\triangle BDE$ 为等腰直角三角形,



$$\therefore \angle BDG + \angle EDH = 90^\circ, \quad \angle EDH + \angle DEH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BDG = \angle DEH,$$

$$\therefore \angle DGB = \angle EHD = 90^\circ,$$

$$\therefore {}_{\Delta}DGB \cong {}_{\Delta}EHD \text{ (AAS)},$$

$$\therefore DH = BG = 1, \quad EH = GD = 1 + 2 = 3,$$

$\therefore$ 点 $E(2, 2)$,

当 $x=2$ 时, $y=\frac{5}{3}\left(x-\frac{3}{5}\right)^2-\frac{19}{15}=\frac{5}{3}\left(2-\frac{3}{5}\right)^2-\frac{19}{15}=2$, 即点 E 在抛物线 C_2 上,

$\therefore$ 点 P 即为点 $E(2,2)$;

②当 $\angle DBP$ 为直角时, 如图 2,

同理可得: $\triangle BGE \cong_{\Delta} DHB(AAS)$,

$$\therefore DH = 3 = BG, \quad BH = 1 = GE,$$

$\therefore$ 点 $E(-1, 3)$,

当 $x = -1$ 时, $y = \frac{5}{3} \left(x - \frac{3}{5} \right)^2 - \frac{19}{15} = \frac{5}{3} \left(-1 - \frac{3}{5} \right)^2 - \frac{19}{15} = 3,$

$\therefore$ 点 E 在抛物线 C_2 上,

$\therefore$ 点 P 即为点 $E(-1, 3)$;

③当 $\angle HPD$ 为直角时, 如图 3,

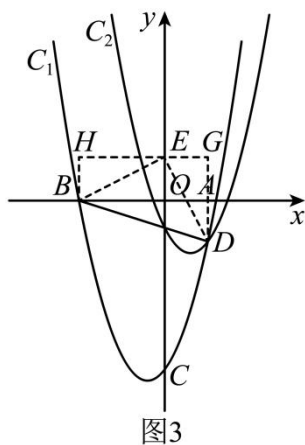


图3

设点 $E(x, y)$,

同理可得: $\triangle EHB \cong \triangle DGE (AAS)$,

$\therefore EH = x + 2 = GD = y + 1$ 且 $BH = y = GE = 1 - x$, 解得: $x = 0$ 且 $y = 1$,

$\therefore$ 点 $E(0, 1)$,

当 $x = 0$ 时, $y = \frac{5}{3} \left(x - \frac{3}{5} \right)^2 - \frac{19}{15} = \frac{5}{3} \left(0 - \frac{3}{5} \right)^2 - \frac{19}{15} \neq 1$,

即点 E 不在抛物线 C_2 上;

综上, 点 P 的坐标为: $(2, 2)$ 或 $(-1, 3)$.