

2024 年枣庄市初中学业水平考试

数学

本试卷共 8 页，满分 120 分，考试用时 120 分钟，考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。
注意事项：

1. 答题前，考生务必用 0.5 毫米黑色签字笔将自己的姓名、准考证号和座号填写在答题卡规定的位置上，并在本页上方空白处写上姓名和准考证号。
2. 选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。答案写在试卷上无效。
3. 非选择题必须用 0.5 毫米黑色签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置，不能写在试卷上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不能使用涂改液、胶带纸、修正带。不按以上要求作答的答案无效。

一、选择题：本题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分。每小题只有一个选项符合题目要求。

1. 下列实数中，平方最大的数是（ ）

- A. 3 B. $\frac{1}{2}$ C. -1 D. -2

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查的是实数的大小比较，乘方运算，先分别计算各数的乘方，再比较大小即可。

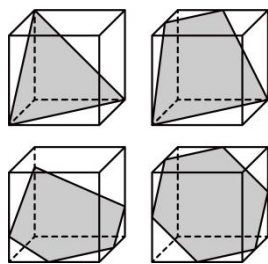
【详解】解：∵ $3^2 = 9$ ， $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ， $(-1)^2 = 1$ ， $(-2)^2 = 4$ ，

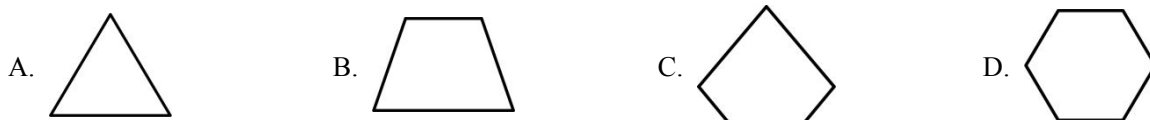
而 $\frac{1}{4} < 1 < 4 < 9$ ，

∴ 平方最大的数是 3；

故选 A

2. 用一个平面截正方体，可以得到以下截面图形，其中既是轴对称图形又是中心对称图形的是（ ）





【答案】D

【解析】

【分析】本题考查的是中心对称图形与轴对称图形的概念，常见的中心对称图形有平行四边形、圆形、正方形、长方形等等．常见的轴对称图形有等腰三角形，矩形，正方形，等腰梯形，圆等等．根据中心对称图形与轴对称图形的概念，进行判断即可．把一个图形绕某一点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形就叫做中心对称图形；如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形叫做轴对称图形．

【详解】解：A．该图形是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项不合题意；
 B．该图形是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项不合题意；
 C．该图形是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项不合题意；
 D．该图形既是轴对称图形，又是中心对称图形，故此选项符合题意．
 故选：D．

3. 2023年山东省扎实落实民生实事，全年新增城乡公益性岗位61.9万个，将61.9万用科学记数法表示应为（ ）

- A. 0.619×10^3 B. 61.9×10^4 C. 6.19×10^5 D. 6.19×10^6

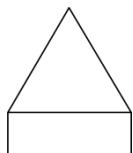
【答案】C

【解析】

【分析】本题考查用科学记数法的表示方法，一般形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ，确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的值与小数点移动位数相同，确定 a 与 n 的值是解题关键．

【详解】解：61.9万 = 619000 = 6.19×10^5 ，
 故选：C．

4. 下列几何体中，主视图是如图的是（ ）



的时间与改造前生产 400 件的时间相同”列出分式方程，解方程即可.

【详解】解：设改造后每天生产的产品件数为 x ，则改造前每天生产的产品件数为 $(x-100)$ ，

根据题意，得： $\frac{600}{x} = \frac{400}{x-100}$ ，

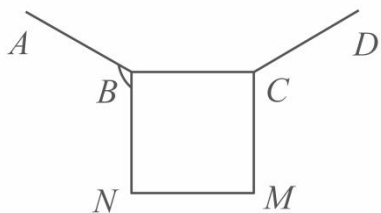
解得： $x = 300$ ，

经检验 $x = 300$ 是分式方程的解，且符合题意，

答：改造后每天生产的产品件数 300.

故选：B.

7. 如图，已知 AB ， BC ， CD 是正 n 边形的三条边，在同一平面内，以 BC 为边在该正 n 边形的外部作正方形 $BCMN$. 若 $\angle ABN = 120^\circ$ ，则 n 的值为 ()



A. 12

B. 10

C. 8

D. 6

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查的是正多边形的性质，正多边形的外角和，先求解正多边形的 1 个内角度数，得到正多边形的 1 个外角度数，再结合外角和可得答案.

【详解】解： $\because$ 正方形 $BCMN$ ，

$\therefore \angle NBC = 90^\circ$ ，

$\because \angle ABN = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle ABC = 360^\circ - 90^\circ - 120^\circ = 150^\circ$ ，

$\therefore$ 正 n 边形的一个外角为 $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$ ，

$\therefore n$ 的值为 $\frac{360^\circ}{30^\circ} = 12$ ；

故选 A

8. 某校课外活动期间开展跳绳、踢毽子、韵律操三项活动，甲、乙两位同学各自任选其中一项参加，则他们选择同一项活动的概率是 ()

A. $\frac{1}{9}$

B. $\frac{2}{9}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{2}{3}$

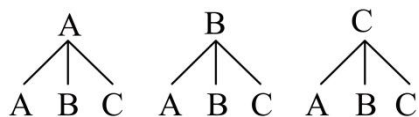
【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了用列表法或画树状图法求概率．首先根据题意画出树状图，然后由树状图求得所有等可能的结果以及甲与乙恰好选择同一项活动的情况，再利用概率公式求解即可求得答案．

【详解】解：设跳绳、踢毽子、韵律操分别为 A 、 B 、 C ，

画树状图如下，

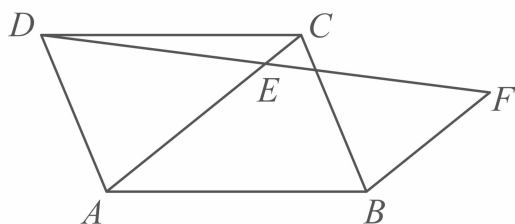


共有 9 种等可能的结果，甲、乙恰好选择同一项活动的有 3 种情况，

故他们选择同一项活动的概率是 $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ ，

故选：C．

9. 如图，点 E 为 $ABCD$ 的对角线 AC 上一点， $AC = 5$ ， $CE = 1$ ，连接 DE 并延长至点 F ，使得 $EF = DE$ ，连接 BF ，则 BF 为（ ）



A. $\frac{5}{2}$

B. 3

C. $\frac{7}{2}$

D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的性质，平行线分线段成比例定理，平行证明相似等知识点，正确作辅助线是解题关键．

作辅助线如图，由平行正相似先证 $\triangle DEC \sim \triangle GAE$ ，再证 $\triangle BGF \sim \triangle AGE$ ，即可求得结果．

【详解】解：延长 DF 和 AB ，交于 G 点，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore DC \parallel AB$ ， $DC = AB$ 即 $DC \parallel AG$ ，

$$\therefore \triangle DEC \sim \triangle GAE$$

$$\therefore \frac{CE}{AE} = \frac{DE}{GE} = \frac{DC}{AG},$$

$$\because AC = 5, CE = 1,$$

$$\therefore AE = AC - CE = 5 - 1 = 4,$$

$$\therefore \frac{CE}{AE} = \frac{DE}{GE} = \frac{DC}{AG} = \frac{1}{4},$$

$$\text{又} \because EF = DE, \frac{DE}{GE} = \frac{DE}{EF + FG} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore \frac{EF}{FG} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{DC}{AG} = \frac{DC}{AB + BG} = \frac{1}{4}, DC = AB,$$

$$\therefore \frac{DC}{BG} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{EF}{FG} = \frac{DC}{BG} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{BG}{AG} = \frac{FG}{EG} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore AE \parallel BF,$$

$$\therefore \triangle BGF \sim \triangle AGE,$$

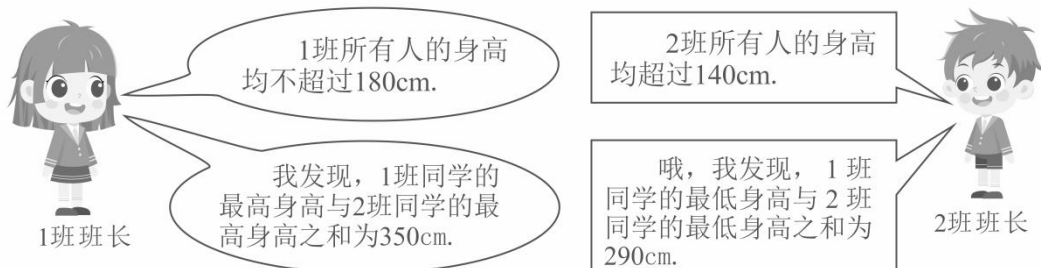
$$\therefore \frac{BF}{AE} = \frac{FG}{EG} = \frac{3}{4}$$

$$\because AE = 4,$$

$$\therefore BF = 3.$$

故选：B.

10. 根据以下对话,



给出下列三个结论:

①1 班学生的最高身高为180 cm ;

②1 班学生的最低身高小于150 cm ;

③2 班学生的最高身高大于或等于170 cm .

上述结论中，所有正确结论的序号是（ ）

A. ①②

B. ①③

C. ②③

D. ①②③

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了二元一次方程、不等式的应用，设1班同学的最高身高为 $x\text{cm}$ ，最低身高为 $y\text{cm}$ ，2班同学的最高身高为 $a\text{cm}$ ，最低身高为 $b\text{cm}$ ，根据1班班长的对话，得 $x \leq 180$ ， $x + a = 350$ ，然后利用不等式性质可求出 $a \geq 170$ ，即可判断①，③；根据2班班长的对话，得 $b > 140$ ， $y + b = 290$ ，然后利用不等式性质可求出 $y < 150$ ，即可判断②.

【详解】解：设1班同学的最高身高为 $x\text{cm}$ ，最低身高为 $y\text{cm}$ ，2班同学的最高身高为 $a\text{cm}$ ，最低身高为 $b\text{cm}$ ，

根据1班班长的对话，得 $x \leq 180$ ， $x + a = 350$ ，

$$\therefore x = 350 - a$$

$$\therefore 350 - a \leq 180,$$

解得 $a \geq 170$ ，

故①，③正确；

根据2班班长的对话，得 $b > 140$ ， $y + b = 290$ ，

$$\therefore b = 290 - y,$$

$$\therefore 290 - y > 140,$$

$$\therefore y < 150,$$

故②正确，

故选：D.

二、填空题：本题共6小题，每小题3分，共18分.

11. 因式分解： $x^2y + 2xy = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $xy(x + 2)$

【解析】

【分析】本题考查了因式分解，直接提取公因式 xy 即可.

【详解】解：原式 $= xy(x + 2)$ ，

故答案为： $xy(x+2)$.

12. 写出满足不等式组 $\begin{cases} x+2 \geq 1 \\ 2x-1 < 5 \end{cases}$ 的一个整数解_____.

【答案】 -1 (答案不唯一)

【解析】

【分析】 本题考查一元一次不等式组的解法，解题的关键是正确掌握解一元一次不等式组的步骤. 先解出一元一次不等式组的解集为 $-1 \leq x < 3$ ，然后即可得出整数解.

【详解】 解： $\begin{cases} x+2 \geq 1 \text{①} \\ 2x-1 < 5 \text{②} \end{cases}$,

由①得： $x \geq -1$,

由②得： $x < 3$,

$\therefore$ 不等式组的解集为： $-1 \leq x < 3$,

$\therefore$ 不等式组的一个整数解为： -1;

故答案为： -1 (答案不唯一) .

13. 若关于 x 的方程 $4x^2 - 2x + m = 0$ 有两个相等的实数根，则 m 的值为_____.

【答案】 $\frac{1}{4}$ ## 0.25

【解析】

【分析】 本题考查了根的判别式，牢记“当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的实数根”是解题的关键.

根据方程的系数结合根的判别式，即可得出 $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 4 \times m = 0$ ，解之即可得出结论.

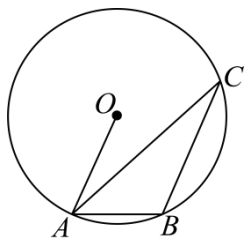
【详解】 解： $\because$ 关于 x 的方程 $4x^2 - 2x + m = 0$ 有两个相等的实数根，

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 4 \times m = 4 - 16m = 0$,

解得： $m = \frac{1}{4}$.

故答案为： $\frac{1}{4}$.

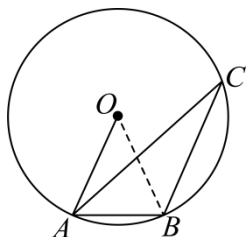
14. 如图， $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形，若 $OA \parallel CB$ ， $\angle ACB = 25^\circ$ ，则 $\angle CAB =$ _____.



【答案】 40° ## 40° 度

【解析】

【分析】 本题考查了圆周角定理，等腰三角形的性质，三角形内角和定理等知识，利用圆周角定理求出 $\angle AOB$ 的度数，利用等边对等角、三角形内角和定理求出 $\angle OAB$ 的度数，利用平行线的性质求出 $\angle OAC$ 的度数，即可求解.

【详解】 解：连接 OB ,

$$\because \angle ACB = 25^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB = 2\angle ACB = 50^\circ,$$

$$\because OA = OB,$$

$$\therefore \angle OAB = \angle OBA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOB) = 65^\circ,$$

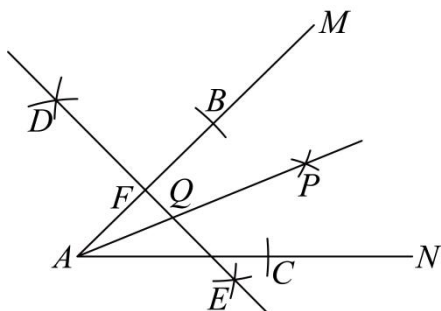
$$\because OA \parallel CB,$$

$$\therefore \angle OAC = \angle ACB = 25^\circ,$$

$$\therefore \angle CAB = \angle OAB - \angle OAC = 40^\circ,$$

故答案为： 40° .

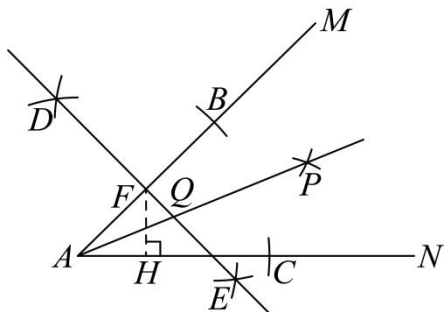
15. 如图，已知 $\angle MAN$ ，以点 A 为圆心，以适当长为半径作弧，分别与 AM 、 AN 相交于点 B 、 C ；分别以 B 、 C 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}BC$ 的长为半径作弧，两弧在 $\angle MAN$ 内部相交于点 P ，作射线 AP 。分别以 A 、 B 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径作弧，两弧相交于点 D 、 E ，作直线 DE 分别与 AB 、 AP 相交于点 F 、 Q 。若 $AB = 4$ ， $\angle PQE = 67.5^\circ$ ，则 F 到 AN 的距离为_____.

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】如图，过 F 作 $FH \perp AC$ 于 H ，证明 $\angle BAP = \angle CAP$ ， $DE \perp AB$ ， $AF = BF = \frac{1}{2}AB = 2$ ，再证明 $\angle FAH = 45^\circ$ ，再结合勾股定理可得答案.

【详解】解：如图，过 F 作 $FH \perp AC$ 于 H ，



由作图可得： $\angle BAP = \angle CAP$ ， $DE \perp AB$ ， $AF = BF = \frac{1}{2}AB = 2$ ，

$$\therefore \angle PQE = 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle AQF = 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle BAP = \angle CAP = 90^\circ - 67.5^\circ = 22.5^\circ,$$

$$\therefore \angle FAH = 45^\circ,$$

$$\therefore AH = FH = \frac{\sqrt{2}}{2}AF = \sqrt{2},$$

$$\therefore F \text{ 到 } AN \text{ 的距离为 } \sqrt{2};$$

故答案为： $\sqrt{2}$

【点睛】本题考查了作图-复杂作图：基本作图，三角形的内角和定理的应用，勾股定理的应用，等腰三角形的判定，解决此类题目的关键是熟悉基本几何图形的性质，结合几何图形的基本性质，逐步操作.

16. 任取一个正整数，若是奇数，就将该数乘 3 再加上 1；若是偶数，就将该数除以 2. 反复进行上述两种运算，经过有限次运算后，必进入循环圈 $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ ，这就是“冰雹猜想”. 在平面直角坐标系 xOy 中，将点 (x, y) 中的 x ， y 分别按照“冰雹猜想”同步进行运算得到新的点的横、纵坐标，其中 x ， y 均为正整数. 例如，点 $(6, 3)$ 经过第 1 次运算得到点 $(3, 10)$ ，经过第 2 次运算得到点 $(10, 5)$ ，以此类推. 则点 $(1, 4)$ 经过 2024 次运算后得到点_____.

【答案】 $(2, 1)$

【解析】

【分析】本题考查了新定义，点的规律，根据新定义依次计算出各点的坐标，然后找出规律，最后应用规律求解即可.

【详解】解：点 $(1,4)$ 经过1次运算后得到点为 $(1 \times 3 + 1, 4 \div 2)$ ，即为 $(4,2)$ ，

经过2次运算后得到点为 $(4 \div 2, 2 \div 1)$ ，即为 $(2,1)$ ，

经过3次运算后得到点为 $(2 \div 2, 1 \times 3 + 1)$ ，即为 $(1,4)$ ，

……，

发现规律：点 $(1,4)$ 经过3次运算后还是 $(1,4)$ ，

$\therefore 2024 \div 3 = 674 \cdots 2$ ，

$\therefore$ 点 $(1,4)$ 经过2024次运算后得到点 $(2,1)$ ，

故答案为： $(2,1)$ 。

三、解答题：本题共7小题，共72分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (1) 计算： $\sqrt{4} + 2^{-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)$ ；

(2) 先化简，再求值： $\left(1 - \frac{1}{a+3}\right) \div \frac{a+2}{a^2-9}$ ，其中 $a=1$ 。

【答案】(1) 3 (2) $a-3$ -2

【解析】

【分析】本题主要考查实数的运算、分式的运算：

(1) 根据求算术平方根和负整数指数幂、有理数的减法的运算法则计算即可；

(2) 先通分，然后求解即可。

【详解】(1) 原式 $= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 原式} &= \left(\frac{a+3}{a+3} - \frac{1}{a+3} \right) \div \frac{a+2}{(a+3)(a-3)} \\ &= \frac{a+2}{a+3} \cdot \frac{(a+3)(a-3)}{a+2} \\ &= a-3 \end{aligned}$$

将 $a=1$ 代入，得

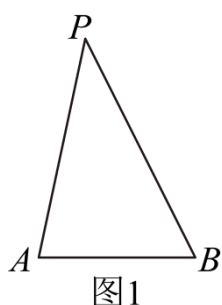
原式 $= 1 - 3 = -2$

18. 【实践课题】测量湖边观测点 A 和湖心岛上鸟类栖息点 P 之间的距离



【实践工具】皮尺、测角仪等测量工具

【实践活动】某班甲小组根据湖岸地形状况，在岸边选取合适的点 B，测量 A，B 两点间的距离以及 $\angle PAB$ 和 $\angle PBA$ ，测量三次取平均值，得到数据： $AB = 60$ 米， $\angle PAB = 79^\circ$ ， $\angle PBA = 64^\circ$ 。画出示意图，如图

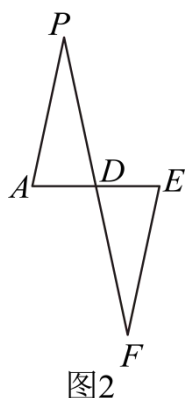


【问题解决】(1) 计算 A，P 两点间的距离.

(参考数据： $\sin 64^\circ \approx 0.90$ ， $\sin 79^\circ \approx 0.98$ ， $\cos 79^\circ \approx 0.19$ ， $\sin 37^\circ \approx 0.60$ ， $\tan 37^\circ \approx 0.75$)

【交流研讨】甲小组回班汇报后，乙小组提出了另一种方案：

如图 2，选择合适的点 D，E，F，使得 A，D，E 在同一条直线上，且 $AD = DE$ ， $\angle DEF = \angle DAP$ ，当 F，D，P 在同一条直线上时，只需测量 EF 即可.



(2) 乙小组的方案用到了_____。(填写正确答案的序号)

- ①解直角三角形 ②三角形全等

【教师评价】甲、乙两小组的方案都很好，对于实际测量，要根据现场地形状况选择可实施的方案.

【答案】(1) A，P 两点间的距离为 89.8 米；(2) ②

【解析】

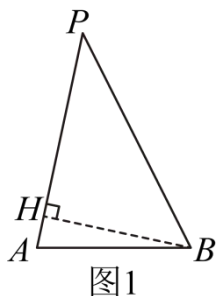
【分析】本题考查的是全等三角形的判定与性质的应用，解直角三角形的应用，灵活应用知识点是解本题

的关键；

(1) 如图，过 B 作 $BH \perp AP$ 于 H ，先求解 $AH = AB \cdot \cos 79^\circ \approx 60 \times 0.19 = 11.4$ ， $BH = AB \cdot \sin 79^\circ \approx 60 \times 0.98 = 58.8$ ，再求解 $\angle APB = 37^\circ$ 及 PH 即可；

(2) 由全等三角形的判定方法可得 $\triangle ADP \cong \triangle EDF$ (ASA)，可得 $AP = EF$ ，从而可得答案.

【详解】解：如图，过 B 作 $BH \perp AP$ 于 H ，



$\therefore AB = 60$ 米， $\angle PAB = 79^\circ$ ， $\sin 79^\circ \approx 0.98$ ， $\cos 79^\circ \approx 0.19$ ，

$\therefore AH = AB \cdot \cos 79^\circ \approx 60 \times 0.19 = 11.4$ ，

$BH = AB \cdot \sin 79^\circ \approx 60 \times 0.98 = 58.8$ ，

$\therefore \angle PAB = 79^\circ$ ， $\angle PBA = 64^\circ$ ，

$\therefore \angle APB = 180^\circ - 79^\circ - 64^\circ = 37^\circ$ ，

$\therefore \tan \angle APB = \tan 37^\circ = \frac{BH}{PH} \approx 0.75$ ，

$\therefore PH \approx \frac{58.8}{0.75} = 78.4$ ，

$\therefore AP = AH + PH = 11.4 + 78.4 = 89.8$ (米)；

即 A ， P 两点间的距离为 89.8 米；

(2) $\because AD = DE$ ， $\angle DEF = \angle DAP$ ，当 F ， D ， P 在同一条直线上时，

$\therefore \angle ADP = \angle EDF$ ，

$\therefore \triangle ADP \cong \triangle EDF$ (ASA)，

$\therefore AP = EF$ ，

$\therefore$ 只需测量 EF 即可得到 AP 长度；

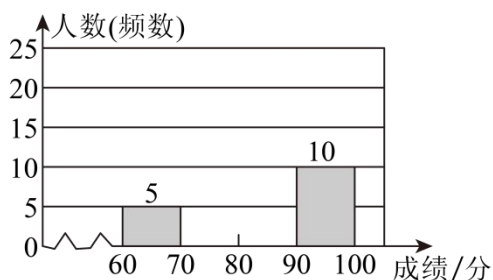
$\therefore$ 乙小组的方案用到了②；

19. 某学校开展了“校园科技节”活动，活动包含模型设计、科技小论文两个项目. 为了解学生的模型设计水平，从全校学生的模型设计成绩中随机抽取部分学生的模型设计成绩 (成绩为百分制，用 x 表示)，并将其分成如下四组： $60 \leq x < 70$ ， $70 \leq x < 80$ ， $80 \leq x < 90$ ， $90 \leq x \leq 100$.

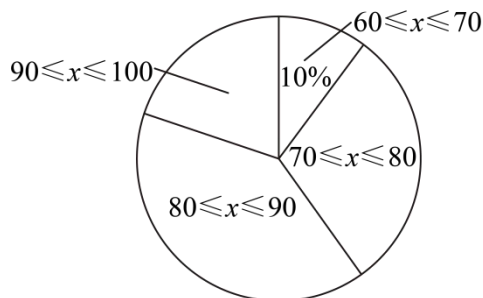
下面给出了部分信息：

$80 \leq x < 90$ 的成绩为：81, 81, 82, 82, 83, 83, 84, 84, 84, 85, 86, 86, 86, 87, 88, 88, 88, 89, 89, 89.

模型设计成绩的频数分布直方图



模型设计成绩的扇形统计图



根据以上信息解决下列问题：

- (1) 请补全频数分布直方图；
- (2) 所抽取学生的模型设计成绩的中位数是_____分；
- (3) 请估计全校 1000 名学生的模型设计成绩不低于 80 分的人数；
- (4) 根据活动要求，学校将模型设计成绩、科技小论文成绩按 3:2 的比例确定这次活动各人的综合成绩。

某班甲、乙两位学生的模型设计成绩与科技小论文成绩（单位：分）如下：

	模型设计	科技小论文
甲的成绩	94	90
乙的成绩	90	95

通过计算，甲、乙哪位学生的综合成绩更高？

【答案】(1) 画图见解析

(2) 83

(3) 600 人

(4) 甲的综合成绩比乙高。

【解析】

【分析】(1) 先求解总人数，再求解 $70 \leq x < 80$ 的人数，再补全图形即可；

(2) 根据中位数的含义确定第 25 个，第 26 个数据的平均数即可得到中位数；

(3) 由总人数乘以 80 分含 80 以上的人数百分比即可得到答案；

(4) 根据加权平均数公式分别计算甲，乙二人成绩，再比较即可

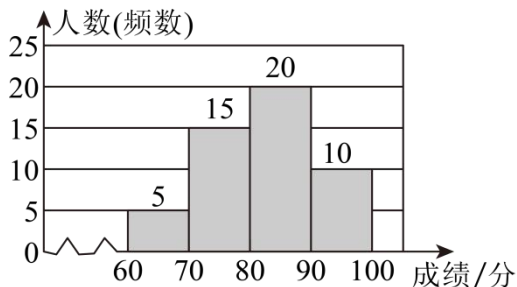
【小问 1 详解】

解：∵ $5 \div 10\% = 50$ ，而 $80 \leq x < 90$ 有 20 人，

∴ $70 \leq x < 80$ 有 $50 - 20 - 5 - 10 = 15$ ，

补全图形如下：

模型设计成绩的频数分布直方图



【小问 2 详解】

解：∵ $5 + 15 = 20$ ，

而 $80 \leq x < 90$ 的成绩为：81, 81, 82, 82, 83, 83, 84, 84, 84, 85, 86, 86, 86, 87, 88, 88, 88, 89, 89, 89.

∴ 50 个成绩按照从小到大排列后，排在第 25 个，第 26 个数据分别是：83, 83；

中位数为： $\frac{1}{2} \times (83 + 83) = 83$ ；

【小问 3 详解】

解：全校 1000 名学生的模型设计成绩不低于 80 分的人数为：

$$1000 \times \frac{20 + 10}{50} = 600 \text{ (人)};$$

【小问 4 详解】

解：甲的成绩为： $94 \times \frac{3}{5} + 90 \times \frac{2}{5} = 92.4$ (分)；

乙的成绩为： $90 \times \frac{3}{5} + 95 \times \frac{2}{5} = 92$ (分)；

∴ 甲的综合成绩比乙高.

【点睛】 本题考查的是频数分布直方图，中位数的含义，利用样本估计总体，加权平均数的含义，掌握基础的统计知识是解本题的感觉.

20. 列表法、表达式法、图像法是三种表示函数的方法，它们从不同角度反映了自变量与函数值之间的对应

关系. 下表是函数 $y = 2x + b$ 与 $y = \frac{k}{x}$ 部分自变量与函数值的对应关系：

x	$-\frac{7}{2}$	a	1
-----	----------------	-----	---

$2x+b$	a	1	_____
$\frac{k}{x}$	_____	_____	7

(1) 求 a 、 b 的值，并补全表格；

(2) 结合表格，当 $y=2x+b$ 的图像在 $y=\frac{k}{x}$ 的图像上方时，直接写出 x 的取值范围.

【答案】(1) $\begin{cases} a=-2 \\ b=5 \end{cases}$ ，补全表格见解析

(2) x 的取值范围为 $-\frac{7}{2} < x < 0$ 或 $x > 1$ ；

【解析】

【分析】 本题考查的是一次函数与反比例函数的综合，利用图像法写自变量的取值范围；

(1) 根据表格信息建立方程组求解 a, b 的值，再求解 k 的值，再补全表格即可；

(2) 由表格信息可得两个函数的交点坐标，再结合函数图像可得答案.

【小问 1 详解】

解：当 $x = -\frac{7}{2}$ 时， $2x+b=a$ ，即 $-7+b=a$ ，

当 $x=a$ 时， $2x+b=1$ ，即 $2a+b=1$ ，

$$\therefore \begin{cases} a-b=-7 \\ 2a+b=1 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a=-2 \\ b=5 \end{cases},$$

$\therefore$ 一次函数为 $y=2x+5$ ，

当 $x=1$ 时， $y=7$ ，

$\therefore$ 当 $x=1$ 时， $y=\frac{k}{x}=7$ ，即 $k=7$ ，

$\therefore$ 反比例函数为： $y=\frac{7}{x}$ ，

当 $x=-\frac{7}{2}$ 时， $y=7 \div \left(-\frac{7}{2}\right)=-2$ ，

当 $y=1$ 时, $x=a=-2$,

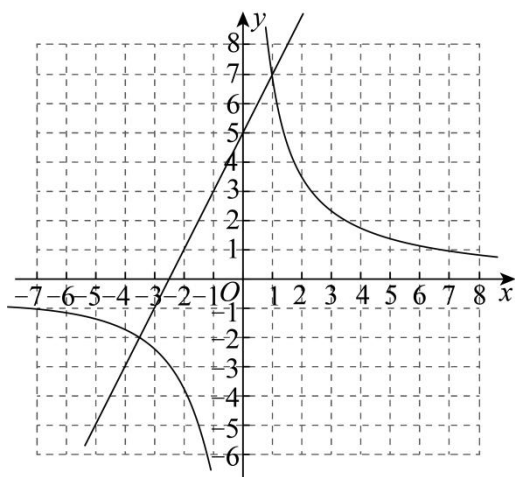
当 $x=-2$ 时, $y=-\frac{7}{2}$,

补全表格如下:

x	$-\frac{7}{2}$	-2	1
$2x+b$	-2	1	7
$\frac{k}{x}$	-2	$-\frac{7}{2}$	7

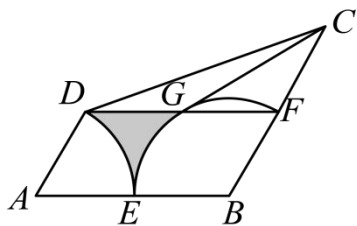
【小问 2 详解】

由表格信息可得: 两个函数的交点坐标分别为 $\left(-\frac{7}{2}, -2\right)$, $(1, 7)$,



$\therefore$ 当 $y=2x+b$ 的图像在 $y=\frac{k}{x}$ 的图像上方时, x 的取值范围为 $-\frac{7}{2} < x < 0$ 或 $x > 1$;

21. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle DAB = 60^\circ$, $AB = BC = 2AD = 2$. 以点 A 为圆心, 以 AD 为半径作 $\widehat{DE}$ 交 AB 于点 E , 以点 B 为圆心, 以 BE 为半径作 $\widehat{EF}$ 所交 BC 于点 F , 连接 FD 交 $\widehat{EF}$ 于另一点 G , 连接 CG .



(1) 求证: CG 为 $\widehat{EF}$ 所在圆的切线;

(2) 求图中阴影部分面积. (结果保留 π)

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}$

【解析】

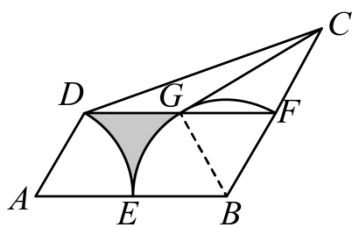
【分析】本题考查平行四边形的性质和判定，圆的性质，扇形面积，等边三角形的性质等知识点，证明四边形 $ABFD$ 是平行四边形是解题关键.

(1) 根据圆的性质，证明 $BF = BE = AD = AE = CF$ ，即可证明四边形 $ABFD$ 是平行四边形，再证明 $\triangle BFG$ 是等边三角形，再根据圆的切线判定定理即可证得结果.

(2) 先求出平行四边形的高 DH ，根据扇形面积公式三角形面积公式，平行四边形面积公式求解即可.

【小问 1 详解】

解：连接 BG 如图，



根据题意可知： $AD = AE$ ， $BE = BF$

又 $\because AB = BC$ ，

$\therefore CF = AE = AD$ ，

$\because BC = 2AD$ ，

$\therefore BF = BE = AD = AE = CF$ ，

$\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABFD$ 是平行四边形，

$\therefore \angle BFD = \angle DAB = 60^\circ$ ，

$\because BG = BF$ ，

$\therefore \triangle BFG$ 是等边三角形，

$\therefore GF = BF$ ，

$\therefore GF = BF = FC$ ，

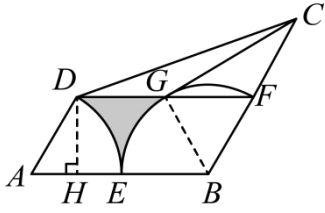
$\therefore G$ 在以 BC 为直径的圆上，

$\therefore \angle BGC = 90^\circ$ ，

$\therefore CG$ 为 $\widehat{EF}$ 所在圆的切线.

【小问 2 详解】

过 D 作 $DH \perp AB$ 于点 H ,



由图可得: $S_{\text{阴影}} = S_{\square ABFD} - S_{\text{扇}AED} - S_{\text{扇}BEG} - S_{\triangle BFG}$,

在 $\text{Rt}\triangle AHD$ 中, $AD = 1$, $\angle DAB = 60^\circ$,

$$\therefore DH = AD \cdot \sin \angle DAB = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore S_{\square ABFD} = AB \cdot DH = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

由题可知: 扇形 ADE 和扇形 BGE 全等,

$$\therefore S_{\text{扇}AED} = S_{\text{扇}BGE} = \frac{n\pi r^2}{360} = \frac{60\pi (AD)^2}{360} = \frac{60 \times \pi \times 1^2}{360} = \frac{\pi}{6},$$

$$\text{等边三角形 } BFG \text{ 的面积为: } \frac{1}{2} GF \cdot DH = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\square ABFD} - S_{\text{扇}AED} - S_{\text{扇}BEG} - S_{\triangle BFG} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}$$

22. 一副三角板分别记作 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$, 其中 $\angle ABC = \angle DEF = 90^\circ$, $\angle BAC = 45^\circ$, $\angle EDF = 30^\circ$, $AC = DE$. 作 $BM \perp AC$ 于点 M , $EN \perp DF$ 于点 N , 如图 1.

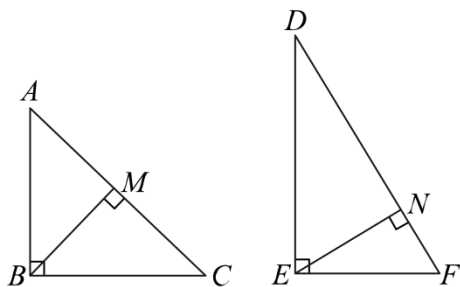


图1

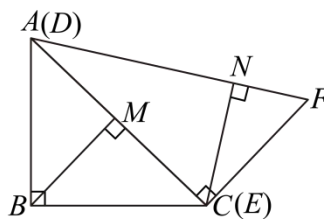


图2

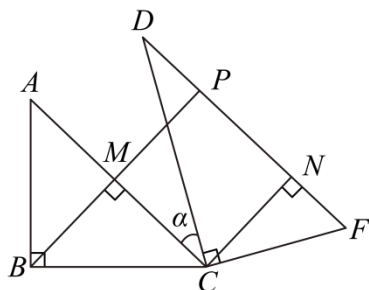
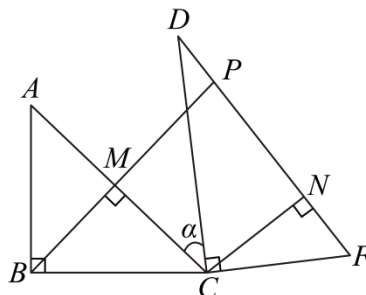


图3



备用图

(1) 求证: $BM = EN$;

(2) 在同一平面内, 将图 1 中的两个三角形按如图 2 所示的方式放置, 点 C 与点 E 重合记为 C , 点 A 与点 D 重合, 将图 2 中的 $\triangle DCF$ 绕 C 按顺时针方向旋转 α 后, 延长 BM 交直线 DF 于点 P .

①当 $\alpha = 30^\circ$ 时, 如图 3, 求证: 四边形 $CNPM$ 为正方形;

②当 $30^\circ < \alpha < 60^\circ$ 时, 写出线段 MP , DP , CD 的数量关系, 并证明; 当 $60^\circ < \alpha < 120^\circ$ 时, 直接写出线段 MP , DP , CD 的数量关系.

【答案】(1) 证明见解析

(2) ①证明见解析; ②当 $30^\circ < \alpha < 60^\circ$ 时, 线段 MP , DP , CD 的数量关系为 $\frac{DP + MP}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 当

$60^\circ < \alpha < 120^\circ$ 时, 线段 MP , DP , CD 的数量关系为 $\frac{MP - DP}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

【解析】

【分析】(1) 利用等腰直角三角形与含 30° 度角的直角三角形的性质可得结论;

(2) ①证明 $\angle CND = 90^\circ$, $\angle DCN = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, 可得 $\angle ACN = 90^\circ$, 证明 $\angle PMC = \angle BMC = 90^\circ$, 可得四边形 $PMCN$ 为矩形, 结合 $BM = EN$, 即 $BM = CN$, 而 $BM = CM$, 可得 $CM = CN$, 从而可得结论; ②如图, 当 $30^\circ < \alpha < 60^\circ$ 时, 连接 CP , 证明

$\triangle PMC \cong \triangle PNC$, 可得 $PM = PN$, 结合 $\angle D = 30^\circ$, 可得 $\frac{DP + MP}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; ②如图, 当 $60^\circ < \alpha < 120^\circ$

时，连接 CP ，同理 $\triangle PMC \cong \triangle PNC$ ，结合 $\angle CDF = 30^\circ$ ，可得 $\frac{MP - DP}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

【小问 1 详解】

证明：设 $AC = DE = a$ ，

$$\therefore \angle ABC = \angle DEF = 90^\circ, \quad \angle BAC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle C = 45^\circ,$$

$$\therefore AB = BC,$$

$$\therefore BM \perp AC,$$

$$\therefore BM = AM = CM = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}a,$$

$$\therefore \angle EDF = 30^\circ, \quad EN \perp DF,$$

$$\therefore EN = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}a,$$

$$\therefore BM = EN;$$

【小问 2 详解】

证明：① $\because \angle D = 30^\circ, \quad CN \perp DF$ ，

$$\therefore \angle CND = 90^\circ, \quad \angle DCN = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore \alpha = \angle ACD = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ACN = 90^\circ,$$

$$\therefore BM \perp AC,$$

$$\therefore \angle PMC = \angle BMC = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $PMCN$ 为矩形，

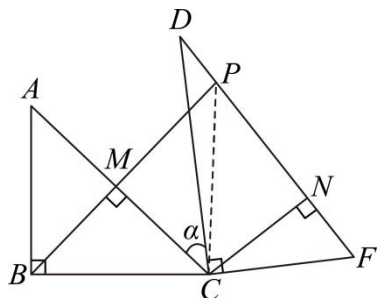
$$\therefore BM = EN, \quad \text{即 } BM = CN,$$

而 $BM = CM$ ，

$$\therefore CM = CN,$$

$\therefore$ 四边形 $PMCN$ 是正方形；

② 如图，当 $30^\circ < \alpha < 60^\circ$ 时，连接 CP ，



由 (1) 可得: $CM = CN$, $\angle PMC = \angle PNC = 90^\circ$,

$$\therefore CP = CP,$$

$$\therefore \Delta PMC \cong_{\Delta} PNC,$$

$$\therefore PM = PN,$$

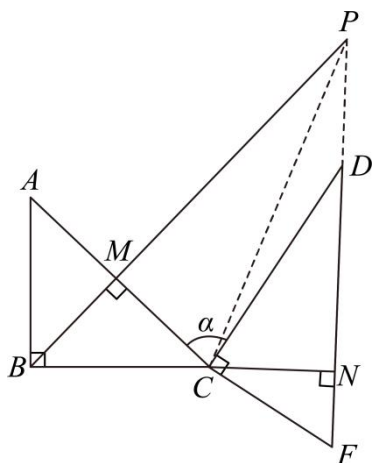
$$\therefore MP + DP = PN + DP = DN \text{ ,}$$

$$\therefore \angle D = 30^\circ,$$

$$\therefore \cos \angle D = \frac{DN}{CD} = \frac{DP + MP}{CD} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \frac{DP + MP}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

②如图, 当 $60^\circ < \alpha < 120^\circ$ 时, 连接 CP ,



由 (1) 可得: $CM = CN$, $\angle PMC = \angle PNC = 90^\circ$,

$$\therefore CP = CP,$$

$$\therefore \Delta PMC \cong_{\Delta} PNC,$$

$$\therefore PM = PN,$$

$$\therefore DN = PN - DP = MP - DP,$$

$$\therefore \angle CDF = 30^\circ,$$

$$\therefore \cos \angle CDF = \frac{DN}{CD} = \frac{MP - DP}{CD} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \frac{MP - DP}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

【点睛】本题考查的是等腰直角三角形的性质，含 30 度角的直角三角形的性质，直角三角形斜边上的中线的性质，正方形的判定，旋转的性质，全等三角形的判定与性质，锐角三角函数的应用，作出合适的辅助

线是解本题的关键.

23. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $P(2, -3)$ 在二次函数 $y = ax^2 + bx - 3 (a > 0)$ 的图像上, 记该二次函数图像的对称轴为直线 $x = m$.

(1) 求 m 的值;

(2) 若点 $Q(m, -4)$ 在 $y = ax^2 + bx - 3$ 的图像上, 将该二次函数的图像向上平移 5 个单位长度, 得到新的二次函数的图像. 当 $0 \leq x \leq 4$ 时, 求新的二次函数的最大值与最小值的和;

(3) 设 $y = ax^2 + bx - 3$ 的图像与 x 轴交点为 $(x_1, 0)$, $(x_2, 0) (x_1 < x_2)$. 若 $4 < x_2 - x_1 < 6$, 求 a 的取值范围.

【答案】(1) $m = 1$

(2) 新的二次函数的最大值与最小值的和为 11;

(3) $\frac{3}{8} < a < 1$

【解析】

【分析】(1) 把点 $P(2, -3)$ 代入 $y = ax^2 + bx - 3 (a > 0)$ 可得 $b = -2a$, 再利用抛物线的对称轴公式可得答案;

(2) 把点 $Q(1, -4)$ 代入 $y = ax^2 - 2ax - 3$, 可得: $a = 1$, 可得抛物线为 $y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$, 将该二次函数的图像向上平移 5 个单位长度, 得到新的二次函数为: $y = (x-1)^2 - 4 + 5 = (x-1)^2 + 1$, 再利用二次函数的性质可得答案;

(3) 由根与系数的关系可得 $x_1 + x_2 = 2$, $x_1 \cdot x_2 = -\frac{3}{a}$, 结合 $x_2 - x_1 = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$, $4 < x_2 - x_1 < 6$, 再建立不等式组求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 点 $P(2, -3)$ 在二次函数 $y = ax^2 + bx - 3 (a > 0)$ 的图像上,

$$\therefore 4a + 2b - 3 = -3,$$

解得: $b = -2a$,

$\therefore$ 抛物线为: $y = ax^2 - 2ax - 3$,

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = -\frac{-2a}{2a} = 1$,

$\therefore m = 1$;

【小问 2 详解】

解：∵点 $Q(1, -4)$ 在 $y = ax^2 - 2ax - 3$ 的图像上，

$$\therefore a - 2a - 3 = -4,$$

解得： $a = 1$ ，

$$\therefore \text{抛物线为 } y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4,$$

将该二次函数的图像向上平移 5 个单位长度，得到新的二次函数为：

$$y = (x-1)^2 - 4 + 5 = (x-1)^2 + 1,$$

$$\therefore 0 \leq x \leq 4,$$

∴当 $x = 1$ 时，函数有最小值为 1，

当 $x = 4$ 时，函数有最大值为 $(4-1)^2 + 1 = 10$

∴新的二次函数的最大值与最小值的和为 11；

【小问 3 详解】

∵ $y = ax^2 - 2ax - 3$ 的图像与 x 轴交点为 $(x_1, 0)$ ， $(x_2, 0)$ ($x_1 < x_2$)。

$$\therefore x_1 + x_2 = 2, \quad x_1 \cdot x_2 = -\frac{3}{a},$$

$$\therefore x_2 - x_1 = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2},$$

$$\therefore x_2 - x_1 = \sqrt{4 + \frac{12}{a}} = 2\sqrt{1 + \frac{3}{a}},$$

$$\therefore 4 < x_2 - x_1 < 6,$$

$$\therefore 4 < 2\sqrt{1 + \frac{3}{a}} < 6 \text{ 即 } 2 < \sqrt{1 + \frac{3}{a}} < 3,$$

解得： $\frac{3}{8} < a < 1$ 。

【点睛】 本题属于二次函数的综合题，利用待定系数法求解二次函数的解析式，二次函数的性质，一元二次方程根与系数的关系，熟练的利用各知识点建立方程或不等式组解题是关键。