

## 威海市 2024 年初中学业考试

### 数 学

注意事项：

1. 本试卷共 6 页，共 120 分。考试时间 120 分钟。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请务必用 0.5 毫米黑色签字笔将自己的姓名、考生号、座号填写在答题卡和试卷规定的位置上。
3. 所有的试题都必须在专用的“答题卡”上作答。写在试卷上或答题卡指定区域以外的答案一律无效。
4. 选择题用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号、作图题用 2B 铅笔（加黑加粗，描写清楚）或 0.5 毫米的黑色签字笔作答。其它题目用 0.5 毫米的黑色签字笔作答。如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不能使用涂改液、胶带纸、修正带。
5. 不要求保留精确度的题目，计算结果保留准确值。

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个是正确的。每小题选对得 3 分，选错、不选或多选，均不得分）

1. 一批食品，标准质量为每袋<sup>454g</sup>。现随机抽取 4 个样品进行检测，把超过标准质量的克数用正数表示，不足的克数用负数表示。那么，最接近标准质量的是（ ）

- A. +7                      B. -5                      C. -3                      D. 10

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了绝对值的意义，正负数的意义，直接利用正负数的意义以及绝对值的意义可得最接近标准是哪一袋。

【详解】解：∵超过标准质量的克数用正数表示，不足的克数用负数表示。

$$\therefore |-3| < |-5| < |+7| < |10|$$

∴最接近标准质量的是 -3

故选：C。

2. 据央视网 2023 年 10 月 11 日消息，中国科学技术大学中国科学院量子创新研究院与上海微系统所、国家并行计算机工程技术研究中心合作，成功构建了 255 个光子的量子计算原型机“九章三号”，再度刷新了光

量子信息的技术水平和量子计算优越性的世界纪录。“九章三号”处理高斯玻色取样的速度比上一代“九章二号”提升一百万倍，在百万分之一秒时间内所处理的最高复杂度的样本，需要当前最强的超级计算机

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

花费超过二百亿年的时间，将“百万分之一”用科学记数法表示为（ ）

- A.  $1 \times 10^{-5}$                       B.  $1 \times 10^{-6}$                       C.  $1 \times 10^{-7}$                       D.  $1 \times 10^{-8}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了用科学记数法表示绝对值较小的数，用科学记数法表示绝对值较小的数，一般形式为

$a \times 10^{-n}$ ，其中  $1 \leq |a| < 10$ ， $n$  为整数.

【详解】解：百万分之一  $= \frac{1}{1000000} = 1 \times 10^{-6}$ .

故选：B.

3. 下列各数中，最小的数是（ ）

- A.  $-2$                       B.  $-(-2)$                       C.  $-\frac{1}{2}$                       D.  $-\sqrt{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了实数的大小比较，根据实数的大小比较即可求解.

【详解】解：  $-(-2) = 2$ ，

$$\therefore -2 < -\sqrt{2} < -\frac{1}{2} < -(-2)$$

$\therefore$  最小的数是  $-2$

故选：A.

4. 下列运算正确的是（ ）

- A.  $x^5 + x^5 = x^{10}$                       B.  $m \div n^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$   
C.  $a^6 \div a^2 = a^4$                       D.  $(-a^2)^3 = -a^5$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查合并同类项、同底数幂的除法、积的乘方，根据合并同类项、同底数幂的除法、积的乘方的运算法则计算即可.

【详解】A、 $x^5 + x^5 = 2x^5$ ，运算错误，该选项不符合题意；

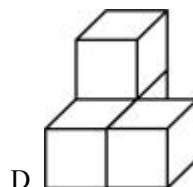
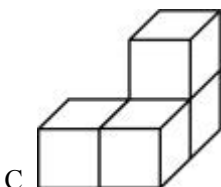
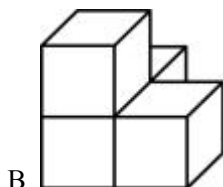
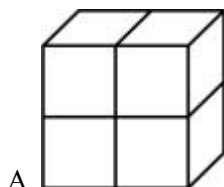
B、 $m \div n^2 \cdot \frac{1}{n} = m \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n^3}$ ，运算错误，该选项不符合题意；

C、 $a^6 \div a^2 = a^{6-2} = a^4$ ，运算正确，该选项符合题意；

D、 $(-a^2)^3 = -a^6$ ，运算错误，该选项不符合题意.

故选：C

5. 下列几何体都是由四个大小相同的小正方体搭成的. 其中主视图、左视图和俯视图完全相同的是 ( )



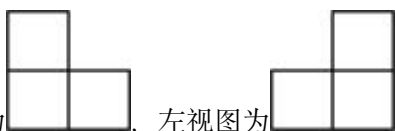
【答案】D

【解析】

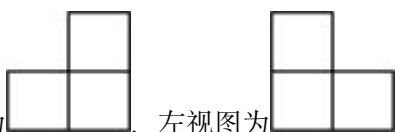
【分析】本题考查了三视图；分别画出四个选项中几何体的左视图与俯视图，通过比较即可得出答案.



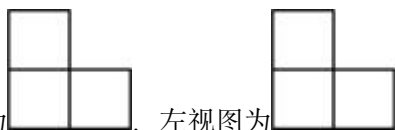
【详解】解：A、主视图为 , 左视图为 , 主视图与左视图不同，故该选项不符合题意；



B、主视图为 , 左视图为 , 主视图与左视图不同，故该选项不符合题意；



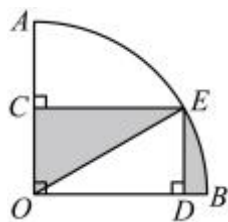
C、主视图为 , 左视图为 , 主视图与左视图不同，故该选项不符合题意；



D、主视图为 , 左视图为 , 主视图与左视图相同，故该选项符合题意；

故选：D.

6. 如图，在扇形  $AOB$  中， $\angle AOB = 90^\circ$ ，点  $C$  是  $AO$  的中点. 过点  $C$  作  $CE \perp AO$  交  $\widehat{AB}$  于点  $E$ ，过点  $E$  作  $ED \perp OB$ ，垂足为点  $D$ . 在扇形内随机选取一点  $P$ ，则点  $P$  落在阴影部分的概率是 ( )



A.  $\frac{1}{4}$

B.  $\frac{1}{3}$

C.  $\frac{1}{2}$

D.  $\frac{2}{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查的是求不规则图形的面积，几何概率，根据阴影部分面积等于扇形  $OBE$  的面积，即可求解.

【详解】解： $\because \angle AOB = 90^\circ$ ， $CE \perp AO$ ， $ED \perp OB$

$\therefore$  四边形  $OCDE$  是矩形，

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$$\therefore S_{\triangle OCF} = S_{\triangle ODF}$$

$$\therefore S_{\text{阴影部分}} = S_{\triangle ODF} + S_{\triangle BDF} = S_{\text{扇形} OBF}$$

$\therefore$  点  $C$  是  $AO$  的中点

$$\therefore OC = \frac{1}{2}OE = DE$$

$$\therefore \sin \angle EOD = \frac{ED}{OE} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \angle EOD = 30^\circ$$

$$\therefore S_{\text{阴影部分}} = S_{\triangle ODF} + S_{\triangle BDF} = S_{\text{扇形} OBF} = \frac{30\pi \times AO^2}{360} = \frac{\pi \times AO^2}{12}, \quad S_{\text{扇形} AOB} = \frac{90\pi \times AO^2}{360} = \frac{\pi \times AO^2}{4},$$

$$\frac{S_{\text{阴影部分}}}{S_{\text{扇形} AOB}} = \frac{\frac{\pi \times AO^2}{12}}{\frac{\pi \times AO^2}{4}} = \frac{1}{3}$$

点  $P$  落在阴影部分的概率是

故选：B.

7. 定义新运算：

① 在平面直角坐标系中， $\{a, b\}$  表示动点从原点出发，沿着  $x$  轴正方向 ( $a \geq 0$ ) 或负方向 ( $a < 0$ )，平移  $|a|$  个单位长度，再沿着  $y$  轴正方向 ( $b \geq 0$ ) 或负方向 ( $b < 0$ ) 平移  $|b|$  个单位长度。例如，动点从原点出发，沿着  $x$  轴负方向平移 2 个单位长度，再沿着  $y$  轴正方向平移 1 个单位长度，记作  $\{-2, 1\}$ 。

② 加法运算法则： $\{a, b\} + \{c, d\} = \{a+c, b+d\}$ ，其中  $a, b, c, d$  为实数。

若  $\{3, 5\} + \{m, n\} = \{-1, 2\}$ ，则下列结论正确的是 ( )

A.  $m = 2, n = 7$

B.  $m = -4, n = -3$

C.  $m = 4, n = 3$

D.  $m = -4, n = 3$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了新定义运算，平面直角坐标系，根据新定义得出  $3+m=-1, 5+n=2$ ，即可求解。

【详解】解： $\because \{a, b\} + \{c, d\} = \{a+c, b+d\}$ ， $\{3, 5\} + \{m, n\} = \{-1, 2\}$

$$\therefore 3+m=-1, 5+n=2$$

解得： $m=-4, n=-3$

故选：B.

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

8. 《九章算术》是我国古老的数学经典著作，书中提到这样一道题目：以绳测井．若将绳三折测之，绳多四尺；若将绳四折测之，绳多一尺．绳长、井深各几何？题目大意是：用绳子测量水井的深度．如果将绳子折成三等份，一份绳长比井深多4尺；如果将绳子折成四等份，一份绳长比井深多1尺．绳长、井深各是多少尺？若设绳长 $x$ 尺，井深 $y$ 尺，则符合题意的方程组是（ ）

A. 
$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$$

B. 
$$\begin{cases} 3x + 4 = y \\ 4x + 1 = y \end{cases}$$

C. 
$$\begin{cases} \frac{x}{3} - y = 4 \\ \frac{x}{4} - y = 1 \end{cases}$$

D. 
$$\begin{cases} \frac{x}{3} + 4 = y \\ \frac{x}{4} + 1 = y \end{cases}$$

【答案】C

【解析】

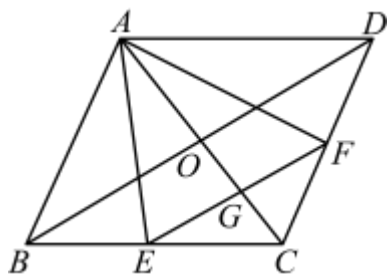
【分析】本题考查二元一次方程组的应用，此题中的等量关系有：①将绳三折测之，绳多四尺；②绳四折测之，绳多一尺，不变的是井深，据此即可得方程组．正确理解题意，找准等量关系解题的关键．

【详解】解：设绳长 $x$ 尺，井深 $y$ 尺，

依题意，得：
$$\begin{cases} \frac{x}{3} - y = 4 \\ \frac{x}{4} - y = 1 \end{cases}$$

故选：C.

9. 如图，在 $\square ABCD$ 中，对角线 $AC$ ， $BD$ 交于点 $O$ ，点 $E$ 在 $BC$ 上，点 $F$ 在 $CD$ 上，连接 $AE$ ， $AF$ ， $EF$ ， $EF$ 交 $AC$ 于点 $G$ ．下列结论错误的是（ ）



A. 若 $\frac{CE}{CF} = \frac{AD}{AB}$ ，则 $EF \parallel BD$

B. 若 $AE \perp BC$ ， $AF \perp CD$ ， $AE = AF$ ，则 $EF \parallel BD$

C. 若 $EF \parallel BD$ ， $CE = CF$ ，则 $\angle EAC = \angle FAC$

D. 若 $AB = AD$ ， $AE = AF$ ，则 $EF \parallel BD$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了相似三角形的性质与判定，菱形的性质与判定，垂直平分线的性质，全等三角形的性

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

质与判定；根据相似三角形的性质与判定即可判断 A，根据题意可得四边形  $CA$  是  $\angle BCD$  的角平分线，进而判断四边形  $ABCD$  是菱形，证明  $Rt\triangle ACE \cong Rt\triangle AFC$  可得  $CE = CF$  则  $AC$  垂直平分  $EF$ ，即可判断 B 选项，证明四边形  $ABCD$  是菱形，即可判断 C 选项，D 选项给的条件，若加上  $BE = DF$ ，则成立，据此，即可求解。

【详解】解：∵ 四边形  $ABCD$  是平行四边形，

$$\therefore AD = BC, AB = CD$$

A. 若  $\frac{CE}{CF} = \frac{AD}{AB}$ ，即  $\frac{CE}{CF} = \frac{BC}{CD}$ ，又  $\angle ECF = \angle BCD$ ，

$$\therefore \triangle CEF \sim \triangle CBD$$

$$\therefore \angle CEF = \angle CBD$$

$$\therefore EF \parallel BD, \text{ 故 A 选项正确,}$$

B. 若  $AE \perp BC$ ， $AF \perp CD$ ， $AE = AF$ ，

∴  $CA$  是  $\angle BCD$  的角平分线，

$$\therefore \angle ACB = \angle ACD$$

$$\therefore AD \parallel BC$$

$$\therefore \angle DAC = \angle ACB$$

$$\therefore \angle DAC = \angle DCA$$

$$\therefore AD = DC$$

∴ 四边形  $ABCD$  是菱形，

$$\therefore AC \perp BD$$

在  $Rt\triangle ACE, Rt\triangle AFC$  中，

$$\begin{cases} AE = AF \\ AC = AC \end{cases}$$

$$\therefore Rt\triangle ACE \cong Rt\triangle AFC$$

$$\therefore CE = CF$$

又 ∵  $AC = AF$

$$\therefore AC \perp EF$$

$$\therefore EF \parallel BD, \text{ 故 B 选项正确,}$$

C. ∵  $CE = CF$ ，

$$\therefore \angle CFE = \angle CEF$$

$$\therefore EF \parallel BD,$$

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$$\therefore \angle CBD = \angle CEF, \angle CDB = \angle CFE$$

$$\therefore \angle CBD = \angle CDB$$

$$\therefore CB = CD$$

$$\therefore OD = OB$$

$$\therefore AC \perp BD$$

$\therefore$  四边形  $ABCD$  是菱形,

$$\text{又} \therefore EF \parallel BD$$

$$\therefore AC \perp EF, \text{ 则 } \angle AGE = \angle AGF = 90^\circ$$

$$\therefore AE = AF$$

$$\therefore \angle AEF = \angle AFE$$

$$\therefore \angle EAC = \angle FAC, \text{ 故 C 选项正确;}$$

D. 若  $AB = AD$ , 则四边形  $ABCD$  是菱形,

由  $AE = AF$ , 且  $BE = DF$  时,

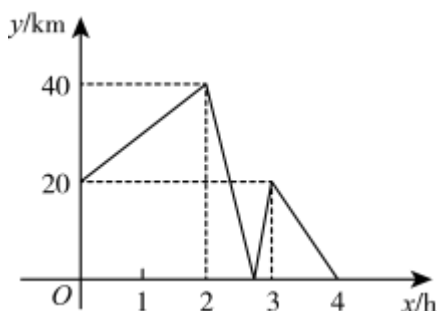
可得  $AC$  垂直平分  $EF$ ,

$$\therefore AC \perp BD$$

$$\therefore EF \parallel BD, \text{ 故 D 选项不正确}$$

故选: D.

10. 同一条公路连接  $A$ ,  $B$ ,  $C$  三地,  $B$  地在  $A$ ,  $C$  两地之间. 甲、乙两车分别从  $A$  地、 $B$  地同时出发前往  $C$  地. 甲车速度始终保持不变, 乙车中途休息一段时间, 继续行驶. 下图表示甲、乙两车之间的距离  $y$  (km) 与时间  $x$  (h) 的函数关系. 下列结论正确的是 ( )



A. 甲车行驶  $\frac{8}{3}$  h 与乙车相遇

B.  $A$ ,  $C$  两地相距 220km

C. 甲车的速度是 70km/h

D. 乙车中途休息 36 分钟

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了函数图象, 根据函数图象结合选项, 逐项分析判断, 即可求解.

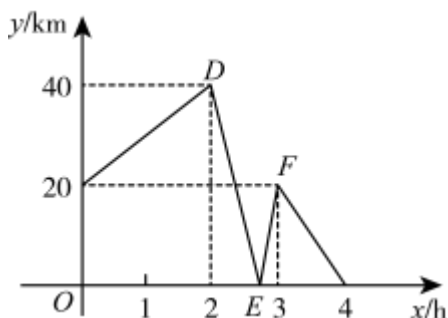
【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

【详解】解：根据函数图象可得  $AB$  两地之间的距离为  $40 - 20 = 20$  (km)

两车行驶了 4 小时，同时到达  $C$  地，

如图所示，在  $1-2$  小时时，两侧同向运动，在第 2 小时，即点  $D$  时，两者距离发生改变，此时乙车休息，

$E$  点的意义是两车相遇， $F$  点意义是乙车休息后再出发，



$\therefore$  乙车休息了 1 小时，故 D 不正确，

设甲车的速度为  $a$  km/h，乙车的速度为  $b$  km/h，

根据题意，乙车休息后两者同时到达  $C$  地，则甲车的速度比乙车的速度慢， $a < b$

$$\therefore 2b + 20 - 2a = 40$$

$$\text{即 } b - a = 10$$

在  $DE - EF$  时，乙车不动，则甲车的速度是  $\frac{40 + 20}{1} = 60$  km/h，

$\therefore$  乙车速度为  $60 + 10 = 70$  km/h，故 C 不正确，

$\therefore AC$  的距离为  $4 \times 60 = 240$  千米，故 B 不正确，

设  $x$  小时两辆车相遇，依题意得， $60x = 2 \times 70 + 20$

解得： $x = \frac{8}{3}$  即  $\frac{8}{3}$  小时时，两车相遇，故 A 正确

故选：A.

二、填空题 (本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分. 只要求填出最后结果)

11. 计算： $\sqrt{12} - \sqrt{8} \cdot \sqrt{6} =$  \_\_\_\_\_.

【答案】 $-2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的混合运算，根据二次根式的性质以及二次根式的乘法进行计算即可求解.

【详解】解： $\sqrt{12} - \sqrt{8} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$

故答案为： $-2\sqrt{3}$ .

12. 因式分解： $(x+2)(x+4)+1=$  \_\_\_\_\_.

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

【答案】  $(x+3)^2$

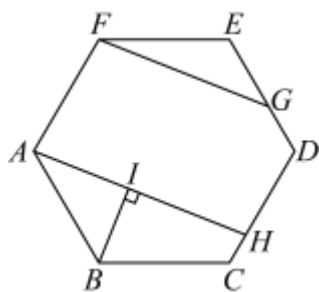
【解析】

【分析】 本题主要考查了用完全平方公式分解因式，先按照多项式乘以多项式展开，然后利用完全平方公式分解因式即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & (x+2)(x+4)+1 \\ &= x^2+4x+2x+8+1 \\ &= x^2+6x+9 \\ &= (x+3)^2 \end{aligned}$$

故答案为:  $(x+3)^2$ .

13. 如图，在正六边形  $ABCDEF$  中，  $AH \parallel FG$ ，  $BI \perp AH$ ，垂足为点  $I$ . 若  $\angle EFG = 20^\circ$ ，则  $\angle ABI =$  \_\_\_\_\_.



【答案】  $50^\circ$  ##50 度

【解析】

【分析】 本题考查了正六边形的内角和、平行平行线的性质及三角形内角和定理，先求出正六边形的每个内角为  $120^\circ$ ，即  $\angle EFA = \angle FAB = 120^\circ$ ，则可求得  $\angle GFA$  的度数，根据平行线的性质可求得  $\angle FAH$  的度数，进而可求出  $\angle HAB$  的度数，再根据三角形内角和定理即可求出  $\angle ABI$  的度数.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & \because \text{正六边形的内角和} = (6-2) \times 180 = 720^\circ, \\ & \text{每个内角为: } 720^\circ \div 6 = 120^\circ, \\ & \therefore \angle EFA = \angle FAB = 120^\circ, \\ & \because \angle EFG = 20^\circ, \\ & \therefore \angle GFA = 120^\circ - 20^\circ = 100^\circ, \\ & \because AH \parallel FG, \\ & \therefore \angle FAH + \angle GFA = 180^\circ, \\ & \therefore \angle FAH = 180^\circ - \angle GFA = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ, \\ & \therefore \angle HAB = \angle FAB - \angle FAH = 120^\circ - 80^\circ = 40^\circ, \end{aligned}$$

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$\because BI \perp AH$ ,

$\therefore \angle BIA = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle ABI = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$ .

故答案为:  $50^\circ$ .

14. 计算:  $\frac{4}{x-2} + \frac{x^2}{2-x} =$  \_\_\_\_\_.

【答案】  $-x-2$

【解析】

【分析】 本题考查分式的加减，根据同分母分式的加减法则解题即可.

【详解】  $\frac{4}{x-2} + \frac{x^2}{2-x}$

$$= \frac{4}{x-2} - \frac{x^2}{x-2}$$

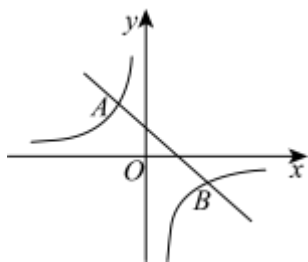
$$= \frac{4-x^2}{x-2}$$

$$= \frac{(2+x)(2-x)}{x-2}$$

$$= -x-2.$$

故答案为:  $-x-2$ .

15. 如图，在平面直角坐标系中，直线  $y_1 = ax + b (a \neq 0)$  与双曲线  $y_2 = \frac{k}{x} (k \neq 0)$  交于点  $A(-1, m)$ ， $B(2, -1)$ ，则满足  $y_1 \leq y_2$  的  $x$  的取值范围\_\_\_\_\_.



【答案】  $-1 \leq x < 0$  或  $x \geq 2$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数与反比例函数的交点问题，根据图象解答即可求解，利用数形结合思想解答是解题的关键.

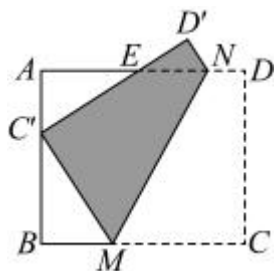
【详解】 解：由图象可得，当  $-1 \leq x < 0$  或  $x \geq 2$  时， $y_1 \leq y_2$ ，

$\therefore$  满足  $y_1 \leq y_2$  的  $x$  的取值范围为  $-1 \leq x < 0$  或  $x \geq 2$ ，

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

故答案为：  $-1 \leq x < 0$  或  $x \geq 2$  .

16. 将一张矩形纸片（四边形  $ABCD$ ）按如图所示的方式对折，使点  $C$  落在  $AB$  上的点  $C'$  处，折痕为  $MN$ ，点  $D$  落在点  $D'$  处， $C'D'$  交  $AD$  于点  $E$ . 若  $BM = 3$ ， $BC' = 4$ ， $AC' = 3$ ，则  $DN =$  \_\_\_\_\_.



$\frac{3}{2}$

【答案】

【解析】

【分析】 本题考查矩形的折叠问题，全等三角形的判定和性质，勾股定理，先根据勾股定理求出  $C'M = CM = 5$ ，然后证明  $\triangle BC'M \cong \triangle AEC'$ ，得到  $BC' = AE = 4$ ， $MC' = CE = 5$ ，即可得到  $DE = 4$ ， $D'E = 2$ ，然后在  $\text{Rt}\triangle D'EF$  中，利用  $NE^2 = D'E^2 + D'N^2$  解题即可.

【详解】 解：在  $\text{Rt}\triangle C'BM$  中， $C'M = \sqrt{C'B^2 + BM^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ ，

由折叠可得  $C'M = CM = 5$ ， $\angle D'C'M = \angle D' = \angle D = \angle C = 90^\circ$ ，

又  $\because ABCD$  是矩形，

$\therefore \angle A = \angle B = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BC'M + \angle AC'E = \angle AEC' + \angle AC'E = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BC'M = \angle AEC'$ ，

又  $\because AC' = BM = 3$ ，

$\therefore \triangle BC'M \cong \triangle AEC'$ ，

$\therefore BC' = AE = 4$ ， $MC' = CE = 5$ ，

$\therefore AB = CD = C'D' = 7$ ， $BC = AD = BM + CM = 3 + 5 = 8$ ，

$\therefore DE = AD - AE = 8 - 4 = 4$ ， $D'E = C'D' - C'E = 7 - 5 = 2$ ，

设  $D'N = DN = a$ ，则  $EN = 4 - a$ ，

在  $\text{Rt}\triangle D'EF$  中， $NE^2 = D'E^2 + D'N^2$ ，即  $(4 - a)^2 = a^2 + 2^2$ ，

解得： $a = \frac{3}{2}$ ，

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

故答案为  $\frac{3}{2}$  .

三、解答题 (本大题共 8 小题, 共 72 分)

17. 某公司为节能环保, 安装了一批 A 型节能灯, 一年用电 16000 千瓦·时. 后购进一批相同数量的 B 型节能灯, 一年用电 9600 千瓦·时. 一盏 A 型节能灯每年的用电量比一盏 B 型节能灯每年用电量的 2 倍少 32 千瓦·时. 求一盏 A 型节能灯每年的用电量.

【答案】160 千瓦·时, 过程见详解

【解析】

【分析】本题考查分式方程, 根据题意列方程是关键, 并注意检验.

根据两种节能灯数量相等列式分式方程求解即可.

【详解】解: 设一盏 B 型节能灯每年的用电量为  $x$  千瓦·时,

则一盏 A 型节能灯每年的用电量为  $(2x - 32)$  千瓦·时

$$\frac{16000}{2x - 32} = \frac{9600}{x}$$

整理得  $5x = 3(2x - 32)$

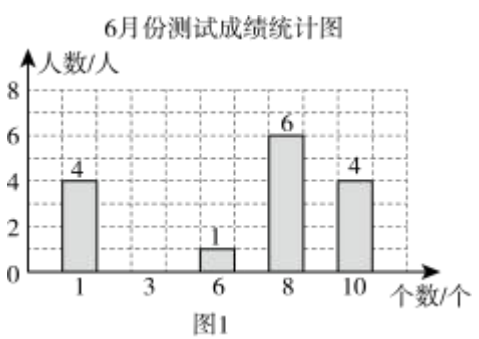
解得  $x = 96$

经检验:  $x = 96$  是原分式方程的解.

$$2x - 32 = 160$$

答: 一盏 A 型节能灯每年的用电量为 160 千瓦·时

18. 为增强学生体质, 某校在八年级男生中试行“每日锻炼, 每月测试”的引体向上训练活动, 设定 6 个及以上为合格. 体育组为了解一学期的训练效果, 随机抽查了 20 名男生 2 至 6 月份的测试成绩. 其中, 2 月份测试成绩如表 1, 6 月份测试成绩如图 1 (尚不完整). 整理本学期测试数据得到表 2 和图 2 (尚不完整).



2 月份测试成绩统计表

|    |   |   |   |   |   |    |
|----|---|---|---|---|---|----|
| 个数 | 0 | 1 | 3 | 6 | 8 | 10 |
| 人  | 4 | 8 | 4 | 1 | 2 | 1  |

|     |  |  |  |  |  |  |
|-----|--|--|--|--|--|--|
| 数   |  |  |  |  |  |  |
| 表 1 |  |  |  |  |  |  |

本学期测试成绩统计表

| 1  | 平均数/<br>个 | 众数/<br>个 | 中位数/<br>个 | 合 格<br>率 |
|----|-----------|----------|-----------|----------|
| 2月 | 2.6       | $a$      | 1         | 20%      |
| 3月 | 3.1       | 3        | 4         | 25%      |
| 4月 | 4         | 4        | 5         | 35%      |
| 5月 | 4.55      | 5        | 5         | 40%      |
| 6月 | $b$       | 8        | 6         | $c$      |

|     |  |  |  |  |
|-----|--|--|--|--|
| 表 2 |  |  |  |  |
|-----|--|--|--|--|

本学期合格率统计图

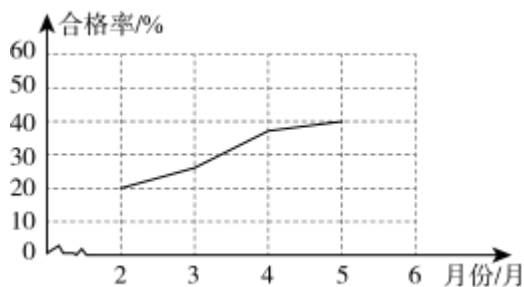


图2

请根据图表中的信息，解答下列问题：

- (1) 将图 1 和图 2 中的统计图补充完整，并直接写出  $a$ ,  $b$ ,  $c$  的值；
- (2) 从多角度分析本次引体向上训练活动的效果；
- (3) 若将此活动在邻校八年级推广，该校八年级男生按 400 人计算，以随机抽查的 20 名男生训练成绩为样本，估算经过一学期的引体向上训练，可达到合格水平的男生人数.

【答案】 (1) 见解析,  $a = 1, b = 5.65, c = 55\%$

(2) 见解析 (3) 220

【解析】

【分析】 (1) 根据总人数减去引体向上为其他个数<sup>的</sup>人数，进而补充条形统计图，根据题意求得合格率 $c$ ，补充折线统计图，根据平均数，众数的定义，即可得出 $a, b$ 的值；

(2) 根据平均数，众数，中位数，合格率，分析；

(3) 根据样本估计总体即可求解.

【小问 1 详解】

解：6 月测试成绩中，引体向上 3 个的人数为  $20 - 4 - 1 - 6 - 4 = 5$

6 月份测试成绩统计图

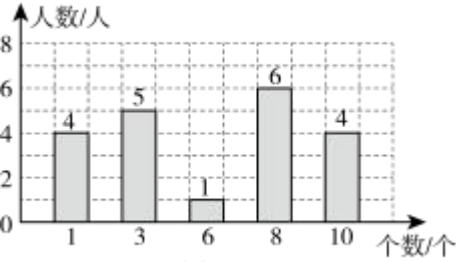


图1

$$c = \frac{1+6+4}{20} \times 100\% = 55\%$$

本学期合格率统计图

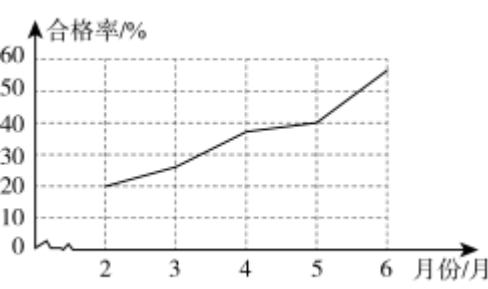


图2

根据表 2 可得， $a = 1$

$$b = \frac{1}{20} (4 \times 1 + 5 \times 3 + 1 \times 6 + 6 \times 8 + 4 \times 10) = 5.65$$

【小问 2 详解】

解：本次引体向上训练活动的效果明显，  
从平均数和合格率看，平均数和合格率逐月增加，  
从中位数看，引体向上个数逐月增加，  
从众数看，引体向上的个数越来越大，（答案不唯一，合理即可）

【小问 3 详解】

解：  $400 \times 55\% = 220$  （人）

答：估算经过一学期的引体向上训练，可达到合格水平的男生人数为 220 人

【点睛】本题考查了条形统计图，折线统计图，统计表，样本估计总体，以及求平均数，众数，中位数的意义；掌握相关的统计量的意义是解题的关键.

19. 某校九年级学生开展利用三角函数解决实际问题的综合与实践活动，活动之一是测量某护堤石坝与地平面的倾斜角. 测量报告如下表（尚不完整）

|    |                                   |
|----|-----------------------------------|
| 课题 | 测量某护堤石坝与地平面的倾斜角                   |
| 成员 | 组长： × × × 组员： × × ×， × × ×， × × × |

|       |       |                                                                                            |
|-------|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| 测量工具  | 竹竿，米尺 |                                                                                            |
| 测量示意图 |       | <p>说明：AC 是一根笔直的竹竿．点 D 是竹竿上一点．线段 DE 的长度是点 D 到地面的距离．<math>\angle \alpha</math> 是要测量的倾斜角．</p> |
| 测量数据  |       |                                                                                            |
| ..... | ..... |                                                                                            |

(1) 设  $AB=a$ ， $BC=b$ ， $AC=c$ ， $CE=d$ ， $DE=e$ ， $CD=f$ ， $BE=g$ ， $AD=h$ ，请根据表中的测量示意图，从以上线段中选出你认为需要测量的数据，把表示数据的小写字母填写在“测量数据”一栏．

(2) 根据 (1) 中选择的数据，写出求  $\angle \alpha$  的一种三角函数值的推导过程．

(3) 假设  $\sin \alpha \approx 0.86$ ， $\cos \alpha \approx 0.52$ ， $\tan \alpha \approx 1.66$ ，根据 (2) 中的推导结果，利用计算器求出  $\angle \alpha$  的度数，你选择的按键顺序为\_\_\_\_\_．

①  $\boxed{2\text{ndF}} \boxed{\sin} \boxed{0} \boxed{\cdot} \boxed{8} \boxed{6} \boxed{=}$

②  $\boxed{\sin} \boxed{0} \boxed{\cdot} \boxed{8} \boxed{6} \boxed{=}$

③  $\boxed{2\text{ndF}} \boxed{\cos} \boxed{0} \boxed{\cdot} \boxed{5} \boxed{2} \boxed{=}$

④  $\boxed{\cos} \boxed{0} \boxed{\cdot} \boxed{5} \boxed{2} \boxed{=}$

⑤  $\boxed{2\text{ndF}} \boxed{\tan} \boxed{1} \boxed{\cdot} \boxed{6} \boxed{6} \boxed{=}$

⑥  $\boxed{\tan} \boxed{1} \boxed{\cdot} \boxed{6} \boxed{6} \boxed{=}$

【答案】 (1)  $AB=a$ ， $AC=c$ ， $DE=e$ ， $CD=f$ ；

(2)  $\sin \alpha = \frac{ec}{af}$ ，推导见解析；

(3) ①．

【解析】

【分析】 (1) 根据题意选择需要的数据即可；

(2) 过点 A 作  $AM \perp CB$  于点 M，可得  $\triangle CDE \sim \triangle CAM$ ，得到  $\frac{DE}{AM} = \frac{CD}{CA}$ ，即得  $\frac{e}{AM} = \frac{f}{c}$ ，得到  $AM = \frac{ec}{f}$ ，再根据正弦的定义即可求解；

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

(3) 根据 (2) 的结果即可求解；

本题考查了解直角三角形，相似三角形的判定和性质，正确作出辅助线是解题的关键.

【小问 1 详解】

解：需要的数据为：  $AB=a$  ,  $AC=c$  ,  $DE=e$  ,  $CD=f$  ;

【小问 2 详解】

解：过点 A 作  $AM \perp CB$  于点 M , 则  $\angle AMB = 90^\circ$  ,

$$\therefore DE \perp CB ,$$

$$\therefore DE \parallel AM ,$$

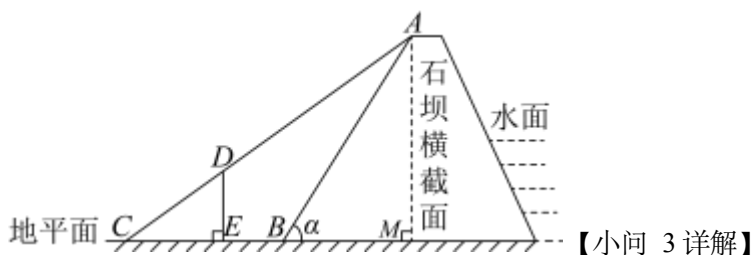
$$\therefore \triangle CDE \sim \triangle CAM$$

$$\therefore \frac{DE}{AM} = \frac{CD}{CA} ,$$

$$\text{即 } \frac{e}{AM} = \frac{f}{c}$$

$$\therefore AM = \frac{ec}{f} ,$$

$$\therefore \sin \alpha = \frac{AM}{AB} = \frac{\frac{ec}{f}}{a} = \frac{ec}{af} ;$$



【小问 3 详解】

$$\text{解：} \therefore \sin \alpha = \frac{ec}{af} ,$$

$\therefore$  按键顺序为 2ndF sin 0 · 8 6 = ,

故答案为：① .

20. 感悟

如图 1, 在  $\triangle ABE$  中, 点 C, D 在边 BE 上,  $AB = AE$  ,  $BC = DE$  . 求证:  $\angle BAC = \angle EAD$  .

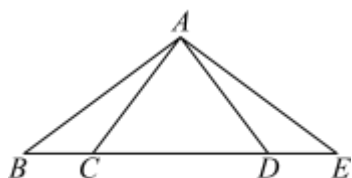


图1

应用

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

(1) 如图 2，用直尺和圆规在直线  $BC$  上取点  $D$ ，点  $E$ （点  $D$  在点  $E$  的左侧），使得  $\angle EAD = \angle BAC$ ，且  $DE = BC$ （不写作法，保留作图痕迹）；

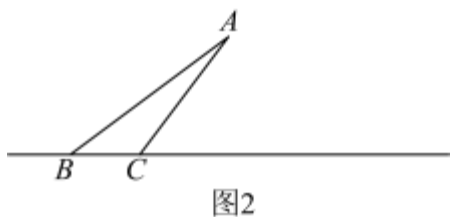


图2

(2) 如图 3，用直尺和圆规在直线  $AC$  上取一点  $D$ ，在直线  $BC$  上取一点  $E$ ，使得  $\angle CDE = \angle BAC$ ，且  $DE = AB$ （不写作法，保留作图痕迹）。

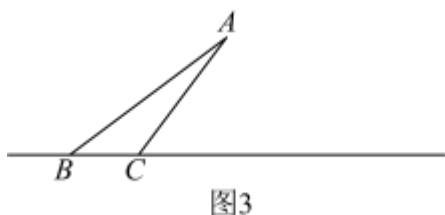


图3

【答案】见解析

【解析】

【分析】本题主要考查全等三角形的判定及性质、尺规作图：

证明  $\triangle ABC \cong \triangle AED$ ，即可求得  $\angle BAC = \angle EAD$ ；

应用 (1)：以点  $A$  为圆心，以  $AB$  长度为半径作圆，交直线  $BC$  于一点，该点即为点  $E$ ，以点  $A$  为圆心，以  $AC$  长度为半径作圆，交直线  $BC$  于一点，该点即为点  $D$ ，连接  $AD$ ， $AE$ ；

应用 (2)：以点  $C$  为圆心，以  $AC$  长为半径作圆，交  $AC$  的延长线于一点，该点即为点  $D$ ，以点  $C$  为圆心，以  $BC$  长为半径作圆，交直线  $BC$  于一点，该点即为点  $E$ ，连接  $DE$ 。

【详解】 $\because AB = AE$ ，

$\therefore \angle B = \angle E$ 。

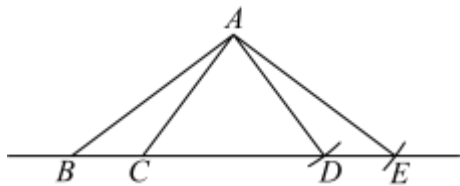
在  $\triangle ABC$  和  $\triangle AED$  中

$$\begin{cases} AB = AE \\ \angle B = \angle E \\ BC = DE \end{cases}$$

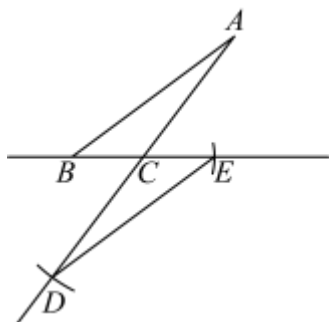
$\therefore \triangle ABC \cong \triangle AED$ 。

$\therefore \angle BAC = \angle EAD$ 。

应用 (1)：以点  $A$  为圆心，以  $AB$  长度为半径作圆，交直线  $BC$  于一点，该点即为点  $E$ ，以点  $A$  为圆心，以  $AC$  长度为半径作圆，交直线  $BC$  于一点，该点即为点  $D$ ，连接  $AD$ ， $AE$ ，图形如图所示。



应用 (2)：以点  $C$  为圆心，以  $AC$  长为半径作圆，交  $AC$  的延长线于一点，该点即为点  $D$ ，以点  $C$  为圆心，以  $BC$  长为半径作圆，交直线  $BC$  于一点，该点即为点  $E$ ，连接  $DE$ ，图形如图所示。



## 21. 定义

我们把数轴上表示数  $a$  的点与原点的距离叫做数  $a$  的绝对值。数轴上表示数  $a, b$  的点  $A, B$  之间的距离  $AB = a - b (a \geq b)$ 。特别的，当  $a \geq 0$  时，表示数  $a$  的点与原点的距离等于  $a - 0$ 。当  $a < 0$  时，表示数  $a$  的点与原点的距离等于  $0 - a$ 。

## 应用

如图，在数轴上，动点  $A$  从表示  $-3$  的点出发，以 1 个单位/秒的速度沿着数轴的正方向运动。同时，动点  $B$  从表示 12 的点出发，以 2 个单位/秒的速度沿着数轴的负方向运动。



(1) 经过多长时间，点  $A, B$  之间的距离等于 3 个单位长度？

(2) 求点  $A, B$  到原点距离之和的最小值。

【答案】 (1) 过 4 秒或 6 秒

(2) 3

【解析】

【分析】 本题考查了一元一次方程的应用，不等式的性质，绝对值的意义等知识，解题的关键是：

(1) 设经过  $x$  秒，则  $A$  表示的数为  $-3+x$ ， $B$  表示的数为  $12-2x$ ，根据“点  $A, B$  之间的距离等于 3 个单位长度”列方程求解即可；

(2) 先求出点  $A, B$  到原点距离之和为  $|-3+x| + |12-2x|$ ，然后分  $x < 3$ ， $3 \leq x \leq 6$ ， $x > 6$  三种情况讨论，利用绝对值的意义，不等式的性质求解即可。

【小问 1 详解】

解：设经过  $x$  秒，则  $A$  表示的数为  $-3+x$ ， $B$  表示的数为  $12-2x$ ，

根据题意，得  $|12-2x - (-3+x)| = 3$ ，

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

解得  $x=4$  或  $6$ ,

答, 经过  $4$  秒或  $6$  秒, 点  $A, B$  之间的距离等于  $3$  个单位长度;

【小问 2 详解】

解: 由 (1) 知: 点  $A, B$  到原点距离之和为  $|-3+x|+|12-2x|$ ,

当  $x < 3$  时,  $|-3+x|+|12-2x|=3-x+12-2x=15-3x$ ,

$\therefore x < 3$ ,

$\therefore 15-3x > 6$ , 即  $|-3+x|+|12-2x| > 6$ ,

当  $3 \leq x \leq 6$  时,  $|-3+x|+|12-2x|=x-3+12-2x=9-x$ ,

$\therefore 3 \leq x \leq 6$ ,

$\therefore 3 \leq 9-x \leq 6$ , 即  $3 \leq |-3+x|+|12-2x| \leq 6$ ,

当  $x > 6$  时,  $|-3+x|+|12-2x|=x-3+2x-12=3x-15$ ,

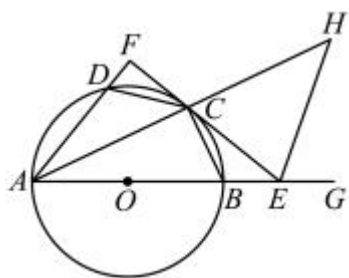
$\therefore x > 6$ ,

$\therefore 3x-15 > 3$ , 即  $|-3+x|+|12-2x| > 3$ ,

综上,  $|-3+x|+|12-2x| \geq 3$ ,

$\therefore$  点  $A, B$  到原点距离之和的最小值为  $3$ .

22. 如图, 已知  $AB$  是  $\odot O$  的直径, 点  $C, D$  在  $\odot O$  上, 且  $BC=CD$ . 点  $E$  是线段  $AB$  延长线上一点, 连接  $EC$  并延长交射线  $AD$  于点  $F$ .  $\angle FEG$  的平分线  $EH$  交射线  $AC$  于点  $H$ ,  $\angle H = 45^\circ$ .



(1) 求证:  $EF$  是  $\odot O$  的切线;

(2) 若  $BE=2$ ,  $CE=4$ , 求  $AF$  的长.

$$AF = \frac{24}{5}$$

【答案】 (1) 见解析 (2)

【解析】

【分析】 本题考查切线的判定, 勾股定理, 相似三角形的判定和性质, 圆周角定理, 根据角平分线的定义得到  $\angle F = 90^\circ$  是解题的关键.

(1) 连接  $OC$ , 根据圆周角定理得到  $\angle DAC = \angle CAB = \frac{1}{2} \angle DAB$ , 即可得到  $OC \parallel AD$ , 然后根据角

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

平分线的定义得到  $\angle F = \angle FEG - \angle FAE$   $\angle H = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$ ，然后得到  $\angle OCE = \angle F = 90^\circ$  即可证明切线；

(2) 设  $\odot O$  的半径为  $r$ ，根据  $OC^2 + CE^2 = OE^2$ ，可以求出  $r$ ，然后根据  $\triangle ECO \sim \triangle EFA$ ，即可得到结果。

【小问 1 详解】

证明：连接  $OC$ ，

则  $\angle OAC = \angle OCA$ ，

又  $\because BC = CD$ ，

$\therefore \widehat{BC} = \widehat{CD}$ ，

$\therefore \angle DAC = \angle CAB = \frac{1}{2} \angle DAB$ ，

$\therefore \angle DAC = \angle OCA$ ，

$\therefore OC \parallel AD$ ，

$\therefore \angle OCE = \angle F$ ，

$\therefore EH$  平分  $\angle FEG$ ，

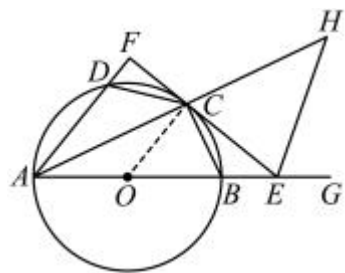
$\therefore \angle FEG = 2\angle HEG$ ，

$\therefore \angle F = \angle FEG - \angle FAE = 2\angle HEG - 2\angle CAB = 2(\angle HEG - \angle CAB) = 2\angle H = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle OCE = \angle F = 90^\circ$ ，

又  $\because OC$  是半径，

$\therefore EF$  是  $\odot O$  的切线；



【小问 2 详解】

解：设  $\odot O$  的半径为  $r$ ，则  $OE = OB + BE = r + 2$ ，

$\therefore OC^2 + CE^2 = OE^2$ ，即  $r^2 + 4^2 = (r + 2)^2$ ，

解得  $r = 3$ ，

$\therefore EA = AB + BE = 2r + 2 = 8$ ， $OE = 5$ ，

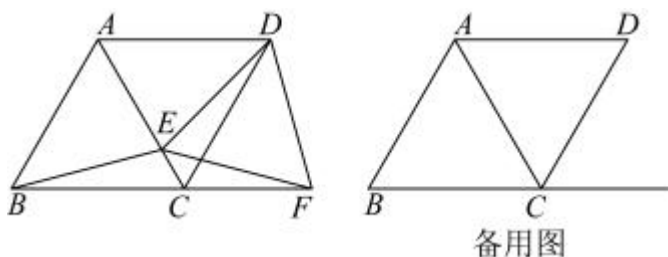
又  $\because OC \parallel AD$ ，

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$$\therefore \triangle ECO \sim \triangle EFA,$$

$$\therefore \frac{EA}{OE} = \frac{AF}{OC}, \text{ 即 } \frac{8}{5} = \frac{AF}{3}, \text{ 解得 } AF = \frac{24}{5}.$$

23. 如图，在菱形  $ABCD$  中， $AB = 10\text{cm}$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $E$  为对角线  $AC$  上一动点，以  $DE$  为一边作  $\angle DEF = 60^\circ$ ， $EF$  交射线  $BC$  于点  $F$ ，连接  $BE$ ， $DF$ 。点  $E$  从点  $C$  出发，沿  $CA$  方向以每秒  $2\text{cm}$  的速度运动至点  $A$  处停止。设  $\triangle BEF$  的面积为  $y\text{cm}^2$ ，点  $E$  的运动时间为  $x$  秒。



- (1) 求证：  $BE = EF$ ；
- (2) 求  $y$  与  $x$  的函数表达式，并写出自变量  $x$  的取值范围；
- (3) 求  $x$  为何值时，线段  $DF$  的长度最短。

【答案】 (1) 证明见解析；

$$(2) y = -\sqrt{3}x^2 + 10\sqrt{3}x (0 < x \leq 5);$$

$$(3) x = \frac{5}{2}.$$

【解析】

【分析】 (1) 设  $CD$  与  $EF$  相交于点  $M$ ，证明  $\triangle BCE \cong \triangle DCE$  (SAS)，可得  $\angle CBE = \angle CDE$ ， $BE = DE$ ，利用三角形外角性质可得  $\angle CDE = \angle CFE$ ，即得  $\angle CBE = \angle CFE$ ，即可求证；

(2) 过点  $E$  作  $EN \perp BC$  于  $N$ ，解直角三角形得到  $EN = CE \sin 60^\circ = \sqrt{3}x\text{cm}$ ， $CN = CE \cos 60^\circ = x\text{cm}$ ，可得  $BN = BC - CN = (10 - x)\text{cm}$ ，由等腰三角形三线合一可得  $BF = 2(10 - x)\text{cm}$ ，即可由三角形面积公式得到  $y$  与  $x$  的函数表达式，最后由  $0 < 2x \leq 10$ ，可得自变量  $x$  的取值范围；

(3) 证明  $\triangle DEF$  为等边三角形，可得  $BE = DF$ ，可知线段  $DF$  的长度最短，即  $BE$  的长度最短，当  $BE \perp AC$  时， $BE$  取最短，又由菱形的性质可得  $\triangle ABC$  为等边三角形，利用三线合一求出  $CE$  即可求解；

本题考查了菱形的性质，全等三角形的判定和性质，三角形的外角性质，解直角三角形，求二次函数解析

式，等腰三角形的性质，等边三角形的判定和性质，垂线段最短，掌握菱形的性质及等边三角形的判定和性质是解题的关键。

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

【小问 1 详解】

证明：设  $CD$  与  $EF$  相交于点  $M$ ，

$\because$  四边形  $ABCD$  为菱形，

$\therefore BC = DC$ ， $\angle BCE = \angle DCE$ ， $AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle ABC = 60^\circ$

$\therefore \angle DCF = 60^\circ$ ，

在  $\triangle BCE$  和  $\triangle DCE$  中，

$$\begin{cases} BC = DC \\ \angle BCE = \angle DCE \\ CE = CE \end{cases}$$

$\therefore \triangle BCE \cong \triangle DCE (\text{SAS})$ ，

$\therefore \angle CBE = \angle CDE$ ， $BE = DE$ ，

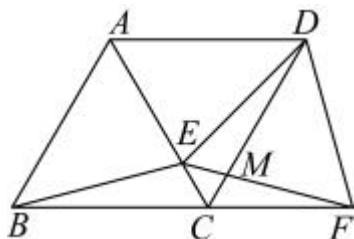
$\therefore \angle DMF = \angle DEF + \angle CDE = \angle DCF + \angle CFE$ ，

又  $\because \angle DEF = \angle DCF = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle CDE = \angle CFE$ ，

$\therefore \angle CBE = \angle CFE$ ，

$\therefore BE = EF$ ；



【小问 2 详解】

解：过点  $E$  作  $EN \perp BC$  于  $N$ ，则  $\angle ENC = 90^\circ$ ，

$\therefore BE = EF$ ，

$\therefore BF = 2BN$ ，

$\because$  四边形  $ABCD$  为菱形， $\angle ABC = 60^\circ$ ，

$\therefore BC = AB = 10\text{cm}$ ， $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle BCD = 60^\circ$ ，

即  $\angle ECN = 60^\circ$ ，

$\therefore CE = 2x\text{cm}$ ，

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$$\therefore EN = CE \sin 60^\circ = 2x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}x \text{ cm} \quad CN = CE \cdot \cos 60^\circ = 2x \cdot \frac{1}{2} = x \text{ cm}$$

$$\therefore BN = BC - CN = (10 - x) \text{ cm}$$

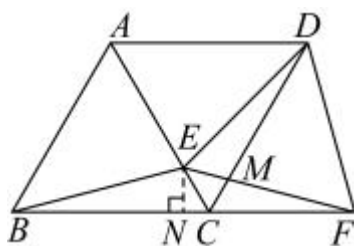
$$\therefore BF = 2(10 - x) \text{ cm}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} BF \cdot EN = \frac{1}{2} \times 2(10 - x) \times \sqrt{3}x = -\sqrt{3}x^2 + 10\sqrt{3}x$$

$$\therefore 0 < 2x \leq 10,$$

$$\therefore 0 < x \leq 5,$$

$$\therefore y = -\sqrt{3}x^2 + 10\sqrt{3}x (0 < x \leq 5);$$



【小问 3 详解】

$$\text{解: } \because BE = DE, \quad BE = EF,$$

$$\therefore DE = EF,$$

$$\therefore \angle DEF = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle DEF \text{ 为等边三角形,}$$

$$\therefore DE = DF = EF,$$

$$\therefore BE = DF,$$

$$\therefore \text{线段 } DF \text{ 的长度最短, 即 } BE \text{ 的长度最短, 当 } BE \perp AC \text{ 时, } BE \text{ 取最短, 如图,}$$

$$\therefore \text{四边形 } ABCD \text{ 是菱形,}$$

$$\therefore AB = BC,$$

$$\therefore \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 为等边三角形,}$$

$$\therefore AE = AB = AC = 10 \text{ cm},$$

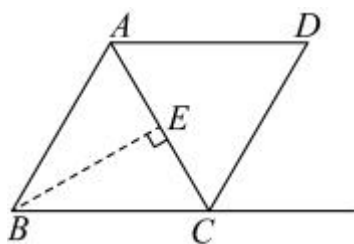
$$\therefore BE \perp AC,$$

$$\therefore CE = \frac{1}{2} AC = 5 \text{ cm}$$

$$\therefore x = \frac{CE}{2} = \frac{5}{2},$$

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$\therefore$  当  $x = \frac{5}{2}$  时，线段  $DF$  的长度最短.



24. 已知抛物线  $y = x^2 + bx + c$  ( $b < 0$ ) 与  $x$  轴交点的坐标分别为  $(x_1, 0)$ ,  $(x_2, 0)$ , 且  $x_1 < x_2$ .

(1) 若抛物线  $y_1 = x^2 + bx + c + 1$  ( $b < 0$ ) 与  $x$  轴交点的坐标分别为  $(x_3, 0)$ ,  $(x_4, 0)$ , 且  $x_3 < x_4$ . 试判断下列每组数据的大小 (填写  $<$ 、 $=$  或  $>$ ):

①  $x_1 + x_2$  \_\_\_\_\_  $x_3 + x_4$ ; ②  $x_1 - x_3$  \_\_\_\_\_  $x_2 - x_4$ ; ③  $x_2 + x_3$  \_\_\_\_\_  $x_1 + x_4$ .

(2) 若  $x_1 = 1$ ,  $2 < x_2 < 3$ , 求  $b$  的取值范围;

(3) 当  $0 \leq x \leq 1$  时,  $y = x^2 + bx + c$  ( $b < 0$ ) 最大值与最小值的差为  $\frac{9}{16}$ , 求  $b$  的值.

【答案】 (1)  $=$ ;  $<$ ;  $>$ ;

(2)  $-4 < b < -3$

(3)  $b$  的值为  $-\frac{3}{2}$  或  $-\frac{1}{2}$  或  $-\frac{7}{2}$  或  $-\frac{25}{16}$ .

【解析】

【分析】 本题考查根与系数的关系, 二次函数图像与性质, 不等式性质, 二次函数最值情况, 解题的关键在于熟练掌握二次函数图像与性质.

(1) 根据根与系数的关系得到  $x_1 + x_2 = -b$ , 以及  $x_3 + x_4 = -b$ , 即可判断①, 利用二次函数的图像与性质得到  $x_1 < x_3 < x_4 < x_2$ , 进而得到  $x_2 - x_1 > x_4 - x_3$ , 利用不等式性质变形, 即可判断②③.

(2) 根据题意得到  $3 < x_2 + x_1 < 4$ , 结合  $x_1 + x_2 = -b$  进行求解, 即可解题;

(3) 根据题意得到抛物线  $y = x^2 + bx + c$  ( $b < 0$ ) 顶点坐标为  $\left(-\frac{b}{2}, \frac{4c - b^2}{4}\right)$ , 对称轴为  $x = -\frac{b}{2} > 0$ ; 当

$x = 0$  时,  $y = c$ , 当  $x = 1$  时,  $y = 1 + b + c$ , 由  $y = x^2 + bx + c$  ( $b < 0$ ) 最大值与最小值的差为  $\frac{9}{16}$ , 分以下情况①当在  $x = 0$  取得最大值, 在  $x = 1$  取得最小值时, ②当在  $x = 0$  取得最大值, 在顶点取得最小值时, ③当在  $x = 1$  取得最大值, 在顶点取得最小值时, 建立等式求解, 即可解题.

【小问 1 详解】

解:  $\because y = x^2 + bx + c$  ( $b < 0$ ) 与  $x$  轴交点的坐标分别为  $(x_1, 0)$ ,  $(x_2, 0)$ , 且  $x_1 < x_2$ ,

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$\therefore x_1 + x_2 = -b$ ，且抛物线开口向上，

$\therefore y_1 = x^2 + bx + c + 1 (b < 0)$  与  $x$  轴交点的坐标分别为  $(x_3, 0)$ ， $(x_4, 0)$ ，且  $x_3 < x_4$ 。

即  $y = x^2 + bx + c (b < 0)$  向上平移 1 个单位，

$\therefore x_1 < x_3 < x_4 < x_2$ ，且  $x_3 + x_4 = -b$ ，

$\therefore$  ①  $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$ ；

$\therefore x_2 - x_1 > x_4 - x_3$ ，

$\therefore x_2 - x_4 > x_1 - x_3$ ，即②  $x_1 - x_3 < x_2 - x_4$ ；

$\therefore x_2 + x_3 > x_1 + x_4$ ，即③  $x_2 + x_3 > x_1 + x_4$ 。

故答案为：=；<；>；

【小问 2 详解】

解： $\therefore x_1 = 1$ ， $2 < x_2 < 3$ ，

$\therefore 3 < x_2 + x_1 < 4$ ，

$\therefore 3 < -b < 4$ ，

$\therefore -4 < b < -3$ ；

【小问 3 详解】

解：抛物线  $y = x^2 + bx + c (b < 0)$  顶点坐标为  $\left(-\frac{b}{2}, \frac{4c - b^2}{4}\right)$ ，

对称轴为  $x = -\frac{b}{2} > 0$ ；

当  $x = 0$  时， $y = c$ ，

当  $x = 1$  时， $y = 1 + b + c$ ，

① 当在  $x = 0$  取得最大值，在  $x = 1$  取得最小值时，

有  $c - (1 + b + c) = \frac{9}{16}$ ，解得  $b = -\frac{25}{16}$ ；

② 当在  $x = 0$  取得最大值，在顶点取得最小值时，

有  $c - \frac{4c - b^2}{4} = \frac{9}{16}$ ，解得  $b = \frac{3}{2}$ （舍去）或  $b = -\frac{3}{2}$ ，

③ 当在  $x = 1$  取得最大值，在顶点取得最小值时，

有  $1 + b + c - \frac{4c - b^2}{4} = \frac{9}{16}$ ，解得  $b = -\frac{7}{2}$  或  $b = -\frac{1}{2}$ ；

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

综上所述,  $b$  的值为  $-\frac{3}{2}$  或  $-\frac{1}{2}$  或  $-\frac{7}{2}$  或  $-\frac{25}{16}$  .