

2024 年天津市初中学业水平考试试卷

数学

本试卷分为第 I 卷（选择题）、第 II 卷（非选择题）两部分。第 I 卷为第 1 页至第 3 页，第 II 卷为第 4 页至第 8 页。试卷满分 120 分。考试时间 100 分钟。

答卷前，请务必将自己的姓名、考生号、考点校、考场号、座位号填写在“答题卡”上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答题时，务必将答案涂写在“答题卡”上，答案答在试卷上无效。考试结束后，将本试卷和“答题卡”一并交回。

祝你考试顺利！

第 I 卷

注意事项：

1. 每题选出答案后，用 2B 铅笔把“答题卡”上对应题目的答案标号的信息点涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号的信息点。

2. 本卷共 12 题，共 36 分。

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 计算 $3 - (-3)$ 的结果是（ ）

A. 6

B. 3

C. 0

D. -6

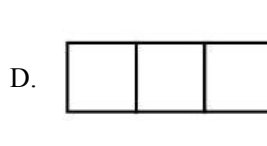
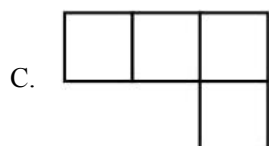
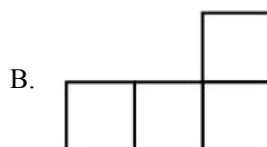
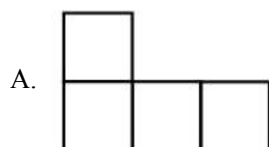
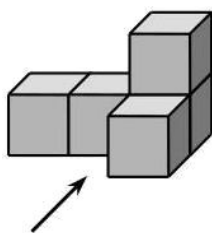
【答案】A

【解析】

【详解】试题解析：根据有理数减法法则计算，减去一个数等于加上这个数的相反数得： $3 - (-3) = 3 + 3 = 6$ 。

故选 A。

2. 下图是一个由 5 个相同的正方体组成的立体图形，它的主视图是（ ）



【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了简单组合体的三视图，根据主视图是指从正前方向看到的图形求解即可．

【详解】解：由此从正面看，下面第一层是三个正方形，第二层是一个正方形（且在最右边），
故选：B．

3. 估算 $\sqrt{10}$ 的值在（ ）

- A. 1 和 2 之间 B. 2 和 3 之间 C. 3 和 4 之间 D. 4 和 5 之间

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查无理数的估算，根据题意得 $\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16}$ ，即可求解．

【详解】解：∵ $\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16}$

$$\therefore 3 < \sqrt{10} < 4,$$

∴ $\sqrt{10}$ 的值在 3 和 4 之间，

故选：C．

4. 在一些美术字中，有的汉字是轴对称图形．下面 4 个汉字中，可以看作是轴对称图形的是（ ）

A. 知 B. 物 C. 由 D. 学

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查轴对称图形，掌握轴对称图形的定义：如果一个图形沿某一条直线对折，对折后的两部分是完全重合的，那么就称这样的图形为轴对称图形是解题的关键．

【详解】解：A.不是轴对称图形；

B.不是轴对称图形；

C.是轴对称图形；

D.不是轴对称图形；

故选 C．

5. 据 2024 年 4 月 18 日《天津日报》报道，天津市组织开展了第 43 届“爱鸟周”大型主题宣传活动．据统计，今春过境我市候鸟总数已超过 800000 只．将数据 800000 用科学记数法表示应为（ ）

- A. 0.08×10^7 B. 0.8×10^6 C. 8×10^5 D. 80×10^4

【答案】C

【解析】

【分析】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同.

【详解】解: 将数据 800000 用科学记数法表示应为 8×10^5 .

故选: C.

6. $\sqrt{2}\cos 45^\circ - 1$ 的值等于 ()

- A. 0 B. 1 C. $\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$ D. $\sqrt{2} - 1$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查特殊角的三角函数值, 熟记特殊的三角函数值是解题的关键; 根据 $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 代入即可求解

【详解】 $\sqrt{2}\cos 45^\circ - 1 = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = 0$,

故选: A

7. 计算 $\frac{3x}{x-1} - \frac{3}{x-1}$ 的结果等于 ()

- A. 3 B. x C. $\frac{x}{x-1}$ D. $\frac{3}{x^2-1}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查分式加减运算, 熟练运用分式加减法则是解题的关键; 运用同分母的分式加减法则进行计算, 对分子提取公因式, 然后约分即可.

【详解】解: 原式 $= \frac{3x-3}{x-1} = \frac{3(x-1)}{x-1} = 3$

故选: A

8. 若点 $A(x_1, -1), B(x_2, 1), C(x_3, 5)$ 都在反比例函数 $y = \frac{5}{x}$ 的图象上, 则 x_1, x_2, x_3 的大小关系是 ()

A. $x_1 < x_2 < x_3$

B. $x_1 < x_3 < x_2$

C. $x_3 < x_2 < x_1$

D. $x_2 < x_1 < x_3$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了比较反比例函数值的大小, 根据反比例函数性质即可判断.

【详解】解: $\because k = 5 > 0$,

$\therefore$ 反比例函数 $y = \frac{5}{x}$ 的图象分布在第一、三象限, 在每一象限 y 随 x 的增大而减小,

$\because$ 点 $B(x_2, 1), C(x_3, 5)$, 都在反比例函数 $y = \frac{5}{x}$ 的图象上, $1 < 5$,

$\therefore x_2 > x_3 > 0$.

$\because -1 < 0$, $A(x_1, -1)$ 在反比例函数 $y = \frac{5}{x}$ 的图象上,

$\therefore x_1 < 0$,

$\therefore x_1 < x_3 < x_2$.

故选: B.

9. 《孙子算经》是我国古代著名的数学典籍, 其中有一道题: “今有木, 不知长短. 引绳度之, 余绳四尺五寸; 屈绳度之, 不足一尺. 木长几何?” 意思是: 用一根绳子去量一根长木, 绳子还剩余 4.5 尺; 将绳子对折再量长木, 长木还剩余 1 尺. 问木长多少尺? 设木长 x 尺, 绳子长 y 尺, 则可以列出的方程组为 ()

A. $\begin{cases} y - x = 4.5 \\ x - 0.5y = 1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} y - x = 4.5 \\ x + 0.5y = 1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x + y = 4.5 \\ x - y = 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x + y = 4.5 \\ y - x = 1 \end{cases}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查的是二元一次方程组的应用. 用一根绳子去量一根木条, 绳子剩余 4.5 尺可知: 绳子比木条长 5 尺得: $y - x = 4.5$; 绳子对折再量木条, 木条剩余 1 尺可知: 绳子对折后比木条短 1 尺得: $x - 0.5y = 1$;

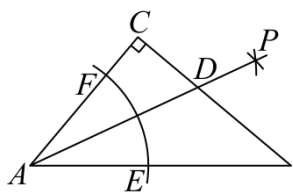
从而可得答案.

【详解】解：由题意可得方程组为：

$$\begin{cases} y - x = 4.5 \\ x - 0.5y = 1 \end{cases}$$

故选：A.

10. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 40^\circ$ ，以点 A 为圆心，适当长为半径画弧，交 AB 于点 E，交 AC 于点 F；再分别以点 E, F 为圆心，大于 $\frac{1}{2}EF$ 的长为半径画弧，两弧（所在圆的半径相等）在 $\angle BAC$ 的内部相交于点 P；画射线 AP，与 BC 相交于点 D，则 $\angle ADC$ 的大小为（ ）



A. 60°

B. 65°

C. 70°

D. 75°

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查基本作图，直角三角形两锐角互余以及三角形外角的性质，由直角三角形两锐角互余可求出 $\angle BAC = 50^\circ$ ，由作图得 $\angle BAD = 25^\circ$ ，由三角形的外角的性质可得 $\angle ADC = 65^\circ$ ，故可得答案

【详解】解： $\because \angle C = 90^\circ$, $\angle B = 40^\circ$,

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ - \angle B = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ,$$

由作图知，AP 平分 $\angle BAC$ ，

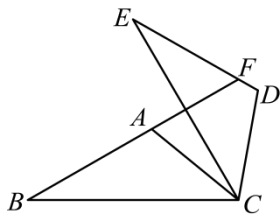
$$\therefore \angle BAD = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \times 50^\circ = 25^\circ,$$

$$\text{又 } \angle ADC = \angle B + \angle BAD,$$

$$\therefore \angle ADC = 40^\circ + 25^\circ = 65^\circ,$$

故选：B

11. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 30^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle DEC$ ，点 A, B 的对应点分别为 D, E，延长 BA 交 DE 于点 F，下列结论一定正确的是（ ）



A. $\angle ACB = \angle ACD$

B. $AC \parallel DE$

C. $AB = EF$

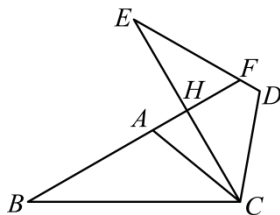
D. $BF \perp CE$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了旋转性质以及两个锐角互余的三角形是直角三角形，平行线的判定，正确掌握相关性质内容是解题的关键. 先根据旋转性质得 $\angle BCE = \angle ACD = 60^\circ$ ，结合 $\angle B = 30^\circ$ ，即可得证 $BF \perp CE$ ，再根据同旁内角互补证明两直线平行，来分析 $AC \parallel DE$ 不一定成立；根据图形性质以及角的运算或线段的运算得出 A 和 C 选项是错误的.

【详解】解：记 BF 与 CE 相交于一点 H ，如图所示：



$\because \triangle ABC$ 中，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle DEC$ ，

$$\therefore \angle BCE = \angle ACD = 60^\circ$$

$$\because \angle B = 30^\circ$$

$$\therefore \text{在 } \triangle BHC \text{ 中, } \angle BHC = 180^\circ - \angle BCE - \angle B = 90^\circ$$

$$\therefore BF \perp CE$$

故 D 选项是正确的，符合题意；

设 $\angle ACH = x^\circ$

$$\therefore \angle ACB = 60^\circ - x^\circ,$$

$$\because \angle B = 30^\circ$$

$$\therefore \angle EDC = \angle BAC = 180^\circ - 30^\circ - (60^\circ - x^\circ) = 90^\circ + x^\circ$$

$$\therefore \angle EDC + \angle ACD = 90^\circ + x^\circ + 60^\circ = 150^\circ + x^\circ$$

$$\because x^\circ \text{ 不一定等于 } 30^\circ$$

$$\therefore \angle EDC + \angle ACD \text{ 不一定等于 } 180^\circ$$

$\therefore AC \parallel DE$ 不一定成立,

故 B 选项不正确, 不符合题意;

$\because \angle ACB = 60^\circ - x^\circ, \angle ACD = 60^\circ, x^\circ$ 不一定等于 0°

$\therefore \angle ACB = \angle ACD$ 不一定成立,

故 A 选项不正确, 不符合题意;

$\therefore$ 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle DEC$,

$\therefore AB = ED = EF + FD$

$\therefore BA > EF$

故 C 选项不正确, 不符合题意;

故选: D

12. 从地面竖直向上抛出一小球, 小球的高度 h (单位: m) 与小球的运动时间 t (单位: s) 之间的关系式是 $h = 30t - 5t^2$ ($0 \leq t \leq 6$). 有下列结论:

①小球从抛出到落地需要 6 s;

②小球运动中的高度可以是 30 m;

③小球运动 2 s 时的高度小于运动 5 s 时的高度.

其中, 正确结论的个数是 ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查二次函数的图像和性质, 令 $\diamond = 0$ 解方程即可判断①; 配方成顶点式即可判断②; 把 $t = 2$ 和 $t = 5$ 代入计算即可判断③.

【详解】解: 令 $\diamond = 0$, 则 $30t - 5t^2 = 0$, 解得: $t_1 = 0, t_2 = 6$,

$\therefore$ 小球从抛出到落地需要 6 s, 故①正确;

$\because \diamond = 30t - 5t^2 = -5(x-3)^2 + 45$,

$\therefore$ 最大高度为 45m,

$\therefore$ 小球运动中的高度可以是 30 m, 故②正确;

当 $t = 2$ 时, $\diamond = 30 \times 2 - 5 \times 2^2 = 40$; 当 $t = 5$ 时, $\diamond = 30 \times 5 - 5 \times 5^2 = 25$;

∴小球运动 2 s 时的高度大于运动 5 s 时的高度，故③错误；

故选 C.

2024 年天津市初中学业水平考试试卷

数学

第 II 卷

注意事项：

1. 用黑色字迹的签字笔将答案写在“答题卡”上（作图可用 2B 铅笔）.

2. 本卷共 13 题，共 84 分.

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

13. 不透明袋子中装有 10 个球，其中有 3 个绿球、4 个黑球、3 个红球，这些球除颜色外无其他差别. 从袋子中随机取出 1 个球，则它是绿球的概率为_____.

【答案】 $\frac{3}{10}$ ##0.3

【解析】

【分析】 本题考查了概率公式的应用，熟练掌握概率公式是解题的关键.

用绿球的个数除以球的总数即可.

【详解】 解： ∵ 不透明袋子中装有 10 个球，其中有 3 个绿球、4 个黑球、3 个红球，这些球除颜色外无其他差别，

∴ 从袋子中随机取出 1 个球， 它是绿球的概率为 $\frac{3}{10}$ ，

故答案为： $\frac{3}{10}$.

14. 计算 $x^8 \div x^6$ 的结果为_____.

【答案】 x^2

【解析】

【分析】 本题考查同底数幂的除法，掌握同底数幂的除法，底数不变，指数相减是解题的关键.

【详解】 解： $x^8 \div x^6 = x^2$ ，

故答案为： x^2 .

15. 计算 $(\sqrt{11}-1)(\sqrt{11}+1)$ 的结果为_____.

【答案】 10

【解析】

【分析】利用平方差公式计算后再加减即可.

【详解】解：原式 $=11-1=10$.

故答案为：10.

【点睛】本题考查了二次根式的混合运算，掌握二次根式的混合运算法则及平方差公式是解题的关键.

16. 若正比例函数 $y = kx$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的图象经过第一、第三象限, 则 k 的值可以是_____ (写出一个即可).

【答案】1 (答案不唯一)

【解析】

【分析】根据正比例函数图象所经过的象限确定 k 的符号.

【详解】解：∵ 正比例函数 $y = kx$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的图象经过第一、三象限,

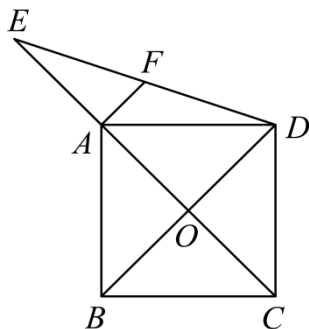
∴ $k > 0$.

∴ k 的值可以为 1,

故答案为：1 (答案不唯一).

【点睛】本题主要考查正比例函数图象在坐标平面内的位置与 k 的关系. 解答本题注意理解：直线 $y = kx$ 所在的位置与 k 的符号有直接的关系. $k > 0$ 时，直线必经过一、三象限. $k < 0$ 时，直线必经过二、四象限.

17. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 $3\sqrt{2}$ ，对角线 AC, BD 相交于点 O ，点 E 在 CA 的延长线上， $OE = 5$ ，连接 DE .



(1) 线段 AE 的长为_____;

(2) 若 F 为 DE 的中点，则线段 AF 的长为_____.

【答案】 ①. 2 ②. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ $\frac{1}{2}\sqrt{10}$

【解析】

【分析】本题考查正方形的性质，中位线定理，熟练运用中位线定理是解题的关键；

(1) 运用正方形性质对角线互相平分、相等且垂直，即可求解，

(2) 作辅助线，构造中位线即可.

【详解】(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore OA = OC = OD = OB, \quad \angle DOC = 90^\circ$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle DOC \text{ 中, } OD^2 + OC^2 = DC^2,$$

$$\because DC = 3\sqrt{2},$$

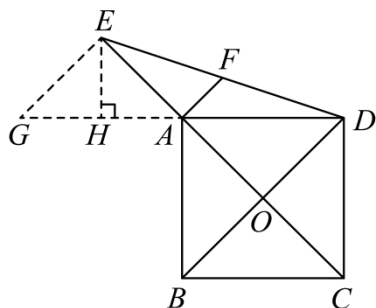
$$\therefore OD = OC = OA = OB = 3,$$

$$\therefore OE = 5$$

$$\therefore AE = OE - OA = 5 - 3 = 2$$

(2) 延长 DA 到点 G , 使 $AG = AD$, 连接 EG

由 E 点向 AG 作垂线, 垂足为 H



$\because F$ 为 DE 的中点, A 为 GD 的中点,

$\therefore AF$ 为 $\triangle DGE$ 的中位线,

在 $\text{Rt}\triangle EAH$ 中, $\angle EAH = \angle DAC = 45^\circ$,

$$\therefore AH = EH$$

$$\because AH^2 + EH^2 = AE^2,$$

$$\therefore AH = EH = \sqrt{2}$$

$$\therefore GH = AG - AH = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

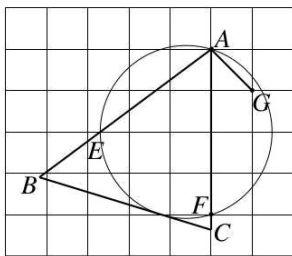
$$\text{在 Rt}\triangle EHG \text{ 中, } \therefore EG^2 = EH^2 + GH^2 = 2 + 8 = 10,$$

$$\therefore EG = \sqrt{10}$$

$\because AF$ 为 $\triangle DGE$ 的中位线,

$$\therefore AF = \frac{1}{2}EG = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

18. 如图, 在每个小正方形的边长为 1 的网格中, 点 A, F, G 均在格点上.



(1) 线段 AG 的长为 _____ ;

(2) 点 E 在水平网格线上, 过点 A, E, F 作圆, 经过圆与水平网格线的交点作切线, 分别与 AE, AF 的延长线相交于点 B, C , $\triangle ABC$ 中, 点 M 在边 BC 上, 点 N 在边 AB 上, 点 P 在边 AC 上. 请用无刻度的直尺, 在如图所示的网格中, 画出点 M, N, P , 使 $\triangle MNP$ 的周长最短, 并简要说明点 M, N, P 的位置是如何找到的 (不要求证明) _____.

【答案】 ①. $\sqrt{2}$ ②. 图见解析, 说明见解析

【解析】

【分析】此题考查了勾股定理、切线的性质等知识，根据题意正确作图是解题的关键.

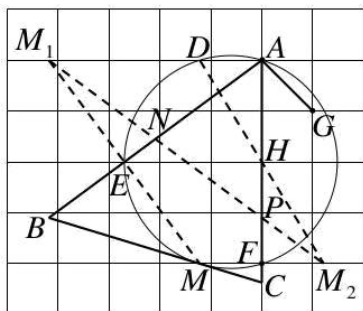
(1) 利用勾股定理即可求解;

(2) 根据圆的相关性质和网格特点进行作图即可.

【详解】(1) 由勾股定理可知, $AG = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$,

故答案为: $\sqrt{2}$

(2) 如图, 根据题意, 切点为 M ; 连接 ME 并延长, 与网格线相交于点 M_1 ; 取圆与网格线的交点 D 和格点 H , 连接 DH 并延长, 与网格线相交于点 M_2 ; 连接 M_1M_2 , 分别与 AB, AC 相交于点 N, P , 则点 M, N, P 即为所求.



三、解答题 (本大题共 7 小题, 共 66 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或推理过程)

19. 解不等式组 $\begin{cases} 2x+1 \leq 3 \textcircled{1} \\ 3x-1 \geq x-7 \textcircled{2} \end{cases}$

请结合题意填空，完成本题的解答.

(1) 解不等式①，得_____；

(2) 解不等式②，得_____；

(3) 把不等式①和②的解集在数轴上表示出来：



(4) 原不等式组的解集为_____.

【答案】(1) $x \leq 1$

(2) $x \geq -3$

(3) 见解析 (4) $-3 \leq x \leq 1$

【解析】

【分析】 本题考查的是解一元一次不等式，解一元一次不等式组；

(1) 根据解一元一次不等式基本步骤：移项、合并同类项、化系数为1可得出答案；

(2) 根据解一元一次不等式基本步骤：移项、合并同类项、化系数为1可得出答案；

(3) 根据前两问的结果，在数轴上表示不等式的解集；

(4) 根据数轴上的解集取公共部分即可.

【小问1 详解】

解：解不等式①得 $x \leq 1$,

故答案为： $x \leq 1$;

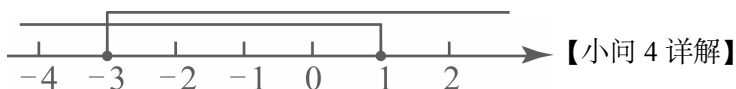
【小问2 详解】

解：解不等式②得 $x \geq -3$,

故答案为： $x \geq -3$;

【小问3 详解】

解：在数轴上表示如下：

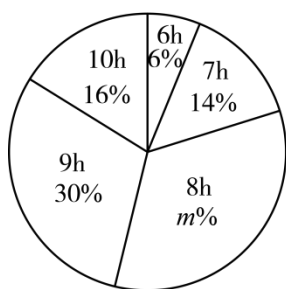


【小问4 详解】

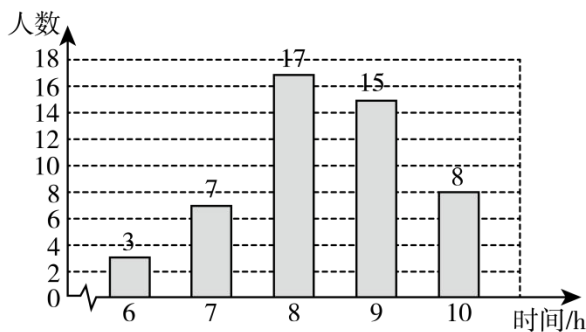
解：由数轴可得原不等式组的解集为 $-3 \leq x \leq 1$,

故答案为： $-3 \leq x \leq 1$.

20. 为了解某校八年级学生每周参加科学教育的时间（单位：h），随机调查了该校八年级 a 名学生，根据统计的结果，绘制出如下的统计图①和图②.



图①



图②

请根据相关信息，解答下列问题：

- (1) 填空： a 的值为_____，图①中 m 的值为_____，统计的这组学生每周参加科学教育的时间数据的众数和中位数分别为_____和_____；
- (2) 求统计的这组学生每周参加科学教育的时间数据的平均数；
- (3) 根据样本数据，若该校八年级共有学生 500 人，估计该校八年级学生每周参加科学教育的时间是 9 h 的人数约为多少？

【答案】(1) 50, 34, 8, 8

(2) 8.36 (3) 150 人

【解析】

【分析】本题考查条形统计图、扇形统计图，用样本估计总体，众数、中位数、平均数，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答。

(1) 根据 6h 的人数和百分比可以求得本次接受调查的学生人数，再由总人数和 8h 的人数即可求出 m ；根据条形统计图中的数据，可以得到这 50 个样本数据的众数、中位数；

(2) 根据平均数的定义进行解答即可；

(3) 在所抽取的样本中，每周参加科学教育的时间是 9 h 的学生占 30%，用八年级共有学生数乘以 30% 即可得到答案。

【小问 1 详解】

解： $3 \div 6\% = 50$ (人)，

$m\% = 17 \div 50 \times 100\% = 34\%$ ，

$\therefore m = 34$ ，

在这组数据中，8 出现了 17 次，次数最多，

$\therefore$ 众数是 8，

将这组数据从小到大依次排列，处于最中间的第 25，26 名学生的分数都是 8，

$\therefore$ 中位数是 $(8+8) \div 2 = 8$,

故答案为: 50, 34, 8, 8.

【小问 2 详解】

$$\therefore \bar{x} = \frac{6 \times 3 + 7 \times 7 + 8 \times 17 + 9 \times 15 + 10 \times 8}{3 + 7 + 17 + 15 + 8} = 8.36,$$

$\therefore$ 这组数据的平均数是 8.36.

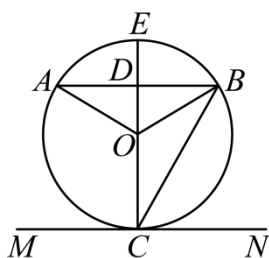
【小问 3 详解】

$\therefore$ 在所抽取的样本中, 每周参加科学教育的时间是 9 h 的学生占 30%,

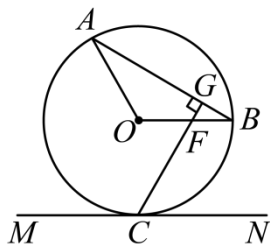
$\therefore$ 根据样本数据, 估计该校八年级学生 500 人中, 每周参加科学教育的时间是 9 h 的学生占 30%, 有 $500 \times 30\% = 150$.

$\therefore$ 估计该校八年级学生每周参加科学教育的时间是 9 h 的人数约为 150.

21. 已知 $\triangle AOB$ 中, $\angle ABO = 30^\circ$, AB 为 $\odot O$ 的弦, 直线 MN 与 $\odot O$ 相切于点 C .



图①



图②

(1) 如图①, 若 $AB \parallel MN$, 直径 CE 与 AB 相交于点 D , 求 $\angle AOB$ 和 $\angle BCE$ 的大小;

(2) 如图②, 若 $OB \parallel MN$, $CG \perp AB$, 垂足为 G , CG 与 OB 相交于点 F , $OA = 3$, 求线段 OF 的长.

【答案】(1) $\angle AOB = 120^\circ$; $\angle BCE = 30^\circ$

(2) $\sqrt{3}$

【解析】

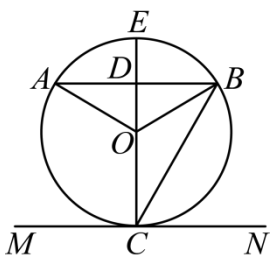
【分析】本题考查等腰三角形的性质, 切线的性质, 解直角三角形, 灵活运用相关性质定理是解答本题的关键.

(1) 根据等边对等角得到 $\angle A = \angle ABO$, 然后利用三角形的内角和得到 $\angle AOB = 180^\circ - 2\angle ABO = 120^\circ$, 然后利用平行线的性质解题即可;

(2) 连接 OC , 则 $CG \perp AB$, 然后求出 $\angle CFO = \angle BFG = 60^\circ$, 再在 $Rt\triangle COF$ 中运用三角函数解题即可.

【小问 1 详解】

$\because AB$ 为 $\odot O$ 的弦,



$\therefore OA = OB$. 得 $\angle A = \angle ABO$.

$\because \triangle AOB$ 中, $\angle A + \angle ABO + \angle AOB = 180^\circ$,

又 $\angle ABO = 30^\circ$,

$\therefore \angle AOB = 180^\circ - 2\angle ABO = 120^\circ$.

$\because$ 直线 MN 与 $\odot O$ 相切于点 C , CE 为 $\odot O$ 的直径,

$\therefore CE \perp MN$. 即 $\angle ECM = 90^\circ$.

又 $AB \parallel MN$,

$\therefore \angle CDB = \angle ECM = 90^\circ$.

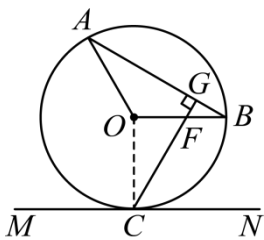
在 $Rt\triangle ODB$ 中, $\angle BOE = 90^\circ - \angle ABO = 60^\circ$.

$\because \angle BCE = \frac{1}{2}\angle BOE$,

$\therefore \angle BCE = 30^\circ$.

【小问 2 详解】

如图, 连接 OC .



$\because$ 直线 MN 与 $\odot O$ 相切于点 C , CE 为 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle OCM = 90^\circ$

$\because OC \parallel MN$

$\therefore \angle OCM = \angle COB = 90^\circ$.

$\because CG \perp AB$, 得 $\angle FGB = 90^\circ$.

$\therefore$ 在 $Rt\triangle FGB$ 中, 由 $\angle ABO = 30^\circ$,

得 $\angle BFG = 90^\circ - \angle ABO = 60^\circ$.

$\therefore \angle CFO = \angle BFG = 60^\circ$.

在 $Rt\triangle COF$ 中, $\tan \angle CFO = \frac{OC}{OF}$, $OC = OA = 3$,

$$\therefore OF = \frac{OC}{\tan \angle CFO} = \frac{3}{\tan 60^\circ} = \sqrt{3}.$$

22. 综合与实践活动中, 要用测角仪测量天津海河上一座桥的桥塔 AB 的高度 (如图①). 某学习小组设计了一个方案: 如图②, 点 C, D, E 依次在同一条水平直线上, $DE = 36\text{ m}$, $EC \perp AB$, 垂足为 C . 在 D 处测得桥塔顶部 B 的仰角 ($\angle CDB$) 为 45° , 测得桥塔底部 A 的俯角 ($\angle CDA$) 为 6° , 又在 E 处测得桥塔顶部 B 的仰角 ($\angle CEB$) 为 31° .



图 ①

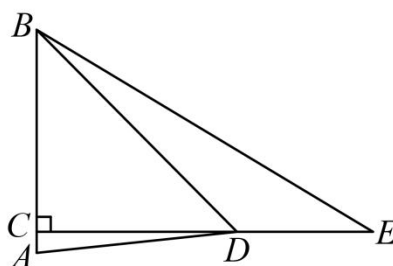


图 ②

(1) 求线段 CD 的长 (结果取整数);

(2) 求桥塔 AB 的高度 (结果取整数). 参考数据: $\tan 31^\circ \approx 0.6$, $\tan 6^\circ \approx 0.1$.

【答案】 (1) 54m

(2) 59m

【解析】

【分析】 此题考查了解直角三角形的应用, 数形结合是解题的关键.

(1) 设 $CD = x$, 在 $Rt\triangle BCD$ 中, $BC = CD \cdot \tan \angle CDB = x \cdot \tan 45^\circ = x$. 在 $Rt\triangle BCE$ 中, $BC = CE \cdot \tan \angle CEB = (x + 36) \cdot \tan 31^\circ$. 则 $x = (x + 36) \cdot \tan 31^\circ$. 解方程即可;

(2) 求出 AC , 根据 $AB = AC + BC$ 即可得到答案.

【小问 1 详解】

解: 设 $CD = x$, 由 $DE = 36$, 得 $CE = CD + DE = x + 36$.

$\because EC \perp AB$, 垂足为 C ,

$\therefore \angle BCE = \angle ACD = 90^\circ$.

在 $Rt\triangle BCD$ 中, $\tan \angle CDB = \frac{BC}{CD}$, $\angle CDB = 45^\circ$,

$$\therefore BC = CD \cdot \tan \angle CDB = x \cdot \tan 45^\circ = x.$$

$$\text{在 } Rt\triangle BCE \text{ 中, } \tan \angle CEB = \frac{BC}{CE}, \angle CEB = 31^\circ,$$

$$\therefore BC = CE \cdot \tan \angle CEB = (x + 36) \cdot \tan 31^\circ.$$

$$\therefore x = (x + 36) \cdot \tan 31^\circ.$$

$$\text{得 } x = \frac{36 \times \tan 31^\circ}{1 - \tan 31^\circ} \approx \frac{36 \times 0.6}{1 - 0.6} = 54.$$

答：线段 CD 的长约为 54 m .

【小问 2 详解】

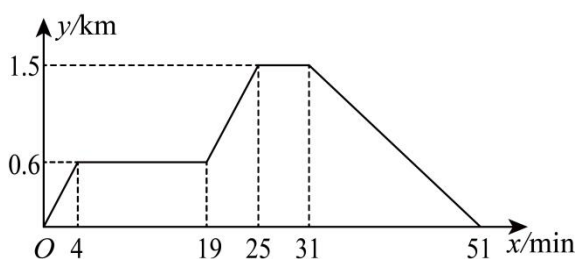
$$\text{在 } Rt\triangle ACD \text{ 中, } \tan \angle CDA = \frac{AC}{CD}, \angle CDA = 6^\circ,$$

$$\therefore AC = CD \cdot \tan \angle CDA \approx 54 \times \tan 6^\circ \approx 54 \times 0.1 = 5.4.$$

$$\therefore AB = AC + BC \approx 5.4 + 54 \approx 59.$$

答：桥塔 AB 的高度约为 59 m .

23. 已知张华的家、画社、文化广场依次在同一条直线上，画社离家 0.6 km ，文化广场离家 1.5 km . 张华从家出发，先匀速骑行了 4 min 到画社，在画社停留了 15 min ，之后匀速骑行了 6 min 到文化广场，在文化广场停留 6 min 后，再匀速步行了 20 min 返回家. 下面图中 x 表示时间， y 表示离家的距离. 图象反映了这个过程中张华离家的距离与时间之间的对应关系.



请根据相关信息，回答下列问题：

(1) ①填表：

张华离开家的时间 /min	1	4	13	30
张华离家的距离/km		0.6		

②填空：张华从文化广场返回家的速度为 _____ km/min ；

③当 $0 \leq x \leq 25$ 时，请直接写出张华离家的距离 y 关于时间 x 的函数解析式；

(2) 当张华离开家 8 min 时，他的爸爸也从家出发匀速步行了 20 min 直接到达了文化广场，那么从画社到文化广场的途中 ($0.6 < y < 1.5$) 两人相遇时离家的距离是多少？（直接写出结果即可）

【答案】(1) ① 0.15, 0.6, 1.5；② 0.075；③ 当 $0 \leq x \leq 4$ 时， $y = 0.15x$ ；当 $4 < x \leq 19$ 时， $y = 0.6$ ；当 $19 < x \leq 25$ 时， $y = 0.15x - 2.25$

(2) 1.05 km

【解析】

【分析】本题考查了从函数图象获取信息，求函数的解析式，列一元一次方程解决实际问题，准确理解题意，熟练掌握知识点是解题的关键.

(1) ①根据图象作答即可；

②根据图象，由张华从文化广场返回家的距离除以时间求解即可；

③分段求解， $0 \leq x \leq 4$ ，可得出 $y = 0.15x$ ，当 $4 < x \leq 19$ 时， $y = 0.6$ ；当 $19 < x \leq 25$ 时，设次数的函数解析式为： $y = kx + b$ ，把 $(19, 0.6)$ ， $(25, 1.5)$ 代入 $y = kx + b$ ，用待定系数法求解即可.

(2) 先求出张华爸爸的速度，设张华爸爸距家 y' km，则 $y' = 0.075x - 0.6$ ，当两人相遇书时有 $0.15x - 2.25 = 0.075x - 0.6$ ，列一元一次方程求解即可进一步得出答案.

【小问 1 详解】

解：①画社离家 0.6 km，张华从家出发，先匀速骑行了 4 min 到画社，

$\therefore$ 张华的骑行速度为 $0.6 \div 4 = 0.15$ (km/min)，

$\therefore$ 张华离家 1 min 时，张华离家 $0.15 \times 1 = 0.15$ km，

张华离家 13 min 时，还在画社，故此时张华离家还是 0.6 km，

张华离家 30 min 时，在文化广场，故此时张华离家还是 1.5 km.

故答案为：0.15, 0.6, 1.5.

② $1.5 \div (5.1 - 3.1) = 0.075$ km/min，

故答案为：0.075.

③当 $0 \leq x \leq 4$ 时，张华的匀速骑行速度为 $0.6 \div 4 = 0.15$ (km/min)，

$$\therefore y = 0.15x;$$

当 $4 < x \leq 19$ 时, $y = 0.6$;

当 $19 < x \leq 25$ 时, 设次数的函数解析式为: $y = kx + b$,

把 $(19, 0.6)$, $(25, 1.5)$ 代入 $y = kx + b$, 可得出:

$$\begin{cases} 19k + b = 0.6 \\ 25k + b = 1.5 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = 0.15 \\ b = -2.25 \end{cases}$$

$$\therefore y = 0.15x - 2.25,$$

综上: 当 $0 \leq x \leq 4$ 时, $y = 0.15x$, 当 $4 < x \leq 19$ 时, $y = 0.6$, 当 $19 < x \leq 25$ 时, $y = 0.15x - 2.25$.

【小问 2 详解】

张华爸爸的速度为: $1.5 \div 20 = 0.075 (\text{km} / \text{min})$,

设张华爸爸距家 $y' \text{km}$, 则 $y' = 0.075(x - 8) = 0.075x - 0.6$,

当两人从画社到文化广场的途中 $(0.6 < y < 1.5)$ 两人相遇时, 有 $0.15x - 2.25 = 0.075x - 0.6$,

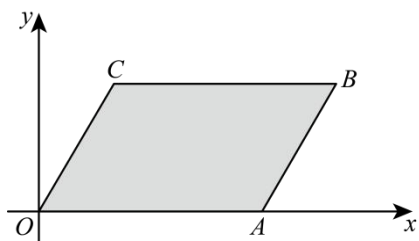
解得: $x = 22$,

$$\therefore y' = 0.075(x - 8) = 0.075x - 0.6 = 0.075 \times 22 - 0.6 = 1.05 \text{km},$$

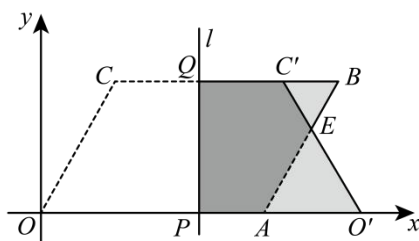
故从画社到文化广场的途中 $(0.6 < y < 1.5)$ 两人相遇时离家的距离是 1.05km .

24. 将一个平行四边形纸片 $OABC$ 放置在平面直角坐标系中, 点 $O(0, 0)$, 点 $A(3, 0)$, 点 B, C 在第一象限,

且 $OC = 2, \angle AOC = 60^\circ$.



图①



图②

(1) 填空: 如图①, 点 C 的坐标为 _____, 点 B 的坐标为 _____;

(2) 若 P 为 x 轴的正半轴上一动点, 过点 P 作直线 $l \perp x$ 轴, 沿直线 l 折叠该纸片, 折叠后点 O 的对应点 O' 落在 x 轴的正半轴上, 点 C 的对应点为 C' . 设 $OP = t$.

①如图②, 若直线 l 与边 CB 相交于点 Q , 当折叠后四边形 $PO'C'Q$ 与 $\square OABC$ 重叠部分为五边形时, $O'C'$ 与 AB 相交于点 E . 试用含有 t 的式子表示线段 BE 的长, 并直接写出 t 的取值范围;

②设折叠后重叠部分的面积为 S , 当 $\frac{2}{3} \leq t \leq \frac{11}{4}$ 时, 求 S 的取值范围 (直接写出结果即可).

【答案】(1) $(1, \sqrt{3}), (4, \sqrt{3})$

(2) ① $\frac{3}{2} < t < \frac{5}{2}$; ② $\frac{2\sqrt{3}}{9} \leq S \leq \frac{5\sqrt{3}}{4}$

【解析】

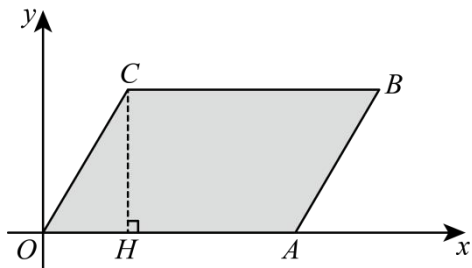
【分析】(1) 根据平行四边形的性质, 得出 $OC = AB = 2$, $CB = OA = 3$, $\angle B = \angle AOC = 60^\circ$, 结合勾股定理 $CH = \sqrt{OC^2 - OH^2} = \sqrt{3}$, 即可作答.

(2) ①由折叠得 $\angle OO'C' = \angle AOC = 60^\circ$, $O'P = OP$, 再证明 $\triangle EO'A$ 是等边三角形, 运用线段的和差关系列式化简, $BE = AB - AE = 5 - 2t$, 考虑当 O' 与点 A 重合时, 和当 C' 与点 B 重合时, 分别作图, 得出 t 的取值范围, 即可作答.

②根据①的结论, 根据解直角三角形的性质得出 $MP = \sqrt{3}t$, 再分别以 $\frac{2}{3} \leq t < 1$ 时, $1 \leq t \leq \frac{3}{2}$ 时, $\frac{3}{2} < t < \frac{5}{2}$, $\frac{5}{2} \leq t \leq \frac{11}{4}$ 分别作图, 运用数形结合思路列式计算, 即可作答.

【小问 1 详解】

解: 如图: 过点 C 作 $CH \perp OA$



$\therefore$ 四边形 $OABC$ 是平行四边形, $OC = 2$, $\angle AOC = 60^\circ$, $A(3, 0)$

$\therefore OC = AB = 2$, $CB = OA = 3$, $\angle B = \angle AOC = 60^\circ$,

$\therefore CH \perp OA$

$\therefore \angle OCH = 30^\circ$

$\therefore OH = \frac{1}{2}OC = 1$

$\therefore CH = \sqrt{OC^2 - OH^2} = \sqrt{3}$

$\therefore C(1, \sqrt{3})$

$$\because CB = OA = 3$$

$$\therefore 1 + 3 = 4$$

$$\therefore B(4, \sqrt{3})$$

故答案为: $(1, \sqrt{3}), (4, \sqrt{3})$

【小问 2 详解】

解: ① $\because$ 过点 P 作直线 $l \perp x$ 轴, 沿直线 l 折叠该纸片, 折叠后点 O 的对应点 O' 落在 x 轴的正半轴上,

$$\therefore \angle OO'C' = \angle AOC = 60^\circ, \quad O'P = OP,$$

$$\therefore OO' = 2OP = 2t$$

$$\therefore A(3, 0)$$

$$\therefore OA = 3$$

$$\therefore AO' = OO' - OA = 2t - 3$$

$\because$ 四边形 $OABC$ 为平行四边形,

$$\therefore AB = OC = 2, \quad AB \parallel OC, \quad \angle O'AB = \angle AOC = 60^\circ$$

$\therefore \triangle EO'A$ 是等边三角形

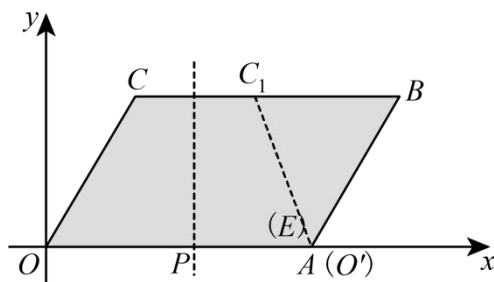
$$\therefore AE = AO' = 2t - 3$$

$$\therefore BE = AB - AE$$

$$\therefore BE = AB - AE = 2 - (2t - 3) = 5 - 2t$$

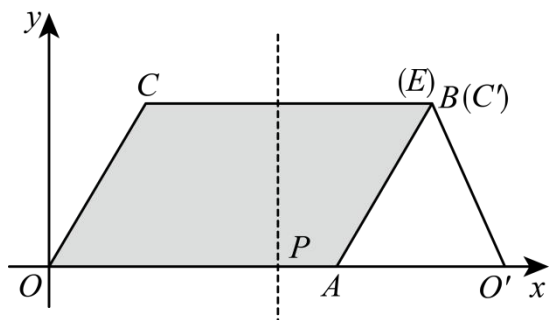
$$\therefore BE = -2t + 5;$$

当 O' 与点 A 重合时,



此时 AB 与 $C'O'$ 的交点为 E 与 A 重合, $OP = \frac{1}{2}OA = \frac{3}{2}$

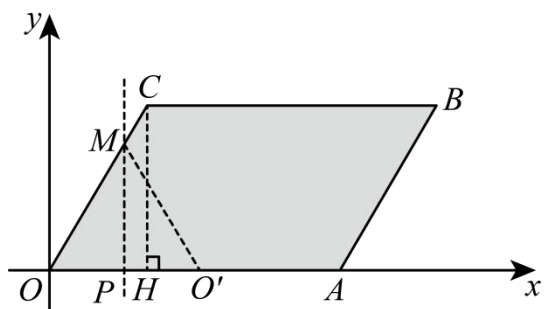
如图: 当 C' 与点 B 重合时,



此时 AB 与 $C'O'$ 的交点为 E 与 B 重合, $OP = \frac{CB+1}{2} = \frac{5}{2}$

$\therefore t$ 的取值范围为 $\frac{3}{2} < t < \frac{5}{2}$;

②如图: 过点 C 作 $CH \perp OA$



由 (1) 得出 $C(1, \sqrt{3})$, $\angle COA = 60^\circ$

$$\therefore \tan 60^\circ = \frac{MP}{OP}, \quad \sqrt{3} = \frac{MP}{t}$$

$$\therefore MP = \sqrt{3}t$$

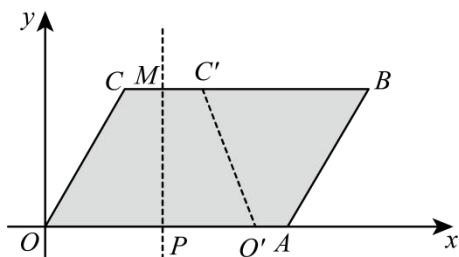
$$\text{当 } \frac{2}{3} \leq t < 1 \text{ 时, } S = \frac{1}{2} O'P = \frac{1}{2} OP \times MP = \frac{1}{2} t \times \sqrt{3}t = \frac{\sqrt{3}}{2} t^2$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} > 0, \text{ 开口向上, 对称轴直线 } t = 0$$

$$\therefore \text{在 } \frac{2}{3} \leq t < 1 \text{ 时, } S = \frac{\sqrt{3}}{2} t^2 \text{ 随着 } t \text{ 的增大而增大}$$

$$\therefore \frac{2\sqrt{3}}{9} \leq S < \frac{\sqrt{3}}{2};$$

当 $1 \leq t \leq \frac{3}{2}$ 时, 如图:



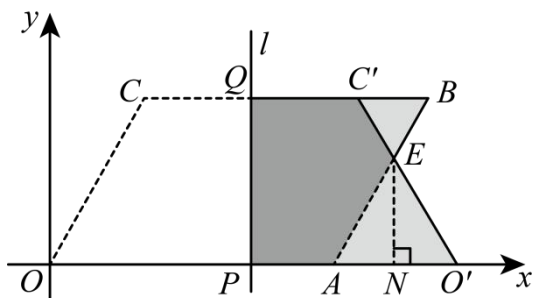
$$S = \frac{1}{2}(O'P + MC') \times MP = \frac{1}{2}(OP + CM) \times MP = \frac{1}{2}(t + t - 1) \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}(2t - 1) = \sqrt{3}t - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore \sqrt{3} > 0$, S 随着 t 的增大而增大

$$\therefore \text{在 } t = \frac{3}{2} \text{ 时 } S = \sqrt{3} \times \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}; \text{ 在 } t = 1 \text{ 时 } S = \sqrt{3} \times 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\therefore \text{当 } 1 \leq t \leq \frac{3}{2} \text{ 时, } \frac{\sqrt{3}}{2} \leq S \leq \sqrt{3}$$

$\therefore$ 当 $\frac{3}{2} < t < \frac{5}{2}$ 时, 过点 E 作, 如图:



$\therefore$ 由①得出 $\triangle EO'A$ 是等边三角形, $EN \perp AO$

$$\therefore AN = \frac{1}{2}AO' = \frac{1}{2}(2t - 3) = t - \frac{3}{2},$$

$$\therefore \tan \angle EAO' = \sqrt{3}, \quad \sqrt{3} = \frac{EN}{AN}$$

$$\therefore EN = \sqrt{3} \left(t - \frac{3}{2} \right)$$

$$S = \sqrt{3}t - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times AO' \times EN$$

$$= \sqrt{3}t - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \left[(2t - 3) \times \sqrt{3} \left(t - \frac{3}{2} \right) \right]$$

$$= -\sqrt{3}t^2 + 4\sqrt{3}t - \frac{11\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore -\sqrt{3} < 0$$

$\therefore$ 开口向下，在 $t = -\frac{4\sqrt{3}}{2 \times (-\sqrt{3})} = 2$ 时， S 有最大值

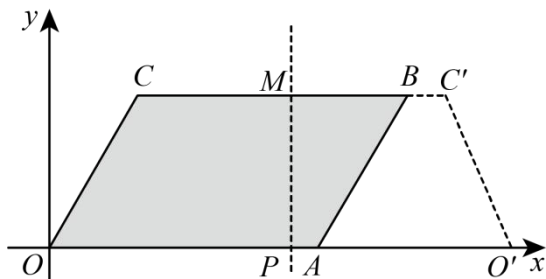
$\therefore$

$$\therefore \text{在 } \frac{3}{2} < t < \frac{5}{2} \text{ 时, } \left| 2 - \frac{3}{2} \right| = \left| 2 - \frac{5}{2} \right|$$

$$\therefore S = -\sqrt{3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4\sqrt{3} \times \frac{3}{2} - \frac{11\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$$

则在 $\frac{3}{2} < t < \frac{5}{2}$ 时, $\sqrt{3} < S \leq \frac{5\sqrt{3}}{4}$;

当 $\frac{5}{2} \leq t \leq \frac{11}{4}$ 时, 如图,



$$S = \sqrt{3}t - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times (AO' + BC') \times MP = \sqrt{3}t - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times (2t - 3 + 2t - 5) \times \sqrt{3} = -\sqrt{3}t + \frac{7\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore -\sqrt{3} < 0$, S 随着 t 的增大而减小

$\therefore$ 在 $\frac{5}{2} \leq t \leq \frac{11}{4}$ 时, 则把 $t = \frac{5}{2}$, $t = \frac{11}{4}$ 分别代入 $S = -\sqrt{3}t + \frac{7\sqrt{3}}{2}$

$$\text{得出 } S = -\sqrt{3} \times \frac{5}{2} + \frac{7\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, \quad S = -\sqrt{3} \times \frac{11}{4} + \frac{7\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$\therefore$ 在 $\frac{5}{2} \leq t \leq \frac{11}{4}$ 时, $\frac{3\sqrt{3}}{4} \leq S \leq \sqrt{3}$

综上: $\frac{2\sqrt{3}}{9} \leq S \leq \frac{5\sqrt{3}}{4}$

【点睛】 本题考查了平行四边形的性质，解直角三角形的性质，折叠性质，二次函数的图象性质，正确掌握相关性质内容是解题的关键.

25. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, $a > 0$) 的顶点为 P , 且 $2a + b = 0$, 对称轴与 x 轴相交

于点 D ，点 $M(m, 1)$ 在抛物线上， $m > 1$ ， O 为坐标原点.

(1) 当 $a = 1$ ， $c = -1$ 时，求该抛物线顶点 P 的坐标；

(2) 当 $OM = OP = \frac{\sqrt{13}}{2}$ 时，求 a 的值；

(3) 若 N 是抛物线上的点，且点 N 在第四象限， $\angle MDN = 90^\circ$ ， $DM = DN$ ，点 E 在线段 MN 上，点 F 在线段 DN 上， $NE + NF = \sqrt{2}DM$ ，当 $DE + MF$ 取得最小值为 $\sqrt{15}$ 时，求 a 的值.

【答案】(1) 该抛物线顶点 P 的坐标为 $(1, -2)$

(2) 10 (3) 1

【解析】

【分析】(1) 先求得 a 、 b 的值，再配成顶点式，即可求解；

(2) 过点 $M(m, 1)$ 作 $MH \perp x$ 轴，在 $\text{Rt}\triangle MOH$ 中，利用勾股定理求得 $m = \frac{3}{2}$ ，在 $\text{Rt}\triangle OPD$ 中，勾股定理求得 $PD = \frac{3}{2}$ ，得该抛物线顶点 P 的坐标为 $(1, -\frac{3}{2})$ ，再利用待定系数法求解即可；

(3) 过点 $M(m, 1)$ 作 $MH \perp x$ 轴，过点 N 作 $NK \perp x$ 轴，证明 $\triangle NDK \cong \triangle DMH$ ，求得点 N 的坐标为 $(2, 1-m)$ ，在 $\text{Rt}\triangle DMN$ 中，利用勾股定理结合题意求得 $ME = NF$ ，在 $\triangle DMN$ 的外部，作 $\angle DNG = 45^\circ$ ，且 $NG = DM$ ，证明 $\triangle GNF \cong \triangle DME$ ，得到 $GF = DE$ ，当满足条件的点 F 落在线段 GM 上时， $DE + MF$ 取得最小值，求得点 M 的坐标为 $(3, 1)$ ，再利用待定系数法求解即可.

【小问 1 详解】

解： $\because 2a + b = 0$ ， $a = 1$ ，得 $b = -2a = -2$. 又 $c = -1$ ，

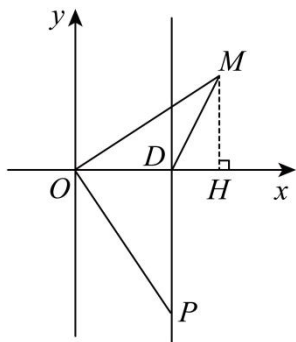
$\therefore$ 该抛物线的解析式为 $y = x^2 - 2x - 1$.

$\because y = x^2 - 2x - 1 = (x - 1)^2 - 2$ ，

$\therefore$ 该抛物线顶点 P 的坐标为 $(1, -2)$ ；

【小问 2 详解】

解：过点 $M(m, 1)$ 作 $MH \perp x$ 轴，垂足为 H ， $m > 1$ ，



则 $\angle MHO = 90^\circ$, $HM = 1$, $OH = m$.

在 $\text{Rt}\triangle MOH$ 中, 由 $HM^2 + OH^2 = OM^2$, $OM = \frac{\sqrt{13}}{2}$,

$$\therefore 1 + m^2 = \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2.$$

解得 $m_1 = \frac{3}{2}$, $m_2 = -\frac{3}{2}$ (舍).

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$.

$\because 2a + b = 0$, 即 $-\frac{b}{2a} = 1$.

$\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 - 2ax + c$ 的对称轴为 $x = 1$.

$\because$ 对称轴与 x 轴相交于点 D , 则 $OD = 1$, $\angle ODP = 90^\circ$.

在 $\text{Rt}\triangle OPD$ 中, 由 $OD^2 + PD^2 = OP^2$, $OP = \frac{\sqrt{13}}{2}$,

$$\therefore 1 + PD^2 = \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2.$$

解得 $PD = \frac{3}{2}$ 负值舍去.

由 $a > 0$, 得该抛物线顶点 P 的坐标为 $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$.

$\therefore$ 该抛物线的解析式为 $y = a(x-1)^2 - \frac{3}{2}$.

$\because$ 点 $M\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ 在该抛物线上, 有 $1 = a\left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 - \frac{3}{2}$.

$\therefore a = 10$;

【小问 3 详解】

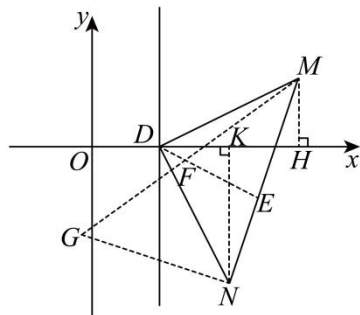
解：过点 $M(m, 1)$ 作 $MH \perp x$ 轴，垂足为 H ， $m > 1$ ，

则 $\angle MHO = 90^\circ$ ， $HM = 1$ ， $OH = m$ 。

$\therefore DH = OH - OD = m - 1$ 。

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle DMH$ 中， $DM^2 = DH^2 + HM^2 = (m-1)^2 + 1$ 。

过点 N 作 $NK \perp x$ 轴，垂足为 K ，则 $\angle DKN = 90^\circ$ 。



$\because \angle MDN = 90^\circ$ ， $DM = DN$ ，又 $\angle DNK = 90^\circ - \angle NDK = \angle MDH$ ，

$\therefore \triangle NDK \cong \triangle DMH$ 。

$\therefore DK = MH = 1$ ， $NK = DH = m - 1$ ，

$\therefore$ 点 N 的坐标为 $(2, 1 - m)$ 。

在 $\text{Rt}\triangle DMN$ 中， $\angle DMN = \angle DNM = 45^\circ$ ，

$MN^2 = DM^2 + DN^2 = 2DM^2$ ，即 $MN = \sqrt{2}DM$ 。

根据题意， $NE + NF = \sqrt{2}DM$ ，得 $ME = NF$ 。

在 $\triangle DMN$ 的外部，作 $\angle DNG = \angle DME = 45^\circ$ ，且 $NG = DM$ ，连接 GF ，

得 $\angle MNG = \angle DNM + \angle DNG = 90^\circ$ 。

$\therefore \triangle GNF \cong \triangle DME$ 。

$\therefore GF = DE$ 。

$\therefore DE + MF = GF + MF \geq GM$ 。

当满足条件的点 F 落在线段 GM 上时， $DE + MF$ 取得最小值，即 $GM = \sqrt{15}$ 。

在 $\text{Rt}\triangle GMN$ 中， $GM^2 = NG^2 + MN^2 = 3DM^2$ ，

$\therefore (\sqrt{15})^2 = 3DM^2$ 。得 $DM^2 = 5$ 。

$\therefore (m-1)^2 + 1 = 5$ 。解得 $m_1 = 3$ ， $m_2 = -1$ (舍)。

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(3, 1)$ ，点 N 的坐标为 $(2, -2)$ 。

∵ 点 $M(3,1)$, $N(2,-2)$ 都在抛物线 $y = ax^2 - 2ax + c$ 上,

得 $1 = 9a - 6a + c$, $-2 = 4a - 4a + c$.

∴ $a = 1$.

【点睛】 本题考查待定系数法求二次函数解析式，二次函数的顶点式，勾股定理，垂线段最短，全等三角形的判定和性质，正确引出辅助线解决问题是解题的关键.