

秘密★启用前

2024 年遂宁市初中毕业暨高中阶段学校招生考试

数学试卷

试卷满分 150 分 考试时间 120 分钟

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的学校、姓名、准考证号用 0.5 毫米的黑色墨迹签字笔填写在答题卡上，并检查条形码粘贴是否正确。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号；回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题（本大题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分。在每个小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 下列各数中，无理数是（ ）

- A. -2 B. $\frac{1}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. 0

【答案】C

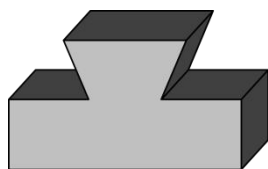
【解析】

【分析】本题考查了无理数的概念，根据无限不循环小数为无理数即可求解，解答本题的关键是掌握无理数的三种形式：1、开方开不尽的数，2、无限不循环小数，3、含有 π 的数。

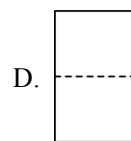
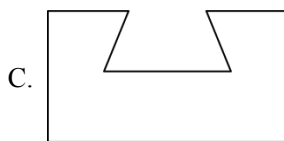
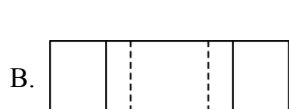
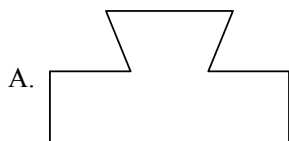
【详解】解： -2 ， $\frac{1}{2}$ ， 0 都是有理数， $\sqrt{2}$ 是无理数，

故选：C.

2. 古代中国诸多技艺均领先世界。榫卯结构就是其中之一，榫卯是在两个木构件上所采用的一种凹凸结合的连接方式。凸出部分叫榫（或榫头），凹进部分叫卯（或榫眼、榫槽），榫和卯咬合，起到连接作用，右图是某个部件“榫”的实物图，它的主视图是（ ）



正面

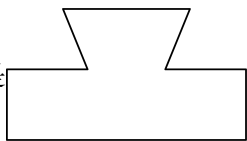


【答案】A

【解析】

【分析】 本题考查了三视图，根据从正面看到的图形即可求解，掌握三视图的画法是解题的关键.

【详解】 解：由实物图可知，从正面看到的图形是



故选：A.

3. 中国某汽车公司坚持“技术为王，创新为本”的发展理念，凭借研发实力和创新的模式在电池、电子、乘用车、商用车和轨道交通等多个领域发挥着举足轻重的作用. 2024 年第一季度，该公司以 62 万辆的销售成绩稳居新能源汽车销量榜榜首，市场占有率高达 19.4%. 将销售数据用科学记数法表示为 ()

- A. 0.62×10^6 B. 6.2×10^6 C. 6.2×10^5 D. 62×10^5

【答案】 C

【解析】

【分析】 此题考查了科学记数法的表示方法，根据科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数即可求解，解题的关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

【详解】 解：62 万 $= 6.2 \times 10^5$ ，

故选：C.

4. 下列运算结果正确的是 ()

- A. $3a - 2a = 1$ B. $a^2 \cdot a^3 = a^6$
C. $(-a)^4 = -a^4$ D. $(a+3)(a-3) = a^2 - 9$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了整式的运算，根据合并同类项法则、同底数幂的乘法、积的乘方运算、平方差公式分别运算即可判断求解，掌握整式的运算法则是解题的关键.

【详解】 解：A、 $3a - 2a = a$ ，该选项错误，不合题意；

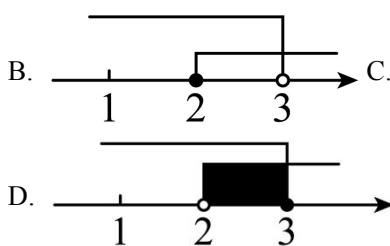
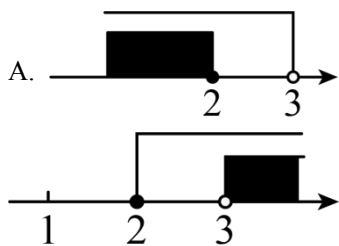
B、 $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ，该选项错误，不合题意；

C、 $(-a)^4 = a^4$ ，该选项错误，不合题意；

D、 $(a+3)(a-3) = a^2 - 9$ ，该选项正确，符合题意；

故选：D.

5. 不等式组 $\begin{cases} 3x-2 < 2x+1 \\ x \geq 2 \end{cases}$ 的解集在数轴上表示为 ()



【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了在数轴上表示不等式组的解集，先求出不等式组的解集，再根据解集在数轴上表示出来即可判断求解，正确求出一元一次不等式组的解集是解题的关键.

【详解】解： $\begin{cases} 3x-2 < 2x+1 \text{ ①} \\ x \geq 2 \text{ ②} \end{cases}$,

由①得， $x < 3$,

由②得， $x \geq 2$,

$\therefore$ 不等式组的解集为 $2 \leq x < 3$,

$\therefore$ 不等式组的解集在数轴上表示为

故选：B.

6. 佩佩在“黄娥古镇”研学时学习扎染技术，得到了一个内角和为 1080° 的正多边形图案，这个正多边形的每个外角为 ()

A. 36°

B. 40°

C. 45°

D. 60°

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了正多边形的外角，设这个正多边形的边数为 n ，先根据内角和求出正多边形的边数，再用外角和 360° 除以边数即可求解，掌握正多边形的性质是解题的关键.

【详解】解：设这个正多边形的边数为 n ,

则 $(n-2) \times 180^\circ = 1080^\circ$,

$\therefore n = 8$,

$\therefore$ 这个正多边形的每个外角为 $360^\circ \div 8 = 45^\circ$,

故选：C.

7. 分式方程 $\frac{2}{x-1} = 1 - \frac{m}{x-1}$ 的解为正数，则 m 的取值范围 ()

- A. $m > -3$ B. $m > -3$ 且 $m \neq -2$
C. $m < 3$ D. $m < 3$ 且 $m \neq -2$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了解分式方程及分式方程的解，先解分式方程，求出分式方程的解，再根据分式方程解的情况解答即可求解，正确求出分式方程的解是解题的关键.

【详解】解：方程两边同时乘以 $x-1$ 得， $2 = x-1-m$ ，

解得 $x = m+3$ ，

$\because$ 分式方程 $\frac{2}{x-1} = 1 - \frac{m}{x-1}$ 的解为正数，

$\therefore m+3 > 0$ ，

$\therefore m > -3$ ，

又 $\because x \neq 1$ ，

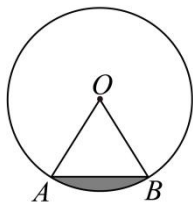
即 $m+3 \neq 1$ ，

$\therefore m \neq -2$ ，

$\therefore m$ 的取值范围为 $m > -3$ 且 $m \neq -2$ ，

故选：B.

8. 工人师傅在检查排污管道时发现淤泥堆积. 如图所示，排污管道的横截面是直径为2米的圆，为预估淤泥量，测得淤泥横截面（图中阴影部分）宽 AB 为1米，请计算出淤泥横截面的面积 ()



- A. $\frac{1}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{1}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$ D. $\frac{1}{6}\pi - \frac{1}{4}$

【答案】A

【解析】

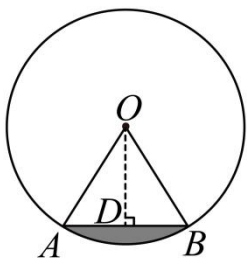
【分析】本题考查了垂径定理，勾股定理，等边三角形的判定和性质，求不规则图形的面积，过点 O 作

$OD \perp AB$ 于 D ，由垂径定理得 $AD = BD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}$ m，由勾股定理得 $OD = \frac{\sqrt{3}}{2}$ m，又根据圆的直径为2

米可得 $OA = OB = AB$ ，得到 $\triangle AOB$ 为等边三角形，即得 $\angle AOB = 60^\circ$ ，再根据淤泥横截面的面积

$= S_{\text{扇形}AOB} - S_{\triangle AOB}$ 即可求解，掌握垂径定理及扇形面积计算公式是解题的关键.

【详解】解：过点 O 作 $OD \perp AB$ 于 D ，则 $AD = BD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\text{m}$ ， $\angle ADO = 90^\circ$ ，



$\therefore$ 圆的直径为 2 米，

$\therefore OA = OB = 1\text{m}$ ，

$\therefore$ 在 $Rt\triangle AOD$ 中， $OD = \sqrt{OA^2 - AD^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{m}$ ，

$\therefore OA = OB = AB$ ，

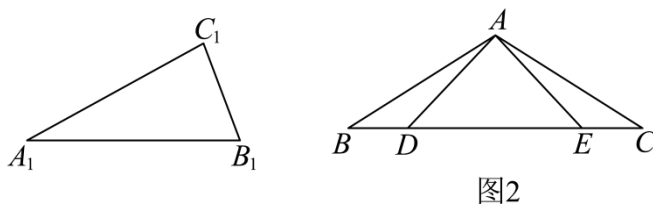
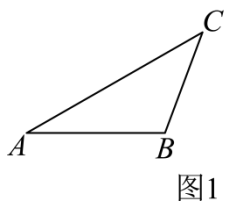
$\therefore \triangle AOB$ 为等边三角形，

$\therefore \angle AOB = 60^\circ$ ，

$\therefore$ 淤泥横截面的面积 $= S_{\text{扇形}AOB} - S_{\triangle AOB} = \frac{60\pi \times 1^2}{360} - \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{1}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\text{m}^2$ ，

故选：A.

9. 如图 1， $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 满足 $\angle A = \angle A_1$ ， $AC = A_1C_1$ ， $BC = B_1C_1$ ， $\angle C \neq \angle C_1$ ，我们称这样的两个三角形为“伪全等三角形”如图 2，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，点 D, E 在线段 BC 上，且 $BE = CD$ ，则图中共有“伪全等三角形”（ ）



A. 1 对

B. 2 对

C. 3 对

D. 4 对

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了新定义，等边对等角，根据“伪全等三角形”的定义可得两个三角形的两边相等，一个角相等，且这个角不是夹角，据此分析判断，即可求解.

【详解】解： $\because AB = AC$ ，

$$\therefore \angle B = \angle C,$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ABE$ 中, $\angle B = \angle B, AB = AB, AD = AE$,

在 $\triangle ACE, \triangle ACD$ 中, $\angle C = \angle C, AC = AC, AE = AD$,

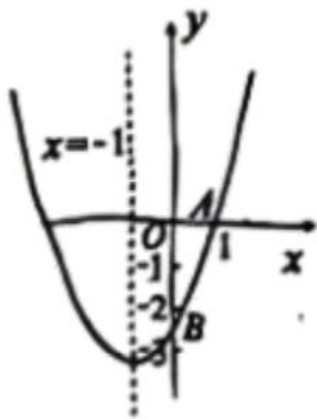
在 $\triangle ABD, \triangle ACD$ 中, $\angle B = \angle C, AB = AC, AD = AD$,

在 $\triangle ACE, \triangle ABE$ 中, $\angle B = \angle C, AE = AE, AC = AB$

综上所述, 共有 4 对“伪全等三角形”,

故选: D.

10. 如图, 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, 且 $a \neq 0$) 的对称轴为直线 $x = -1$, 且该抛物线与 x 轴交于点 $A(1, 0)$, 与 y 轴的交点 B 在 $(0, -2), (0, -3)$ 之间 (不含端点), 则下列结论正确的有多少个 ()



① $abc > 0$;

② $9a - 3b + c \geq 0$;

③ $\frac{2}{3} < a < 1$;

④若方程 $ax^2 + bx + c = x + 1$ 两根为 m, n ($m < n$), 则 $-3 < m < 1 < n$.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查二次函数和一次函数的性质, 根据题干可得 $a > 0$, $b = 2a > 0$, $-3 < c < -2$, 即可判断①错误; 根据对称轴和一个交点求得另一个交点为 $(-3, 0)$, 即可判断②错误; 将 c 和 b 用 a 表示, 即可得到 $-3 < -3a < -2$, 即可判断③正确; 结合抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 和直线 $y = x + 1$ 与 x 轴得交点, 即

可判断④正确.

【详解】解：由图可知 $a > 0$,

$\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的对称轴为直线 $x = -1$, 且该抛物线与 x 轴交于点 $A(1, 0)$,

$$\therefore x = -\frac{b}{2a} = -1, \quad a + b + c = 0,$$

则 $b = 2a > 0$,

$\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 y 轴的交点 B 在 $(0, -2)$, $(0, -3)$ 之间,

$$\therefore -3 < c < -2,$$

则 $abc < 0$, 故①错误;

设抛物线与 x 轴另一个交点 $(x, 0)$,

$\because$ 对称轴为直线 $x = -1$, 且该抛物线与 x 轴交于点 $A(1, 0)$,

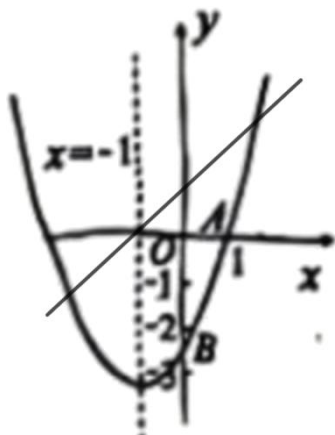
$$\therefore 1 - (-1) = -1 - x, \text{ 解得 } x = -3,$$

则 $9a - 3b + c = 0$, 故②错误;

$$\because -3 < c < -2, \quad a + b + c = 0, \quad b = 2a > 0,$$

$$\therefore -3 < -3a < -2, \text{ 解得 } \frac{2}{3} < a < 1, \text{ 故③正确;}$$

根据抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(1, 0)$ 和 $(-3, 0)$, 直线 $y = x + 1$ 过点 $(-1, 0)$ 和 $(0, 1)$, 如图,



方程 $ax^2 + bx + c = x + 1$ 两根为 m, n 满足 $-3 < m < 1 < n$, 故④正确;

故选: B.

二、填空题 (本大题共 5 个小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

11. 分解因式: $ab + 4a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $a(b + 4)$

【解析】

【分析】本题主要考查了提公因式分解因式，提公因式 a 即可解答.

【详解】解： $ab+4a=a(b+4)$

故答案为： $a(b+4)$

12. 反比例函数 $y = \frac{k-1}{x}$ 的图象在第一、三象限，则点 $(k, -3)$ 在第_____象限.

【答案】四##4

【解析】

【分析】本题考查了反比例函数的性质，点所在的象限，根据反比例函数的性质得出 $k > 1$ ，进而即可求解.

【详解】解： $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k-1}{x}$ 的图象在第一、三象限，

$$\therefore k-1 > 0$$

$$\therefore k > 1$$

$\therefore$ 点 $(k, -3)$ 在第四象限，

故答案为：四.

13. 体育老师要在甲和乙两人中选择1人参加篮球投篮大赛，下表是两人5次训练成绩，从稳定的角度考虑，老师应该选_____参加比赛.

甲	8	8	7	9	8
乙	6	9	7	9	9

【答案】甲

【解析】

【分析】本题考查了方差，分别求出甲乙的方差即可判断求解，掌握方差计算公式是解题的关键.

【详解】解：甲的平均数为 $\frac{8+8+7+9+8}{5} = 8$,

$$\therefore S_{\text{甲}}^2 = \frac{(8-8)^2 + (8-8)^2 + (7-8)^2 + (9-8)^2 + (8-8)^2}{5} = 0.4,$$

乙的平均数为 $\frac{6+9+7+9+9}{5} = 8$,

$$\therefore S_{\text{乙}}^2 = \frac{(6-8)^2 + (9-8)^2 + (7-8)^2 + (9-8)^2 + (9-8)^2}{5} = 1.6,$$

$$\therefore S_{\text{甲}}^2 < S_{\text{乙}}^2,$$

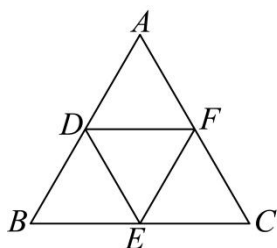
∴ 甲成绩更稳定,

∴ 应选甲参加比赛,

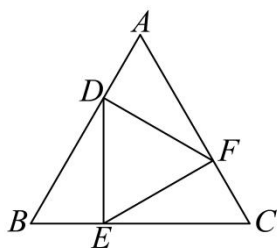
故答案为: 甲.

14. 在等边 $\triangle ABC$ 三边上分别取点 D 、 E 、 F , 使得 $AD = BE = CF$, 连结三点得到 $\triangle DEF$, 易得

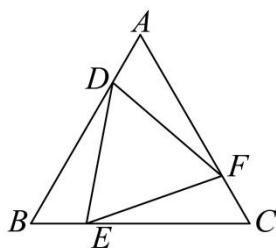
$\triangle ADF \cong \triangle BED \cong \triangle CFE$, 设 $S_{\triangle ABC} = 1$, 则 $S_{\triangle DEF} = 1 - 3S_{\triangle ADF}$



图①



图②



图③

如图①当 $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}$ 时, $S_{\triangle DEF} = 1 - 3 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

如图②当 $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$ 时, $S_{\triangle DEF} = 1 - 3 \times \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$

如图③当 $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{4}$ 时, $S_{\triangle DEF} = 1 - 3 \times \frac{3}{16} = \frac{7}{16}$

.....

直接写出, 当 $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{10}$ 时, $S_{\triangle DEF} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{73}{100}$ ##0.73

【解析】

【分析】本题主要考查数字规律性问题, 首先根据已知求得比例为 n 时, $S_{\triangle DEF} = 1 - 3 \times \frac{n-1}{n^2} = \frac{n^2 - 3n + 3}{n^2}$,

代入 $n = 10$ 即可.

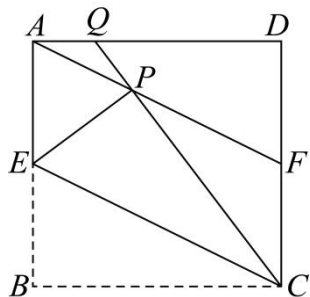
【详解】解: 根据题意可得, 当 $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{n}$ 时, $S_{\triangle DEF} = 1 - 3 \times \frac{n-1}{n^2} = \frac{n^2 - 3n + 3}{n^2}$,

则当 $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{10}$ 时, $S_{\triangle DEF} = \frac{10^2 - 3 \times 10 + 3}{10^2} = \frac{73}{100}$,

故答案为: $\frac{73}{100}$.

15. 如图, 在正方形纸片 $ABCD$ 中, E 是 AB 边的中点, 将正方形纸片沿 EC 折叠, 点 B 落在点 P 处, 延长 CP 交 AD 于点 Q , 连结 AP 并延长交 CD 于点 F . 给出以下结论: ① $\triangle AEP$ 为等腰三角形; ② F 为 CD

的中点；③ $AP:PF = 2:3$ ；④ $\cos \angle DCQ = \frac{3}{4}$. 其中正确结论是_____. (填序号)

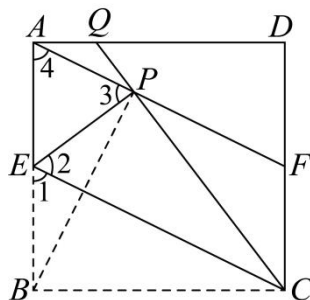


【答案】①②③

【解析】

【分析】设正方形的边长为 $2a$ ， $\angle 1 = \angle 2 = a$ ，根据折叠的性质得出 $EA = EP$ ，根据中点的性质得出 $AE = EB$ ，即可判断①，证明四边形 $AECF$ 是平行四边形，即可判断②，求得 $\tan \angle 4 = \frac{BP}{AP} = 2$ ，设 $AP = x$ ，则 $BP = 2x$ ，勾股定理得出 $AP = \frac{2\sqrt{5}}{5}a$ ，进而判断③，进而求得 AQ ， DQ ，勾股定理求得 CQ ，进而根据余弦的定义，即可判断④，即可求解。

【详解】解：如图所示，



$\because E$ 为 AB 的中点，

$\therefore AE = EB$

设正方形的边长为 $2a$ ，

则 $AE = EB = a$

$\because$ 折叠，

$\therefore \angle 1 = \angle 2, BP \perp EC, EP = EB = a$

$\therefore EA = EP$

$\therefore \triangle AEP$ 是等腰三角形，故①正确；

设 $\angle 1 = \angle 2 = a$ ，

$\therefore \angle AEP = 180^\circ - 2a$

$$\therefore \angle 3 = \angle 4 = \alpha$$

$$\therefore \angle 2 = \angle 3$$

$$\therefore AF \parallel EC$$

$$\text{又} \because AE \parallel FC$$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形,

$$\therefore CF = AE = a,$$

$\therefore CF = FD = a$, 即 F 是 CD 的中点, 故②正确;

$$\therefore BP \perp EC, AF \parallel EC$$

$$\therefore BP \perp AF$$

$$\text{在 Rt}\triangle ADF \text{ 中, } AF = \sqrt{AD^2 + DF^2} = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = \sqrt{5}a,$$

$$\therefore \tan \alpha = \tan \angle 1 = \frac{BC}{BE} = \frac{2a}{a} = 2$$

$$\therefore \tan \angle 4 = \frac{BP}{AP} = 2$$

设 $AP = x$, 则 $BP = 2x$,

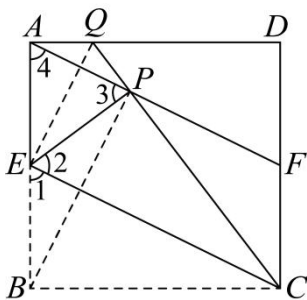
$$\therefore AB = \sqrt{5}x = 2a$$

$$\therefore x = \frac{2\sqrt{5}a}{5}$$

$$\therefore AP = \frac{2\sqrt{5}}{5}a, PF = \sqrt{5}a - \frac{2\sqrt{5}}{5}a = \frac{3\sqrt{5}}{5}a,$$

$\therefore AP:PF = 2:3$, 故③正确;

连接 EQ , 如图所示,



$$\therefore \angle QAE = 90^\circ, \angle QPE = \angle EPC = \angle EBC = 90^\circ, AE = EP$$

$$\text{又 } EQ = EQ$$

$$\therefore \triangle AEQ \cong \triangle PEQ$$

$$\therefore AQ = PQ$$

$$\text{又} \because EA = EP$$

$$\therefore EQ \perp AP$$

$$\therefore \angle AQE + \angle AEQ = 90^\circ$$

$$\text{又} \because \angle AEQ + \angle 4 = 90^\circ$$

$$\therefore \angle AQE = \angle 4 = \alpha$$

$$\therefore \tan \alpha = 2$$

$$\therefore \frac{AE}{AQ} = 2$$

$$\therefore AQ = \frac{a}{2}$$

$$\therefore QD = 2a - \frac{1}{2}a = \frac{3}{2}a$$

$$\text{在 Rt}\triangle QDC \text{ 中, } QC = \sqrt{QD^2 + DC^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}a\right)^2 + (2a)^2} = \frac{5}{2}a$$

$$\therefore \cos \angle DCQ = \frac{DQ}{QC} = \frac{\frac{3}{2}a}{\frac{5}{2}a} = \frac{3}{5}, \text{ 故④不正确}$$

故答案为：①②③.

【点睛】本题考查了正方形与折叠问题，解直角三角形，全等三角形的性质与判定，勾股定理，熟练掌握以上知识是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 10 个小题，共 90 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

$$16. \text{ 计算: } \sin 45^\circ + \left| \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right| + \sqrt{4} + \left(\frac{1}{2021} \right)^{-1}.$$

【答案】 2024

【解析】

【分析】此题主要考查了实数运算及二次根式的运算，直接利用负整数指数幂的性质、特殊角的三角函数值、绝对值的性质、算术平方根分别化简得出答案，正确化简各数是解题关键.

$$\text{【详解】解: } \sin 45^\circ + \left| \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right| + \sqrt{4} + \left(\frac{1}{2021} \right)^{-1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 + 2021$$

$$= 2024.$$

17. 先化简： $\left(1 - \frac{1}{x-1}\right) \div \frac{x-2}{x^2-2x+1}$ ，再从 1, 2, 3 中选择一个合适的数作为 x 的值代入求值.

【答案】 $x-1$; 2

【解析】

【分析】 本题考查了分式化简求值；先根据分式的加减计算括号内的，同时将除法转化为乘法，再根据分式的性质化简，最后根据分式有意义的条件，将字母的值代入求解.

【详解】 解： $\left(1 - \frac{1}{x-1}\right) \div \frac{x-2}{x^2-2x+1}$

$$= \frac{x-1-1}{x-1} \cdot \frac{(x-1)^2}{x-2}$$

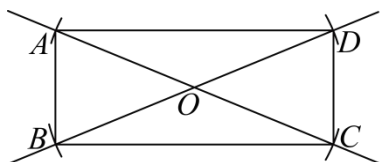
$$= x-1$$

$$\therefore x \neq 1, 2$$

$$\therefore \text{当 } x=3 \text{ 时, 原式} = 3-1 = 2$$

18. 康康在学习了矩形定义及判定定理 1 后，继续探究其它判定定理.

(1) 实践与操作



①任意作两条相交的直线，交点记为 O ；

②以点 O 为圆心，适当长为半径画弧，在两条直线上分别截取相等的四条线段 OA 、 OB 、 OC 、 OD ；

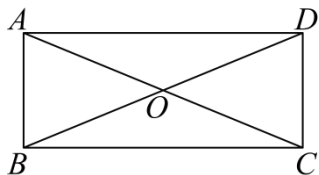
③顺次连结所得的四点得到四边形 $ABCD$ 。

于是可以直接判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形，则该判定定理是：_____。

(2) 猜想与证明

通过和同伴交流，他们一致认为四边形 $ABCD$ 是矩形，于是猜想得到了矩形的另外一种判定方法：对角线相等的平行四边形是矩形。并写出了以下已知、求证，请你完成证明过程。

已知：如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形， $AC = BD$ 。求证：四边形 $ABCD$ 是矩形。



【答案】(1) 对角线互相平分的四边形是平行四边形

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 由作图结合对角线互相平分的四边形是平行四边形可得答案；

(2) 先证明 $\angle ABC + \angle BCD = 180^\circ$ ，再证明 $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ ，可得 $\angle ABC = \angle DCB = 90^\circ$ ，从而可得结论.

【小问 1 详解】

解：由作图可得： $OA = OC$ ， $OB = OD$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

该判定定理是： 对角线互相平分的四边形是平行四边形；

【小问 2 详解】

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB \parallel CD$ ， $AB = CD$ ，

$\therefore \angle ABC + \angle BCD = 180^\circ$ ，

$\therefore AC = BD$ ， $BC = CB$ ，

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCB$ ，

$\therefore \angle ABC = \angle DCB = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形.

【点睛】 本题考查的是平行四边形的判定与性质，矩形的判定，全等三角形的判定与性质，掌握平行四边形与矩形的判定方法是关键.

19. 小明的书桌上有一个 L 型台灯，灯柱 AB 高 40cm，他发现当灯带 BC 与水平线 BM 夹角为 9° 时 (图 1)，灯带的直射宽 DE ($BD \perp BC$, $CE \perp BC$) 为 35cm，但此时灯的直射宽度不够，当他把灯带调整到与水平线夹角为 30° 时 (图 2)，直射宽度刚好合适，求此时台灯最高点 C 到桌面的距离. (结果保留 1 位小数)

($\sin 9^\circ \approx 0.16$, $\cos 9^\circ \approx 0.99$, $\tan 9^\circ \approx 0.16$)

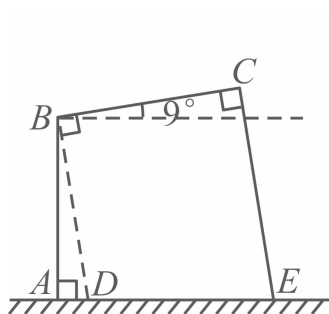


图1

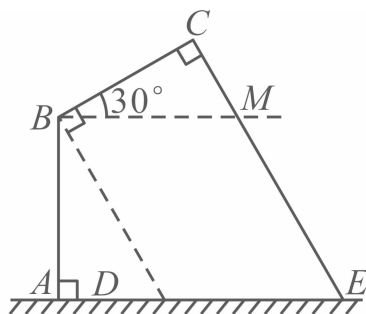


图2

【答案】此时台灯最高点 C 到桌面的距离为 57.3cm

【解析】

【分析】本题考查了解直角三角形的应用；在图 1 中， $BC = BM \cdot \cos 9^\circ$ ，在图 2 中求得 CN ，进而根据灯柱 AB 高 40cm ，点 C 到桌面的距离为 $AB + CN$ ，即可求解。

【详解】解：如图所示，过点 B 作 $BM \parallel AE$ 交 CE 于点 M ，

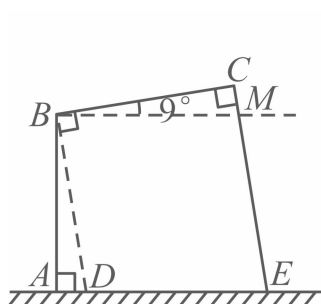


图1

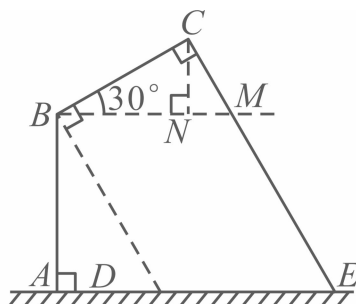


图2

在图 1 中， $DE \parallel BM$

$\therefore BD \perp BC, CE \perp BC$

$\therefore BD \parallel CE$

$\therefore$ 四边形 $BDEM$ 是平行四边形，

$\therefore BM = DE = 35$

在 $\text{Rt}\triangle BMC$ 中， $BC = BM \cdot \cos 9^\circ$

在图 2 中，过点 C 作 $CN \perp BM$ 于点 N ，

$\therefore CN = BC \sin 30^\circ = BM \cdot \cos 9^\circ \cdot \sin 30^\circ = 35 \times 0.99 \times \frac{1}{2} \approx 17.3\text{cm}$

$\therefore$ 灯柱 AB 高 40cm ，

点 C 到桌面的距离为 $AB + CN = 40 + 17.3 = 57.3\text{cm}$

答：此时台灯最高点 C 到桌面的距离为 57.3cm 。

20. 某酒店有 A, B 两种客房、其中 A 种 24 间， B 种 20 间。若全部入住，一天营业额为 7200 元；若 A, B 两种客房均有 10 间入住，一天营业额为 3200 元。

(1) 求 A, B 两种客房每间定价分别是多少元?

(2) 酒店对 A 种客房调研发现: 如果客房不调价, 房间可全部住满; 如果每个房间定价每增加 10 元, 就会有一个房间空闲; 当 A 种客房每间定价为多少元时, A 种客房一天的营业额 W 最大, 最大营业额为多少元?

【答案】(1) A 种客房每间定价为 200 元, B 种客房每间定价为 120 元;

(2) 当 A 种客房每间定价为 220 元时, A 种客房一天的营业额 W 最大, 最大营业额为 4840 元.

【解析】

【分析】(1) 设 A 种客房每间定价为 x 元, B 种客房每间定价为 y 元, 根据题意, 列出方程组即可求解;

(2) 设 A 种客房每间定价为 a 元, 根据题意, 列出 W 与 a 的二次函数解析式, 根据二次函数的性质即可求解;

本题考查了二元一次方程组的应用, 二次函数的应用, 根据题意, 正确列出二元一次方程组和二次函数解析式是解题的关键.

【小问 1 详解】

解: 设 A 种客房每间定价为 x 元, B 种客房每间定价为 y 元,

$$\text{由题意可得, } \begin{cases} 24x + 20y = 7200 \\ 10x + 10y = 3200 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = 200 \\ y = 120 \end{cases},$$

答: A 种客房每间定价为 200 元, B 种客房每间定价为 120 元;

【小问 2 详解】

解: 设 A 种客房每间定价为 a 元,

$$\text{则 } W = \left(24 - \frac{a-200}{10} \right) a = -\frac{1}{10} a^2 + 44a = -\frac{1}{10} (a-220)^2 + 4840,$$

$$\because -\frac{1}{10} < 0,$$

$$\therefore \text{当 } a = 220 \text{ 时, } W \text{ 取最大值, } W_{\text{最大值}} = 4840 \text{ 元,}$$

答: 当 A 种客房每间定价为 220 元时, A 种客房一天的营业额 W 最大, 最大营业额为 4840 元.

21. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (m+2)x + m - 1 = 0$.

(1) 求证: 无论 m 取何值, 方程都有两个不相等的实数根;

(2) 如果方程的两个实数根为 x_1, x_2 , 且 $x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = 9$, 求 m 的值.

【答案】(1) 证明见解析;

(2) $m_1 = 1$ 或 $m_2 = -2$.

【解析】

【分析】本题主要考查了一元二次方程根的判别式，根与系数的关系，解一元二次方程，掌握一元二次方程根的判别式是解题的关键.

(1) 根据根的判别式证明 $\Delta > 0$ 恒成立即可;

(2) 由题意可得, $x_1 + x_2 = m + 2$, $x_1 \cdot x_2 = m - 1$, 进行变形后代入即可求解.

【小问 1 详解】

证明: $\Delta = [- (m + 2)]^2 - 4 \times 1 \times (m - 1) = m^2 + 8$,

$\therefore$ 无论 m 取何值, $m^2 + 8 > 0$, 恒成立,

$\therefore$ 无论 m 取何值, 方程都有两个不相等的实数根.

【小问 2 详解】

解: $\because x_1, x_2$ 是方程 $x^2 - (m + 2)x + m - 1 = 0$ 的两个实数根,

$\therefore x_1 + x_2 = m + 2$, $x_1 \cdot x_2 = m - 1$,

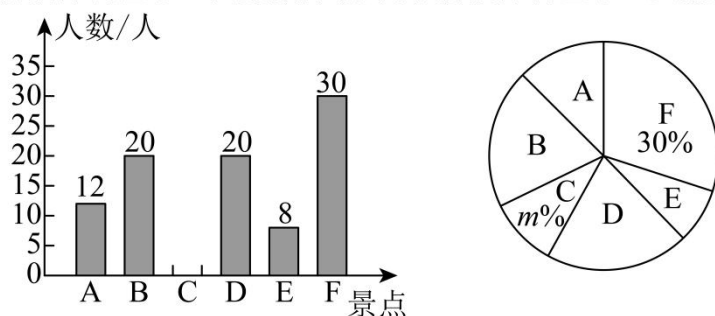
$\therefore x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 = (m + 2)^2 - 3(m - 1) = 9$,

解得: $m_1 = 1$ 或 $m_2 = -2$.

22. 遂宁市作为全国旅游城市, 有众多著名景点, 为了解“五一”假期同学们的出游情况, 某实践探究小组对部分同学假期旅游地做了调查, 以下是调查报告的部分内容, 请完善报告:

xx 小组关于 xx 学校学生 “五一” 出游情况调查报告						
数据收集						
调查方式	抽样调查		调查对象		xx 学校学生	
数据的整理与描述						
景点	A：中国死海	B：龙凤古镇	C：灵泉风景区	D：金华山	E：未出游	F：其他

被抽样调查学生人数条形统计图 被抽样调查学生人数占比



数据分析及运用

- (1) 本次被抽样调查的学生总人数为_____, 扇形统计图中, $m =$ _____, “B: 龙凤古镇”对应圆心角的度数是_____;
- (2) 请补全条形统计图;
- (3) 该学校总人数为1800人, 请你估计该学校学生“五一”假期未出游的人数;
- (4) 未出游中的甲、乙两位同学计划下次假期从A、B、C、D四个景点中任选一个景点旅游, 请用树状图或列表的方法求出他们选择同一景点的概率.

【答案】 (1) 100, 10, 72° ; (2) 见解析; (3) 144; (4) $\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查了条形统计图与扇形统计图信息关联, 样本估计总体, 列表法求概率;

- (1) 根据F组的人数除以占比, 即可得出总人数, 进而求得C组的人数, 得出 m 的值, 根据B的占比乘以 360° , 即可得出对应圆心角的度数;
- (2) 根据C组的人数补全条形统计图,
- (3) 用1800乘以E组的占比, 即可求解.
- (4) 用列表法求概率, 即可求解.

【详解】 解: (1) 本次被抽样调查的学生总人数为 $\frac{30}{30\%} = 100$,

C组的人数为: $100 - 12 - 20 - 20 - 8 - 30 = 10$,

$$\therefore m\% = \frac{10}{100} \times 100\% = 10\%,$$

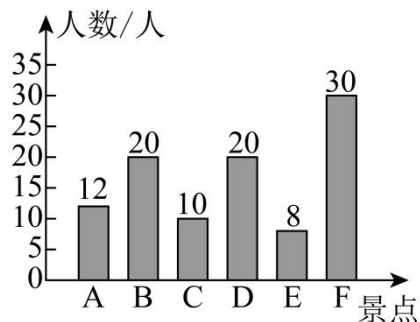
$$\therefore m = 10$$

$$B: \text{龙凤古镇} \text{ 对应圆心角的度数是 } \frac{20}{100} \times 360^\circ = 72^\circ$$

故答案为: 100, 10, 72° .

(2) 根据 (1) 可得 C 组人数为 10 人，补全统计图，如图所示，

被抽样调查学生人数条形统计图



(3) 解： $1800 \times \frac{8}{100} = 144$

答：请你估计该学校学生“五一”假期未出游的人数为 144 人；

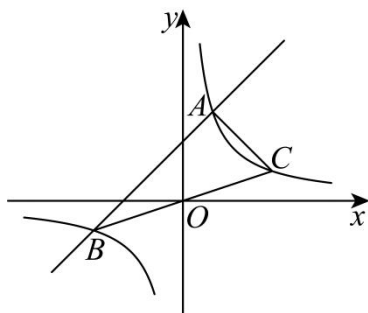
(4) 列表如下，

	A	B	C	D
A	AA	AB	AC	AD
B	BA	BB	BC	BD
C	CA	CB	CC	CD
D	DA	DB	DC	DD

共有 16 种等可能结果，其中他们选择同一景点的情形有 4 种，

$\therefore$ 他们选择同一景点的概率为 $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

23. 如图，一次函数 $y_1 = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图象与反比例函数 $y_2 = \frac{m}{x}$ ($m \neq 0$) 的图象相交于 $A(1, 3)$, $B(n, -1)$ 两点.



(1) 求一次函数和反比例函数的表达式；

(2) 根据图象直接写出 $y_1 > y_2$ 时， x 的取值范围；

(3) 过点 B 作直线 OB ，交反比例函数图象于点 C ，连结 AC ，求 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】 (1) 反比例函数表达式为 $y_2 = \frac{3}{x}$ ，一次函数表达式为 $y_1 = x + 2$

(2) $-3 < x < 0$ 或 $x > 1$

(3) 8

【解析】

【分析】 (1) 利用待定系数法即可求解；

(2) 根据函数图象即可求解；

(3) 如图，设直线 $y_1 = x + 2$ 与 y 轴相交于点 D ，过点 A 作 $AM \perp x$ 轴于点 M ，过点 C 作 $CN \perp x$ 轴于点 N ，求出点 D 坐标，再根据关于原点对称的点的坐标特征求出点 C 坐标，根据

$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BOD} + S_{\text{梯形}ADOM} + S_{\text{梯形}AMNC} - S_{\triangle CON}$ 计算即可求解；

本题考查了一次函数与反比例函数的交点问题，反比例函数的性质，利用待定系数法求出函数解析式是解题的关键.

【小问 1 详解】

解：把 $A(1, 3)$ 代入 $y_2 = \frac{m}{x}$ 得， $3 = \frac{m}{1}$ ，

$\therefore m = 3$ ，

$\therefore$ 反比例函数表达式为 $y_2 = \frac{3}{x}$ ，

把 $B(n, -1)$ 代入 $y_2 = \frac{3}{x}$ 得， $-1 = \frac{3}{n}$ ，

$\therefore n = -3$ ，

$\therefore B(-3, -1)$ ，

把 $A(1, 3)$ 、 $B(-3, -1)$ 代入 $y_1 = kx + b$ 得，

$$\begin{cases} 3 = k + b \\ -1 = -3k + b \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} k = 1 \\ b = 2 \end{cases}$ ，

$\therefore$ 一次函数表达式为 $y_1 = x + 2$ ；

【小问 2 详解】

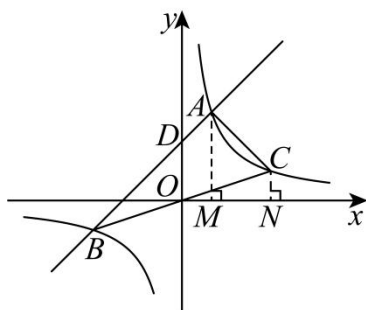
解：由图象可得，当 $y_1 > y_2$ 时， x 的取值范围为 $-3 < x < 0$ 或 $x > 1$ ；

【小问3详解】

解：如图，设直线 $y_1 = x + 2$ 与 y 轴相交于点 D ，过点 A 作 $AM \perp x$ 轴于点 M ，过点 C 作 $CN \perp x$ 轴于点 N ，

则 $D(0, 2)$ ，

$\therefore OD = 2$ ，



$\because$ 点 B 、 C 关于原点对称，

$\therefore C(3, 1)$ ，

$\therefore MN = 3 - 1 = 2$ ， $CN = 1$ ， $ON = 3$

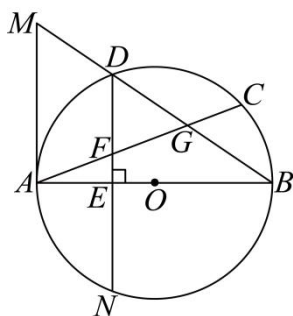
$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BOD} + S_{\text{梯形}ADOM} + S_{\text{梯形}AMNC} - S_{\triangle CON}$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 3 + \frac{1}{2} \times (2 + 3) \times 1 + \frac{1}{2} \times (1 + 3) \times 2 - \frac{1}{2} \times 3 \times 1$$

$= 8$ ，

即 $\triangle ABC$ 的面积为 8.

24. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， AC 是一条弦，点 D 是 $\widehat{AC}$ 的中点， $DN \perp AB$ 于点 E ，交 AC 于点 F ，连结 DB 交 AC 于点 G 。



(1) 求证： $AF = DF$ ；

(2) 延长 GD 至点 M ，使 $DM = DG$ ，连接 AM 。

①求证： AM 是 $\odot O$ 的切线；

②若 $DG = 6$ ， $DF = 5$ ，求 $\odot O$ 的半径。

【答案】(1) 证明见解析

(2) ①证明见解析, ② $\odot O$ 的半径为 $\frac{20}{3}$.

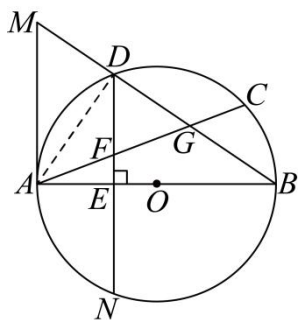
【解析】

【分析】(1) 如图, 连接 AD , 证明 $\widehat{AD} = \widehat{CD}$, 可得 $\angle ABD = \angle CAD$, 证明 $\widehat{AN} = \widehat{AD}$, 可得 $\angle ADN = \angle ABD$, 进一步可得结论;

(2) ①证明 $\angle ADB = 90^\circ = \angle ADM$, 可得 AD 是 MG 的垂直平分线, 可得 $AM = AG$, $\angle M = \angle AGD = \angle GAB + \angle B$, $\angle MAD = \angle GAD$, 而 $\angle GAD = \angle B$, 可得 $\angle MAD = \angle B$, 进一步可得结论; ②证明 $DE \parallel AM$, 可得 $\triangle GDF \sim \triangle GMA$, 求解 $AM = 10$, $AD = \sqrt{AM^2 - MD^2} = 8$, 结合 $\tan \angle M = \frac{AD}{MD} = \frac{8}{6} = \frac{AB}{AM} = \frac{AB}{10}$, 可得答案.

【小问 1 详解】

证明: 如图, 连接 AD ,



$\because$ 点 D 是 $\widehat{AC}$ 的中点,

$\therefore \widehat{AD} = \widehat{CD}$,

$\therefore \angle ABD = \angle CAD$,

$\because DN \perp AB$, AB 为 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \widehat{AN} = \widehat{AD}$,

$\therefore \angle ADN = \angle ABD$,

$\therefore \angle ADN = \angle CAD$,

$\therefore AF = DF$.

【小问 2 详解】

证明: ① $\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ADB = 90^\circ = \angle ADM$,

$\therefore \angle B + \angle BAD = 90^\circ$,

$\therefore DM = DG$,

$\therefore AD$ 是 MG 的垂直平分线,

$\therefore AM = AG$,

$\therefore \angle M = \angle AGD = \angle GAB + \angle B$, $\angle MAD = \angle GAD$,

而 $\angle GAD = \angle B$,

$\therefore \angle MAD = \angle B$,

$\therefore \angle MAD + \angle BAD = \angle B + \angle BAD = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAM = 90^\circ$,

$\therefore AB$ 为 $\odot O$ 的直径,

$\therefore AM$ 是 $\odot O$ 的切线;

② $\because DG = 6$,

$\therefore DM = DG = 6$,

$\because DN \perp AB$, $\angle MAB = 90^\circ$,

$\therefore DE \parallel AM$,

$\therefore \triangle GDF \sim \triangle GMA$,

$\therefore \frac{DG}{GM} = \frac{DF}{AM} = \frac{6}{12}$,

$\therefore DF = 5$,

$\therefore AM = 10$,

$\therefore AD = \sqrt{AM^2 - MD^2} = 8$,

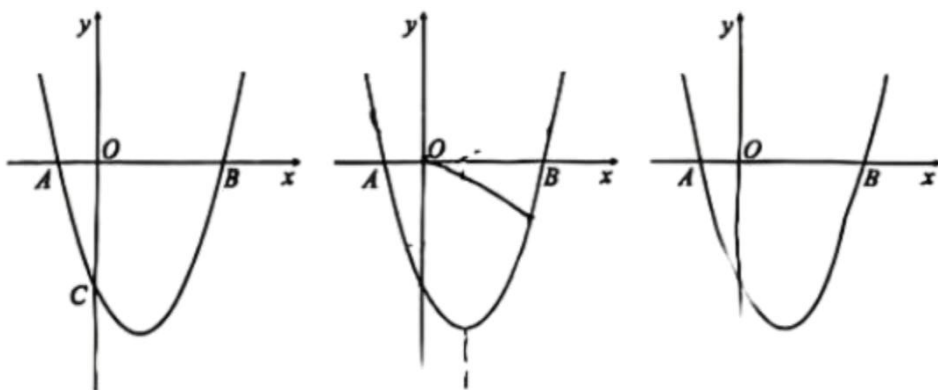
$\therefore \tan \angle M = \frac{AD}{MD} = \frac{8}{6} = \frac{AB}{AM} = \frac{AB}{10}$,

$\therefore AB = \frac{80}{6} = \frac{40}{3}$,

$\therefore \odot O$ 的半径为 $\frac{20}{3}$.

【点睛】 本题考查的是圆周角定理的应用，弧与圆心角之间的关系，切线的判定与性质，相似三角形的判定与性质，锐角三角函数的应用，做出合适的辅助线是解本题的关键.

25. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象与 x 轴分别交于点 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$, 与 y 轴交于点 $C(0, -3)$, P , Q 为抛物线上的两点.



- (1) 求二次函数的表达式；
- (2) 当 P, C 两点关于抛物线对称轴对称， $\triangle OPQ$ 是以点 P 为直角顶点的直角三角形时，求点 Q 的坐标；
- (3) 设 P 的横坐标为 m ， Q 的横坐标为 $m+1$ ，试探究： $\triangle OPQ$ 的面积 S 是否存在最小值，若存在，请求出最小值，若不存在，请说明理由。

【答案】(1) $y = x^2 - 2x - 3$

(2) $Q\left(\frac{2}{3}, -\frac{35}{9}\right)$

(3) 存在，最小值为 $\frac{11}{8}$

【解析】

【分析】本题考查了二次函数的综合题，待定系数法求函数解析式，勾股定理，已知两点坐标表示两点距离，二次函数最值，熟练掌握知识点，正确添加辅助线是解题的关键。

- (1) 用待定系数法求解即可；
- (2) 可求 $P(2, -3)$ ，设 $Q(m, m^2 - 2m - 3)$ ，由 $\angle OPQ = 90^\circ$ ，得 $OP^2 + PQ^2 = OQ^2$ ，则
- $$\left[(0-2)^2 + (0+3)^2\right] + \left[(2-m)^2 + (-3-m^2+2m+3)^2\right] = (0-m)^2 + (0-m^2+2m+3)^2, \text{ 解得 } m_1 = \frac{2}{3},$$
- $$m_2 = 2 \text{ (舍去)}, \text{ 故 } Q\left(\frac{2}{3}, -\frac{35}{9}\right);$$
- (3) 构造 $\triangle OPQ$ 的外接矩形，把 $x_P = m$ 代入 $y = x^2 - 2x - 3$ 得 $y_P = m^2 - 2m - 3$ ，把 $x_Q = m+1$ 代入 $y = x^2 - 2x - 3$ 得 $y_Q = m^2 - 4$ ，用割补法表示 $\triangle OPQ$ 的面积，这个面积是关于 m 的二次函数，转化为二次函数求最值问题。

【小问1详解】

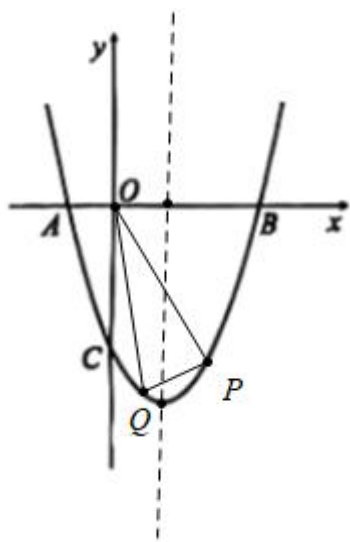
解：把 $A(-1, 0)$ ， $B(3, 0)$ ， $C(0, -3)$ 代入 $y = ax^2 + bx + c$ 得，

$$\begin{cases} a-b+c=0 \\ 9a+3b+c=0 \\ c=-3 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=-3 \end{cases}$$

$\therefore$ 二次函数的表达式为 $y=x^2-2x-3$;

【小问 2 详解】

解：如图：



由 $y=x^2-2x-3$ 得抛物线对称轴为直线 $x=1$,

$\therefore P, C$ 两点关于抛物线对称轴对称, $C(0, -3)$

$\therefore P(2, -3)$,

设 $Q(m, m^2-2m-3)$,

$\therefore \angle OPQ = 90^\circ$,

$\therefore OP^2 + PQ^2 = OQ^2$,

$\therefore [(0-2)^2 + (0+3)^2] + [(2-m)^2 + (-3-m^2+2m+3)^2] = (0-m)^2 + (0-m^2+2m+3)^2$,

整理得, $3m^2-8m+4=0$,

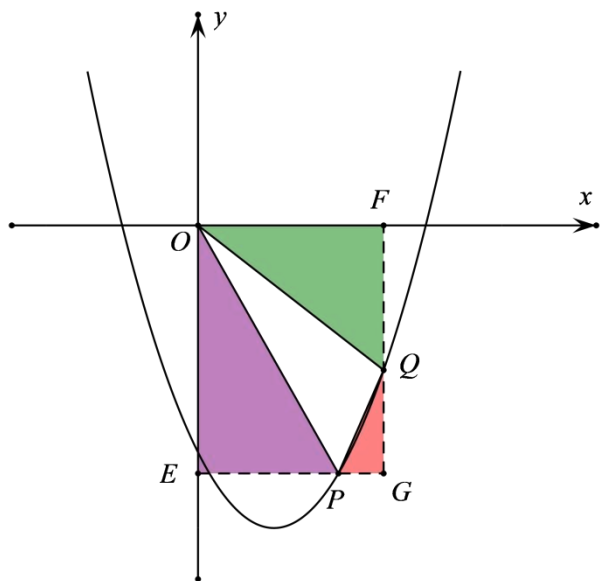
解得 $m_1 = \frac{2}{3}$, $m_2 = 2$ (舍去),

$\therefore m = \frac{2}{3}$,

$\therefore Q\left(\frac{2}{3}, -\frac{35}{9}\right)$;

【小问3详解】

解：先画一个虚拟图，过点 P 作 y 轴的垂线交 y 轴于点 E ，过点 Q 作 x 轴的垂线，垂足为点 F ，两条垂线交于点 G ，如图：



把 $x_P = m$ 代入 $y = x^2 - 2x - 3$ 得 $y_P = m^2 - 2m - 3$,

把 $x_Q = m + 1$ 代入 $y = x^2 - 2x - 3$ 得 $y_Q = m^2 - 4$,

$$\therefore S_{\text{矩形}OEGF} = OE \cdot OF = -(m^2 - 2m - 3)(m + 1) = -m^3 + m^2 + 5m + 3,$$

$$S_{\triangle OEP} = \frac{1}{2} EP \cdot EO = \frac{1}{2} [-(m^2 - 2m - 3)]m = -\frac{1}{2}m^3 + m^2 + \frac{3}{2}m,$$

$$S_{\triangle OFQ} = \frac{1}{2} OF \cdot FQ = \frac{1}{2}(m + 1)[-(m^2 - 4)] = -\frac{1}{2}m^3 - \frac{1}{2}m^2 + 2m + 2$$

$$S_{\triangle QGP} = \frac{1}{2} GP \cdot QG = \frac{1}{2} \times 1 \times [(m^2 - 4) - (m^2 - 2m - 3)] = m - \frac{1}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle OPQ} = S_{\text{矩形}OEGF} - S_{\triangle OEP} - S_{\triangle OFQ} - S_{\triangle PQG},$$

$$\therefore S_{\triangle OPQ} = -m^3 + m^2 + 5m + 3 - \left(-\frac{1}{2}m^3 + m^2 + \frac{3}{2}m\right) - \left(-\frac{1}{2}m^3 - \frac{1}{2}m^2 + 2m + 2\right) - \left(m - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{8} \geq \frac{11}{8},$$

$\therefore$ 当 $m = -\frac{1}{2}$ 时， $\triangle OPQ$ 的面积取得最小值为 $\frac{11}{8}$.

此时点 P 在 y 轴左侧，如下图

