

2024 年四川省达州市中考数学试题

本考试为闭卷考试。考试时间 120 分钟、满分 150 分。本试卷分为第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。第 I 卷 1-2 页，第 II 卷 3-8 页，共 8 页。

温馨提示：

1. 答题前，考生需用 0.5 毫米黑色签字笔将自己的姓名、准考证号、座位号正确填写在答题卡对应位置，待监考老师粘贴条形码后，再认真核对条形码上的信息与自己的准考证上的信息是否一致。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔在答题卡相应位置规范填涂。如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其他答案标号；非选择题用 0.5 毫米黑色签字笔作答，答案必须写在答题卡对应的框内。超出答题区答案无效；在草稿纸、试题卷上作答无效。
3. 不要折叠、弄破、弄皱答题卡。不得使用涂改液、修正带、刮纸刀等影响答题卡整洁。
4. 考试结束后，将试卷及答题卡一并交回。

第 I 卷（选择题 共 40 分）

一、单项选择题（每小题 4 分，共 40 分）

1. 有理数 2024 的相反数是（ ）

- A. 2024 B. -2024 C. $\frac{1}{2024}$ D. $-\frac{1}{2024}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了求一个数的相反数，只有符号不同的两个数互为相反数，0 的相反数是 0，据此求解即可。

【详解】解：有理数 2024 的相反数是 -2024，
故选：B。

2. 大米是我国居民最重要的主食之一，与此同时，我国也是世界上最大的大米生产国，水稻产量常年稳定在 2 亿吨以上。将 2 亿用科学记数法表示为（ ）

- A. 2×10^9 B. 2×10^8 C. 0.2×10^8 D. 2×10^7

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了科学记数法。科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数。确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值大于 1 与小数点移动的位数相同。

【详解】解：2 亿 = 200000000 = 2×10^8 ，

故选：B.

3. 下列计算正确的是 ()

A. $a^2 + a^3 = a^5$

B. $(a+2)^2 = a^2 + 2a + 4$

C. $(-2a^2b^3)^3 = -8a^6b^9$

D. $a^{12} \div a^6 = a^2$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了完全平方公式，积的乘方计算，同底数幂除法计算，合并同类项，熟知相关计算法则是解题的关键.

【详解】解：A、 a^2 与 a^3 不是同类项，不能合并，原式计算错误，不符合题意；

B、 $(a+2)^2 = a^2 + 4a + 4$ ，原式计算错误，不符合题意；

C、 $(-2a^2b^3)^3 = -8a^6b^9$ ，原式计算正确，符合题意；

D、 $a^{12} \div a^6 = a^6$ ，原式计算错误，不符合题意；

故选：C.

4. 如图, 正方体的表面展开图上写有“我们热爱中国”六个字, 还原成正方体后“我”的对面的字是 ()



A. 热

B. 爱

C. 中

D. 国

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了正方体相对两个面上的文字，正方体的平面展开图中，相对面的特点是中间必须间隔一个正方形，据此作答即可.

【详解】解：正方体的平面展开图中，相对面的特点是中间必须间隔一个正方形，则与“我”字相对的字是“爱”，与“们”字相对的字是“中”，与“国”字相对的字是“热”，

故选：B.

5. 小明在处理一组数据“12, 12, 28, 35, ■”时，不小心将其中一个数据污染了，只记得该数据在 30~40 之间. 则“■”在范围内无论为何值都不影响这组数据的 ()

A. 平均数

B. 众数

C. 中位数

D. 方差

【答案】C

【解析】

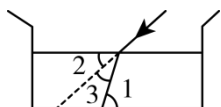
【分析】此题考查数据平均数、众数、中位数方差的计算方法，根据中位数的定义求解可得.

【详解】解：依题意“■”该数据在 30~40 之间，则这组数据的中位数为 28，

∴ “■” 在范围内无论为何值都不影响这组数据的中位数.

故选：C.

6. 当光线从空气射入水中时，光线的传播方向发生了改变，这就是光的折射现象 (如图所示). 图中 $\angle 1 = 80^\circ$ ， $\angle 2 = 40^\circ$ ，则 $\angle 3$ 的度数为 ()

A. 30° B. 40° C. 50° D. 70°

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了平行线的性质，根据平行线的性质可得 $\angle 1 = \angle 2 + \angle 3$ ，代入数据，即可求解.

【详解】解：依题意，水面与容器底面平行，

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 + \angle 3$$

$$\because \angle 1 = 80^\circ, \angle 2 = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 1 - \angle 2 = 80^\circ - 40^\circ = 40^\circ$$

故选：B.

7. 甲乙两人各自加工 120 个零件，甲由于个人原因没有和乙同时进行，乙先加工 30 分钟后，甲开始加工. 甲为了追赶上乙的进度，加工的速度是乙的 1.2 倍，最后两人同时完成. 求乙每小时加工零件多少个？设乙每小时加工 x 个零件. 可列方程为 ()

$$\text{A. } \frac{120}{1.2x} - \frac{120}{x} = 30$$

$$\text{B. } \frac{120}{x} - \frac{120}{1.2x} = 30$$

$$\text{C. } \frac{120}{1.2x} - \frac{120}{x} = \frac{30}{60}$$

$$\text{D. } \frac{120}{x} - \frac{120}{1.2x} = \frac{30}{60}$$

【答案】D

【解析】

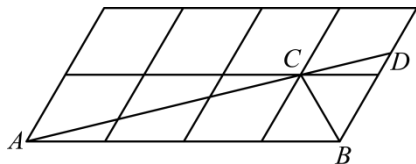
【分析】本题主要考查了分式方程的实际应用，设乙每小时加工 x 个零件，则甲每小时加工 $1.2x$ 个零件，再根据时间 = 工作总量 ÷ 工作效率结合甲的工作时间比乙的工作时间少 30 分钟列出方程即可.

【详解】解：设乙每小时加工 x 个零件，则甲每小时加工 $1.2x$ 个零件，

由题意得 $\frac{120}{x} - \frac{120}{1.2x} = \frac{30}{60}$,

故选：D.

8. 如图，由 8 个全等的菱形组成的网格中，每个小菱形的边长均为 2， $\angle ABD = 120^\circ$ ，其中点 A，B，C 都在格点上，则 $\tan \angle BCD$ 的值为 ()



A. 2

B. $2\sqrt{3}$

C. $\frac{3}{2}$

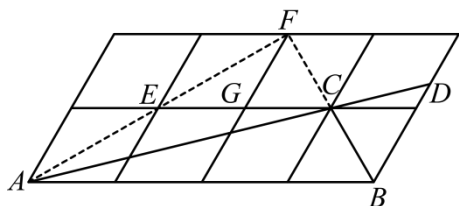
D. 3

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了菱形的性质，解直角三角形，延长 BC 交格点于点 F，连接 AF，E, G 分别在格点上，根据菱形的性质，进而得出 $\angle AFC = 90^\circ$ ，解直角三角形求得 AF, FC 的长，根据对顶角相等，进而根据正切的定义，即可求解.

【详解】解：如图所示，延长 BC 交格点于点 F，连接 AF，E, G 分别在格点上，



依题意， $\angle EGF = 120^\circ$, $EG = GF$ ， $GF = GC$, $\angle FGC = 60^\circ$

$$\therefore \angle CEF = 30^\circ, \angle ECF = 60^\circ$$

$$\therefore \angle AFC = 90^\circ$$

又 $FC = 2$,

$$\therefore AF = 2EF = 4EG \cos 30^\circ = 4 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

$$\therefore \tan \angle BCD = \tan \angle ACF = \frac{AF}{FC} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

故选：B.

9. 抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于两点，其中一个交点的横坐标大于 1，另一个交点的横坐标小于 1，则下列结论正确的是 ()

A. $b+c>1$

B. $b=2$

C. $b^2+4c<0$

D. $c<0$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了二次函数的性质，设抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 与 x 轴交于两点，横坐标分别为 $x_1, x_2, x_1 < x_2$ ，依题意， $x_1 < 1, x_2 > 1$ ，根据题意抛物线开口向下，当 $x=1$ 时， $y>0$ ，即可判断 A 选项，根据对称轴即可判断 B 选项，根据一元二次方程根的判别式，即可求解. 判断 C 选项，无条件判断 D 选项，据此，即可求解.

【详解】解：依题意，设抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 与 x 轴交于两点，横坐标分别为 $x_1, x_2, x_1 < x_2$

依题意， $x_1 < 1, x_2 > 1$

$\therefore a=-1<0$ ，抛物线开口向下，

$\therefore$ 当 $x=1$ 时， $y>0$ ，即 $-1+b+c>0$

$\therefore b+c>1$ ，故 A 选项正确，符合题意；

若对称轴为 $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{b}{-2}=\frac{b}{2}=1$ ，即 $b=2$ ，

而 $x_1 < 1, x_2 > 1$ ，不能得出对称轴为直线 $x=1$ ，

故 B 选项不正确，不符合题意；

$\therefore$ 抛物线与坐标轴有 2 个交点，

$\therefore$ 方程 $-x^2+bx+c=0$ 有两个不等实数解，即 $\Delta=b^2-4ac>0$ ，又 $a=-1$

$\therefore b^2+4c>0$ ，故 C 选项错误，不符合题意；

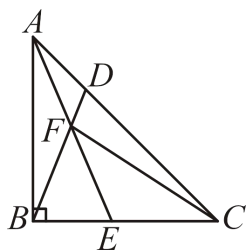
无法判断 c 的符号，故 D 选项错误，不符合题意；

故选：A.

10. 如图， $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形， $\angle ABC=90^\circ$ ， $AB=4$ ，点 D, E 分别在 AC, BC 边上运动，连

结 AE, BD 交于点 F ，且始终满足 $AD=\frac{\sqrt{2}}{2}CE$ ，则下列结论：① $\frac{AE}{BD}=\sqrt{2}$ ；② $\angle DFE=135^\circ$ ；

③ $\triangle ABF$ 面积的最大值是 $4\sqrt{2}-4$ ；④ CF 的最小值是 $2\sqrt{10}-2\sqrt{2}$. 其中正确的是 ()



A. ①③

B. ①②④

C. ②③④

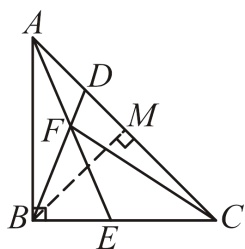
D. ①②③④

【答案】D

【解析】

【分析】过点 B 作 $BM \perp AC$ 于点 M ，证明 $\triangle ABE \sim \triangle BMD$ ，根据相似三角形的性质即可判断①；得出 $\angle BAE = \angle MBD$ ，根据三角形内角和定理即可判断②；在 AB 的左侧，以 AB 为斜边作等腰直角三角形 AOB ，以 OA 为半径作 $\odot O$ ，根据定弦定角得出 F 在 $\odot O$ 的 $\widehat{AB}$ 上运动，进而根据当 $OF \perp AB$ 时， $\triangle ABF$ 面积的最大，根据三角形的面积公式求解，即可判断③，当 F 在 OC 上时， FC 最小，过点 O 作 $OH \perp BC$ 交 CB 的延长线于点 H ，勾股定理，即可求解。

【详解】解：如图所示，过点 B 作 $BM \perp AC$ 于点 M ，



$\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = 4$ ，

$\therefore AB = BC$ ， $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2}BC$ ，

$\therefore AD = \frac{\sqrt{2}}{2}CE$ ，

$\therefore DM = \frac{1}{2}AC - AD = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}BC - \frac{\sqrt{2}}{2}CE = \frac{\sqrt{2}}{2}(BC - CE) = \frac{\sqrt{2}}{2}BE$

$\therefore \frac{DM}{BE} = \frac{AD}{CE} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

又 $\because \angle DMB = \angle EBA = 90^\circ$

$\therefore \triangle ABE \sim \triangle BMD$ ，

$\therefore \frac{AE}{BD} = \frac{AB}{BM} = \sqrt{2}$ ，故①正确；

$\because \triangle ABE \sim \triangle BMD$ ，

$\therefore \angle BAE = \angle MBD$ ，

$\therefore \angle BAE + \angle ABD = \angle MBD + \angle ABD$

即 $180^\circ - (\angle BAE + \angle ABD) = 180^\circ - (\angle MBD + \angle ABD)$

在 $\triangle ABF$ 中， $\angle AFB = 180^\circ - (\angle BAE + \angle ABD)$

$$\text{即 } \angle AFB = 180^\circ - (\angle MBD + \angle ABD)$$

$\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $BM \perp AC$

$\therefore BM$ 平分 $\angle ABC$

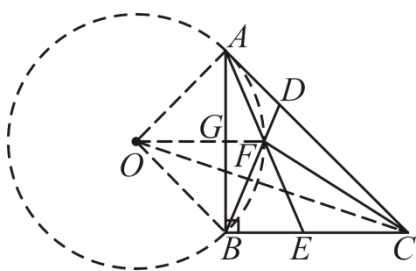
$$\therefore \angle ABM = \angle CBM = \frac{1}{2} \angle ABC = 45^\circ$$

$$\therefore \angle AFB = 180^\circ - (\angle MBD + \angle ABD) = 180^\circ - \angle ABM = 135^\circ$$

$$\therefore \angle AFB = 180^\circ - (\angle BAE + \angle ABD) = 135^\circ,$$

$\therefore \angle DFE = 135^\circ$, 故②正确,

如图所示,



在 AB 的左侧, 以 AB 为斜边作等腰直角三角形 AOB , 以 OA 为半径作 $\odot O$, 且 $AB = 4$

$$\therefore \angle AOB = 90^\circ, \quad OA = OB, \quad AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{2}OA = 4$$

$$\therefore \angle AFB = 135^\circ$$

$$\therefore \angle DFE + \frac{1}{2} \angle AOB = 180^\circ$$

$\therefore F$ 在 $\odot O$ 的 $\widehat{AB}$ 上运动,

$$\therefore OF = AO = \frac{\sqrt{2}}{2} AB = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 4 = 2\sqrt{2},$$

连接 OF 交 AB 于点 G , 则 $AG = GB = 2$,

$\therefore$ 当 $OF \perp AB$ 时, 结合垂径定理, OG 最小,

$\therefore OF$ 是半径不变

$\therefore$ 此时 CF 最大

则 $\triangle ABF$ 面积的最大,

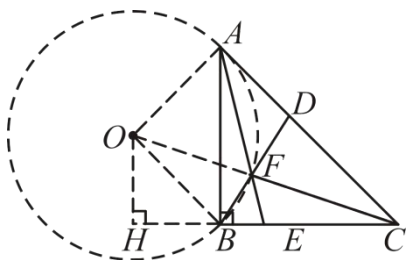
$$\therefore S_{\triangle ABF} = 2S_{\triangle AGF} = 2(S_{\triangle AOF} - S_{\triangle AOG})$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} \times OF \times AG - \frac{1}{2} OG^2\right)$$

$$= 2\sqrt{2} \times 2 - 2^2$$

$$= 4\sqrt{2} - 4, \text{ 故③正确;}$$

如图所示, 当 F 在 OC 上时, FC 最小, 过点 O 作 $OH \perp BC$ 交 CB 的延长线于点 H ,



$\therefore \triangle OHB$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore OH = HB = \frac{\sqrt{2}}{2} OB = \frac{\sqrt{2}}{2} OA = 2,$$

在 $\text{Rt}\triangle OHC$ 中, $HC = HB + BC = 6$,

$$\therefore OC = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10},$$

$$\therefore CF \text{ 的最小值是 } 2\sqrt{10} - 2\sqrt{2}.$$

故选: D.

【点睛】 本题考查了相似三角形的性质与判定, 圆内接四边形对角互补, 求圆外一点到圆上的距离最值问题, 勾股定理, 等腰直角三角形的性质与判定, 熟练掌握以上知识是解题的关键.

第 II 卷 (非选择题 共 110 分)

二、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

11. 分解因式: $3x^2 - 18x + 27 =$ _____.

【答案】 $3(x-3)^2$

【解析】

【分析】 先提取公因式 3, 再根据完全平方公式进行二次分解.

【详解】 $3x^2 - 18x + 27,$

$$= 3(x^2 - 6x + 9),$$

$$= 3(x-3)^2.$$

故答案为: $3(x-3)^2$.

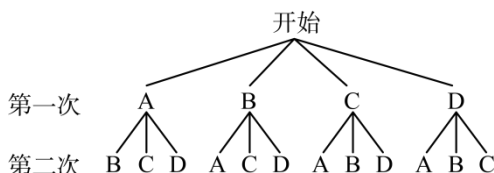
12. “四大名著”《红楼梦》《水浒传》《三国演义》《西游记》是中国优秀文化的重要组成部分. 某校七年级准备从这四部名著中随机抽取两本 (先随机抽取一本, 不放回, 再随机抽取另一本) 开展“名著共读”活动, 则该年级的学生恰好抽取到《三国演义》和《西游记》的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{6}$

【解析】

【分析】 本题考查画树状图法求等可能事件的概率；画树状图，共有 12 种等可能的结果，其中抽取的两本恰好是《水浒传》和《西游记》的结果有 2 种，再由概率公式求解即可．

【详解】 解：把《红楼梦》《水浒传》《三国演义》《西游记》四本书分别记为 A, B, C, D ，根据题意，画出如下的树状图：



由树状图可知看出，所有可能出现的结果共有 12 种，这些结果出现的可能性相等．

两本是《三国演义》和《西游记》的结果有 2 种，

所以 $P(\text{两本是《三国演义》和《西游记》}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ ．

故答案为： $\frac{1}{6}$ ．

13. 若关于 x 的方程 $\frac{3}{x-2} - \frac{k-1}{x-2} = 1$ 无解，则 k 的值为_____．

【答案】 4

【解析】

【分析】 本题主要考查了根据分式方程解的情况求参数，先解分式方程得到 $x = 6 - k$ ，再根据分式方程无解得到 $6 - k - 2 = 0$ ，解方程即可得到答案．

【详解】 解： $\frac{3}{x-2} - \frac{k-1}{x-2} = 1$

去分母得： $3 - k + 1 = x - 2$ ，

解得 $x = 6 - k$ ，

$\therefore$ 关于 x 的方程 $\frac{3}{x-2} - \frac{k-1}{x-2} = 1$ 无解，

$\therefore$ 原方程有增根，

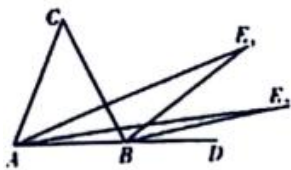
$\therefore x - 2 = 0$ ，即 $6 - k - 2 = 0$ ，

$\therefore k = 4$ ，

故答案为： 4．

14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AE_1 ， BE_1 分别是内角 $\angle CAB$ 、外角 $\angle CBD$ 的三等分线，且 $\angle E_1AD = \frac{1}{3}\angle CAB$ ，

$\angle E_1BD = \frac{1}{3}\angle CBD$ ，在 $\triangle ABE_1$ 中， AE_2 ， BE_2 分别是内角 $\angle E_1AB$ ，外角 $\angle E_1BD$ 的三等分线。且 $\angle E_2AD = \frac{1}{3}\angle E_1AB$ ， $\angle E_2BD = \frac{1}{3}\angle E_1BD$ ， $\cdots$ ，以此规律作下去。若 $\angle C = m^\circ$ 。则 $\angle E_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 度。



【答案】 $\frac{1}{3^n}m$

【解析】

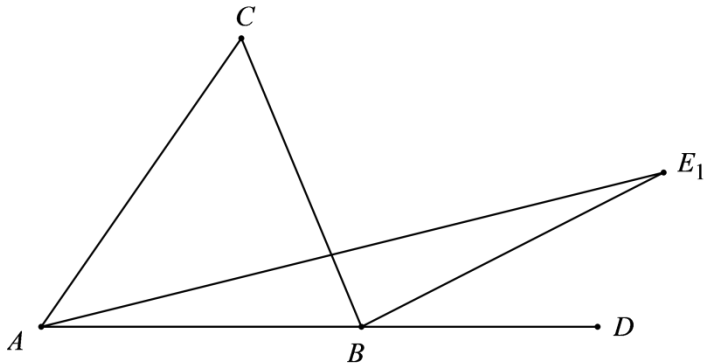
【分析】 本题考查了三角形的外角定理，等式性质，熟练掌握知识点是解题的关键。

先分别对 $\triangle ABC$, $\triangle E_1AB$ 运用三角形的外角定理，设 $\angle E_1AD = \alpha$ ，则 $\angle CAB = 3\alpha$ ， $\angle E_1BD = \beta$ ，则

$\angle CBD = 3\beta$ ，得到 $\beta = \alpha + \angle E_1$ ， $3\beta = 3\alpha + \angle C$ ，同理可求： $\angle E_2 = \frac{1}{3}\angle E_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \angle C$ ，所以可得

$$\angle E_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \angle C.$$

【详解】 解：如图：



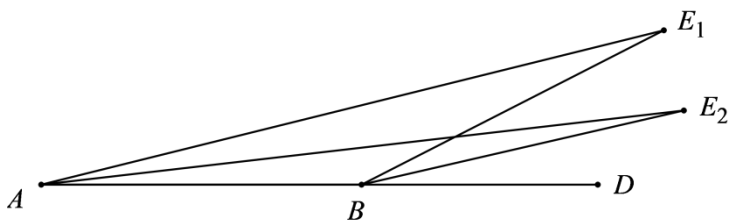
$$\because \angle E_1AD = \frac{1}{3}\angle CAB, \quad \angle E_1BD = \frac{1}{3}\angle CBD,$$

$$\therefore \text{设 } \angle E_1AD = \alpha, \quad \angle E_1BD = \beta, \quad \text{则 } \angle CAB = 3\alpha, \quad \angle CBD = 3\beta,$$

$$\text{由三角形的外角的性质得: } \beta = \alpha + \angle E_1, \quad 3\beta = 3\alpha + \angle C,$$

$$\therefore \angle E_1 = \frac{1}{3}\angle C,$$

如图：



同理可求： $\angle E_2 = \frac{1}{3} \angle E_1$,

$$\therefore \angle E_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \angle C,$$

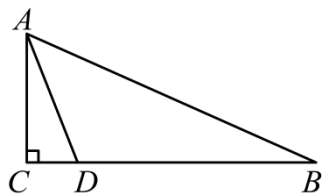
.....,

$$\therefore \angle E_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \angle C,$$

$$\text{即 } \angle E_n = \frac{1}{3^n} m^\circ,$$

故答案为： $\frac{1}{3^n} m$.

15. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$. 点 D 在线段 BC 上, $\angle BAD = 45^\circ$. 若 $AC = 4$, $CD = 1$, 则 $\triangle ABC$ 的面积是_____.

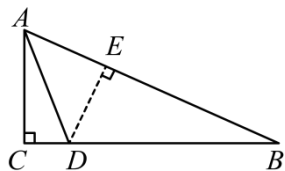


【答案】 $\frac{40}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查解直角三角形, 勾股定理. 过 D 作 $DE \perp AB$ 于 E , 设 $DB = x$, 则 $CB = x + 1$, 利用 $\sin \angle B = \frac{AC}{AB} = \frac{DE}{DB}$ 列出等式即可.

【详解】 解: 过 D 作 $DE \perp AB$ 于 E ,



$$\because \angle C = 90^\circ, \quad AC = 4, \quad CD = 1,$$

$$\therefore AD = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

$$\because \angle BAD = 45^\circ$$

$\therefore ADE$ 是等腰直角三角形

$$\therefore DE = \frac{\sqrt{2}}{2} AD = \frac{\sqrt{34}}{2}$$

设 $DB = x$ ，则 $CB = x + 1$

$$\therefore AB = \sqrt{4^2 + (x+1)^2}$$

$$\because \sin \angle B = \frac{AC}{AB} = \frac{DE}{DB}$$

$$\therefore \frac{4}{\sqrt{4^2 + (x+1)^2}} = \frac{\frac{\sqrt{34}}{2}}{x}$$

$$\text{解得 } x = -\frac{17}{5} \text{ (舍去) 或 } x = \frac{17}{3}$$

经检验 $x = \frac{17}{3}$ 是原分式方程的解，

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AC \times DB = \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{17}{3}\right) \times 4 = \frac{40}{3}.$$

故答案为： $\frac{40}{3}$.

三、解答题：解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤（共 90 分）

$$16. (1) \text{ 计算： } \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} - \sqrt{27} + 2\sin 60^\circ - (\pi - 2024)^0;$$

$$(2) \text{ 解不等式组 } \begin{cases} -x - 3 < -2 \\ \frac{3x - 1}{2} \leq x + 2 \end{cases}$$

【答案】 (1) $3 - 2\sqrt{3}$; (2) $-1 < x \leq 5$

【解析】

【分析】 本题考查了实数的混合运算，解一元一次不等式组；

(1) 根据负整数指数幂，二次根式的性质，特殊角的三角函数值，零指数幂进行计算即可求解；

(2) 分别求出每一个不等式的解集，根据口诀：同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小找不到确定不等式组的解集.

【详解】 解： (1) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} - \sqrt{27} + 2\sin 60^\circ - (\pi - 2024)^0$

$$= 4 - 3\sqrt{3} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

$$= 4 - 3\sqrt{3} + \sqrt{3} - 1$$

$$= 3 - 2\sqrt{3}$$

$$(2) \begin{cases} -x-3 < -2 \text{ ①} \\ \frac{3x-1}{2} \leq x+2 \text{ ②} \end{cases}$$

解不等式①得： $x > -1$

解不等式②得： $x \leq 5$

$\therefore$ 不等式组的解集为： $-1 < x \leq 5$

17. 先化简： $\left(\frac{x}{x-2} - \frac{x}{x+2}\right) \div \frac{x^2+x}{x^2-4}$ ，再从 $-2, -1, 0, 1, 2$ 之中选择一个合适的数作为 x 的值代入求值.

【答案】 $\frac{4}{x+1}$ ，当 $x=1$ 时，原式 $= 2$.

【解析】

【分析】 本题主要考查了分式的化简求值，先把小括号内的式子通分，再把除法变成乘法后约分化简，接着根据分式有意义的条件确定 x 的值，最后代值计算即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解：} & \left(\frac{x}{x-2} - \frac{x}{x+2}\right) \div \frac{x^2+x}{x^2-4} \\ &= \frac{x(x+2) - x(x-2)}{(x-2)(x+2)} \div \frac{x(x+1)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{x^2+2x-x^2+2x}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{x(x+1)} \\ &= \frac{4x}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{x(x+1)} \\ &= \frac{4}{x+1}, \end{aligned}$$

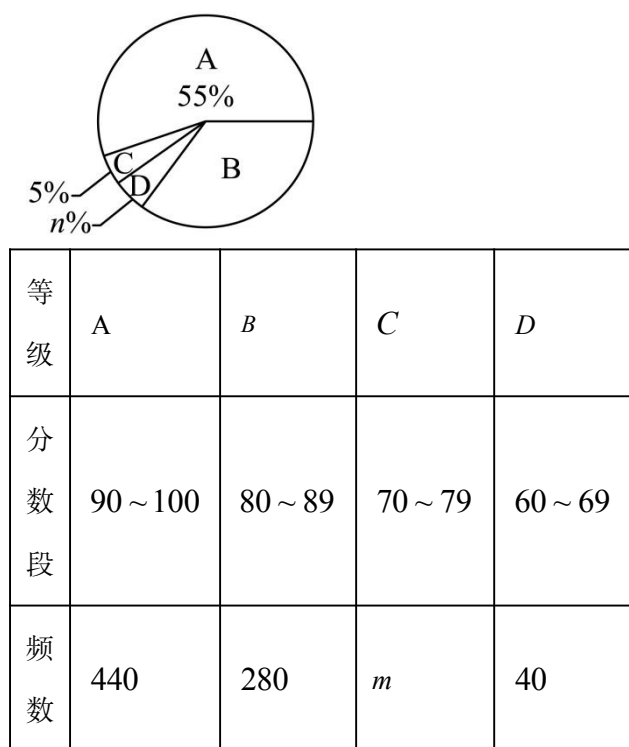
$\therefore$ 分式要有意义，

$$\therefore \begin{cases} (x+2)(x-2) \neq 0 \\ x(x+1) \neq 0 \end{cases},$$

$\therefore x \neq \pm 2$ 且 $x \neq 0$ 且 $x \neq -1$,

$\therefore$ 当 $x = 1$ 时, 原式 $= \frac{4}{1+1} = 2$.

18. 2024 年 4 月 21 日, 达州马拉松暨“跑遍四川”达州站马拉松赛鸣枪开跑. 本次赛事以“相约巴人故里, 乐跑红色达州”为主题. 旨在增强全市民众科学健身意识. 推动全民健身活动, 本届赛事共设置马拉松, 半程马拉松和欢乐跑三个项目赛后随机抽样了部分参赛选手对本次赛事组织进行满意度评分调查, 整理后得到下列不完整的图表:



请根据表中提供的信息, 解答下列问题:

- (1) 此次调查共抽取了_____名选手, $m =$ _____, $n =$ _____;
- (2) 扇形统计图中, B 等级所对应的扇形圆心角度数是_____度;
- (3) 赛后若在三个项目的冠军中随机抽取两人访谈, 请用列表或画树状图的方法, 求出恰好抽到马拉松和欢乐跑冠军的概率.

【答案】 (1) 800, 40, 5

(2) 126

(3) $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了列表法求概率, 频数分布表以及扇形统计图;

- (1) 根据 A 等级的人数除以占比得出总人数, 进而求得 m, n 的值;
- (2) 根据 B 等级的占比乘以 360° , 即可求解;

(3) 设三个项目的冠军分别为 A, B, C ，根据列表法求概率，即可求解.

【小问 1 详解】

解：依题意， $\frac{440}{55\%} = 800$ 名选手， $m = 800 \times 5\% = 40$ ， $n\% = \frac{40}{800} \times 100\% = 5\%$

$$\therefore n = 5$$

故答案为：800，40，5.

【小问 2 详解】

扇形统计图中， B 等级所对应的扇形圆心角度数是 $\frac{280}{800} \times 360^\circ = 126^\circ$ ，

故答案为：126.

【小问 3 详解】

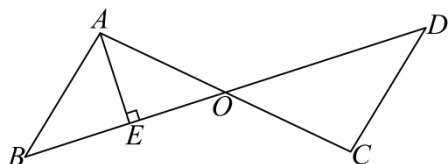
解：设三个项目的冠军分别为 A, B, C ，列表如下，

	A	B	C
A		AB	AC
B	BA		BC
C	CA	CB	

共有 6 种等可能结果，其中恰好抽到马拉松和欢乐跑冠军的有 2 种情形，

$\therefore$ 恰好抽到马拉松和欢乐跑冠军的概率为 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

19. 如图，线段 AC 、 BD 相交于点 O 。且 $AB \parallel CD$ ， $AE \perp BD$ 于点 E 。



(1) 尺规作图：过点 C 作 BD 的垂线，垂足为点 F 、连接 AF 、 CE ；(不写作法，保留作图痕迹，并标明相应的字母)

(2) 若 $AB = CD$ ，请判断四边形 $AECF$ 的形状，并说明理由。(若前问未完成，可画草图完成此问)

【答案】(1) 见解析 (2) 四边形 $AECF$ 是平行四边形，理由见解析

【解析】

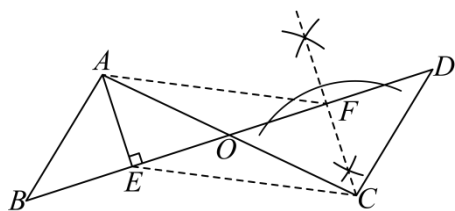
【分析】本题主要考查了平行四边形的判定，垂线的尺规作图，全等三角形的性质与判定：

(1) 先根据垂线的尺规作图方法作出点 F ，再连接 AF 、 CE 即可；

(2) 先证明 $\triangle ABO \cong \triangle CDO$ (ASA)，得到 $OA = OC$ ，再证明 $AE \parallel CF$ ， $\angle AEO = \angle CFO = 90^\circ$ ，进而证明 $\triangle AOE \cong \triangle COF$ (AAS)，得到 $AE = CF$ ，即可证明四边形 $AECF$ 是平行四边形。

【小问 1 详解】

解：如图所示，即为所求；



【小问 2 详解】

解：四边形 $AECF$ 是平行四边形，理由如下：

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle B = \angle D, \angle OAB = \angle OCD,$$

$$\text{又} \because AB = CD,$$

$$\therefore \triangle ABO \cong \triangle CDO (\text{ASA}),$$

$$\therefore OA = OC,$$

$$\because AE \perp BD, CF \perp BD,$$

$$\therefore AE \parallel CF, \angle AEO = \angle CFO = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle AOE = \angle COF,$$

$$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF (\text{AAS}),$$

$$\therefore AE = CF,$$

$$\therefore \text{四边形 } AECF \text{ 是平行四边形.}$$

20. “三汇彩婷会”是达州市渠县三汇镇独有的传统民俗文化活动、起源于汉代、融数学、力学、锻造、绑扎、运载于一体，如图 1，在一次展演活动中，某数学综合与实践小组将彩婷抽象成如图 2 的示意图， AB 是彩婷的中轴、甲同学站在 C 处，借助测角仪观察，发现中轴 AB 上的点 D 的仰角是 30° ，他与彩婷中轴的距离 $BC = 6$ 米。乙同学在观测点 E 处借助无人机技术进行测量，测得 AE 平行于水平线 BC ，中轴 AB 上的点 F 的仰角 $\angle AEF = 45^\circ$ ，点 E 、 F 之间的距离是 4 米，已知彩婷的中轴 $AB = 6.3$ 米，甲同学的眼睛到地面的距离 $MC = 1.5$ 米，请根据以上数据，求中轴上 DF 的长度。（结果精确到 0.1 米，参考数据

$$\sqrt{3} \approx 1.73, \sqrt{2} \approx 1.41)$$



图1

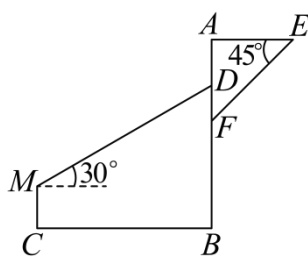


图2

【答案】中轴上 DF 的长度为 1.5 米

【解析】

【分析】本题考查了解直角三角形的应用；过点 M 作 $MN \perp AB$ 于点 N ，分别求得 DN, AF 的长，根据 $DF = AF + DB - AB$ ，即可求解.

【详解】解：如图，过点 M 作 $MN \perp AB$ 于点 N ，



图1

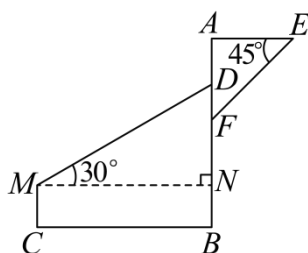


图2

依题意，四边形 $MCBN$ 是矩形， $\angle DMN = 30^\circ, \angle AEF = 45^\circ$

$$\therefore DN = MN \cdot \tan 30^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}, \quad AF = EF \cdot \sin 45^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore DF = AF + DB - AB$$

$$= 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 1.5 - 6.3$$

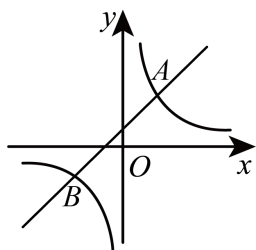
$$= 2 \times 1.41 + 2 \times 1.73 + 1.5 - 6.3$$

$$\approx 1.5 \text{ 米}$$

答：中轴上 DF 的长度为 1.5 米.

21. 如图，一次函数 $y = kx + b$ (k, b 为常数， $k \neq 0$) 的图象与反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ (m 为常数， $m \neq 0$)

的图象交于点 $A(2, 3)$ ， $B(a, -2)$.



- (1) 求反比例函数和一次函数的解析式；
 (2) 若点 C 是 x 轴正半轴上的一点，且 $\angle BCA = 90^\circ$ ，求点 C 的坐标.

【答案】(1) $y = \frac{6}{x}$, $y = x + 1$

(2) $C(3, 0)$

【解析】

【分析】本题考查反比例函数与一次函数综合题型，也考查了锐角三角函数的应用.

(1) 用待定系数法先求反比例函数解析式，再求一次函数解析式即可；

(2) 过 A 作 $AM \perp x$ 轴于 M ，过 B 作 $BN \perp x$ 轴于 N ，设 $C(c, 0)$ ，先求得 $\angle NCB = \angle MAC$ 得到 $\tan \angle NCB = \tan \angle MAC$ ，即 $\frac{NB}{NC} = \frac{MC}{AM}$ ，得出等量关系解出 c 即可.

【小问 1 详解】

解：将 $A(2, 3)$ 代入 $y = \frac{m}{x}$ 得

$$m = 2 \times 3 = 6$$

$$\therefore y = \frac{6}{x}$$

将 $B(a, -2)$ 代入 $y = \frac{6}{x}$ 得

$$-2 = \frac{6}{a}$$

$$\therefore a = -3$$

$$\therefore B(-3, -2)$$

将 $A(2, 3)$ 和 $B(-3, -2)$ 代入 $y = kx + b$ 得

$$\begin{cases} 2k + b = 3 \\ -3k + b = -2 \end{cases}$$

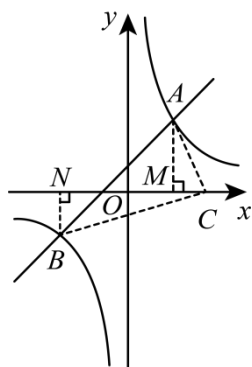
$$\text{解得} \begin{cases} k = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\therefore y = x + 1$$

故反比例函数和一次函数的解析式分别为 $y = \frac{6}{x}$ 和 $y = x + 1$;

【小问2详解】

如图，过 A 作 $AM \perp x$ 轴于 M ，过 B 作 $BN \perp x$ 轴于 N ，



$$\because \angle BCA = 90^\circ$$

$$\therefore \angle NCB + \angle ACM = 90^\circ$$

$$\because \angle MAC + \angle ACM = 90^\circ$$

$$\therefore \angle NCB = \angle MAC$$

$$\therefore \tan \angle NCB = \tan \angle MAC$$

$$\text{即 } \frac{NB}{NC} = \frac{MC}{AM}$$

$$\text{设 } C(c, 0), \text{ 则 } MC = c - 2, \quad NC = c + 3$$

$$\because AM = 3, BN = 2$$

$$\therefore \frac{2}{c+3} = \frac{c-2}{3}$$

$$\text{解得 } c = -4 \text{ (舍去) 或 } c = 3$$

经检验， $c = 3$ 是原分式方程的解，

$$\therefore C(3, 0).$$

22. 为拓宽销售渠道，助力乡村振兴，某乡镇帮助农户将 A、B 两个品种的柑橘加工包装成礼盒再出售。已知每件 A 品种柑橘礼盒比 B 品种柑橘礼盒的售价少 20 元。且出售 25 件 A 品种柑橘礼盒和 15 件 B 品种柑橘礼盒的总价共 3500 元。

(1) 求 A、B 两种柑橘礼盒每件的售价分别为多少元？

(2) 已知加工 A、B 两种柑橘礼盒每件的成本分别为 50 元、60 元、该乡镇计划在某农产品展销活动中售出 A、B 两种柑橘礼盒共 1000 盒，且 A 品种柑橘礼盒售出的数量不超过 B 品种柑橘礼盒数量的 1.5 倍。总成本不超过 54050 元。要使农户收益最大，该乡镇应怎样安排 A、B 两种柑橘礼盒的销售方案，并求出农

户在这次农产品展销活动中的最大收益为多少元？

【答案】 (1) A 、 B 两种柑橘礼盒每件的售价分别为 80,100 元

(2) 要使农户收益最大，销售方案为售出 A 种柑橘礼盒 595 盒，售出 B 种柑橘礼盒 405 盒，最大收益为 34050 元

【解析】

【分析】 本题考查了二元一次方程组的应用；一元一次不等式的应用，一次函数的应用；

(1) 设 A 、 B 两种柑橘礼盒每件的售价分别为 a 元， b 元，根据题意列出二元一次方程组，即可求解；

(2) 设售出 A 种柑橘礼盒 x 盒，则售出 B 种柑橘礼盒 $(1000-x)$ 盒，根据题意列出不等式组，得出 $595 \leq x \leq 600$ ，设收益为 y 元，根据题意列出函数关系式，进而根据一次函数的性质，即可求解。

【小问 1 详解】

解：设 A 、 B 两种柑橘礼盒每件的售价分别为 a 元， b 元，根据题意得，

$$\begin{cases} a+20=b \\ 25a+15b=3500 \end{cases}$$

解得： $\begin{cases} a=80 \\ b=100 \end{cases}$

答： A 、 B 两种柑橘礼盒每件的售价分别为 80,100 元；

【小问 2 详解】

解：设售出 A 种柑橘礼盒 x 盒，则售出 B 种柑橘礼盒 $(1000-x)$ 盒，根据题意得，

$$\begin{cases} x \leq 1.5(1000-x) \\ 50x+60(1000-x) \leq 54050 \end{cases}$$

解得： $595 \leq x \leq 600$

设收益为 y 元，根据题意得， $y = (80-50)x + (100-60)(1000-x) = -10x + 40000$

$\therefore -10 < 0$

$\therefore y$ 随 x 的增大而减小，

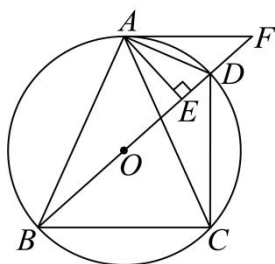
$\therefore$ 当 $x = 595$ 时， y 取得最大值，最大值为 $-10 \times 595 + 40000 = 34050$ (元)

$\therefore$ 售出 B 种柑橘礼盒 $1000 - 595 = 405$ (盒)

答：要使农户收益最大，销售方案为售出 A 种柑橘礼盒 595 盒，售出 B 种柑橘礼盒 405 盒，最大收益为 34050 元。

23. 如图， BD 是 $\odot O$ 的直径. 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$. 连接 AC ，且 $AB = AC$ ，以 AD 为边作

$\angle DAF = \angle ACD$ 交 BD 的延长线于点 F .



- (1) 求证: AF 是 $\odot O$ 的切线;
- (2) 过点 A 作 $AE \perp BD$ 交 BD 于点 E . 若 $CD = 3DE$, 求 $\cos \angle ABC$ 的值.

【答案】 (1) 证明见解析

$$(2) \quad \frac{\sqrt{5}}{5}$$

【解析】

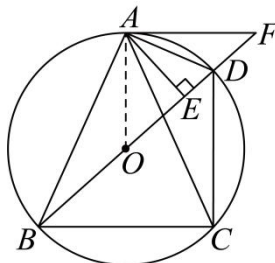
【分析】(1) 如图所示, 连接 OA , 由直径所对的圆周角是直角得到 $\angle BAD = 90^\circ$, 导角可证明 $\angle DAF = \angle OAB$, 进而得到 $\angle OAF = 90^\circ$, 据此即可证明 AF 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 延长 CD 交 AF 于 H , 延长 AO 交 BC 于 G , 连接 OC , 由直径所对的圆周角是直角得到 $\angle BCD = 90^\circ$, 证明 $AG \parallel CH$, 得到 $\angle AHC = 90^\circ$, 接着证明 $\triangle ABE \cong \triangle ACH$ (AAS), 得到 $AE = AH$, $BE = CH$, 进一步证明 $\text{Rt}\triangle ADE \cong \text{Rt}\triangle ADH$ (HL), 得到 $DH = DE$, 设 $DH = DE = a$, 则 $CD = 3a$, $BE = CH = 4a$, 进而得到 $BD = BE + DE = 5a$, 则 $OA = OD = 2.5a$, 由勾股定理得到 $AE = \sqrt{OA^2 - OE^2} = 2a$,

$$AD = \sqrt{AE^2 + DE^2} = \sqrt{5}a, \text{ 则 } \cos \angle ADE = \frac{DE}{AD} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ 进一步可得 } \cos \angle ABC = \cos \angle ADE = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

【小问 1 详解】

证明: 如图所示, 连接 OA .



$\therefore BD$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OAB + \angle OAD = 90^\circ.$$

$$\therefore OA = OB,$$

$$\therefore \angle OAB = \angle OBA,$$

$$\because \angle DAF = \angle ACD, \angle OBA = \angle ACD,$$

$$\therefore \angle DAF = \angle OAB,$$

$$\therefore \angle DAF + \angle OAD = \angle OAB + \angle OAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OAF = 90^\circ,$$

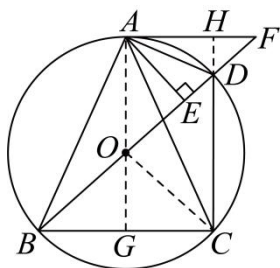
$$\therefore OA \perp AF,$$

又 $\because OA$ 是 $\odot O$ 的半径,

$\therefore AF$ 是 $\odot O$ 的切线;

【小问2详解】

解: 如图所示, 延长 CD 交 AF 于 H , 延长 AO 交 BC 于 G , 连接 OC ,



$\because BD$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle BCD = 90^\circ$, 即 $CH \perp BC$,

$\because AB = AC, OB = OC$,

$\therefore OA$ 垂直平分 BC ,

$\therefore AG \perp BC$,

$\therefore AG \parallel CH$,

$\because \angle OAF = 90^\circ$,

$\because AE \perp BD$,

$\therefore \angle AEB = \angle AHC = 90^\circ$,

又 $\because \angle ABE = \angle ACH$,

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACH$ (AAS),

$\therefore AE = AH, BE = CH$,

$\because AD = AD$,

$\therefore \text{Rt}\triangle ADE \cong \text{Rt}\triangle ADH$ (HL),

$\therefore DH = DE$,

设 $DH = DE = a$ ，则 $CD = 3a$ ，

$$\therefore BE = CH = DH + CD = 4a,$$

$$\therefore BD = BE + DE = 5a,$$

$$\therefore OA = OD = 2.5a,$$

$$\therefore OE = OD - DE = 1.5a,$$

$$\therefore AE = \sqrt{OA^2 - OE^2} = 2a,$$

$$\therefore AD = \sqrt{AE^2 + DE^2} = \sqrt{5}a,$$

$$\therefore \cos \angle ADE = \frac{DE}{AD} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore AB = AC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ADE,$$

$$\therefore \cos \angle ABC = \cos \angle ADE = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

【点睛】本题主要考查了切线的判定，求角的余弦值，直径所对的圆周角是直角，同弧所对的圆周角相等，勾股定理，全等三角形的性质与判定等等，正确作出辅助线构造全等三角形和直角三角形是解题的关键.

24. 如图 1，抛物线 $y = ax^2 + kx - 3$ 与 x 轴交于点 $A(-3, 0)$ 和点 $B(1, 0)$ ，与 y 轴交于点 C ．点 D 是抛物线的顶点.

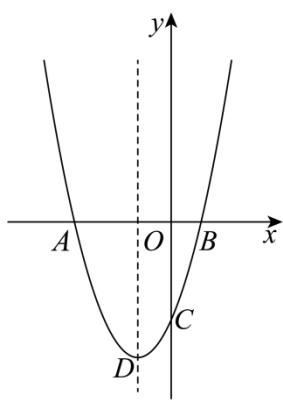


图1

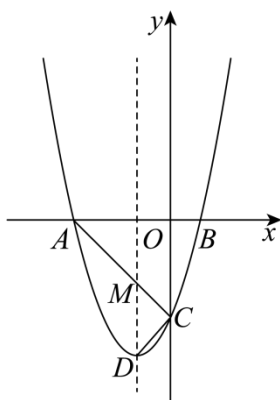


图2

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 如图 2，连接 AC ， DC ，直线 AC 交抛物线的对称轴于点 M ，若点 P 是直线 AC 上方抛物线上一点，

且 $S_{\triangle PMC} = 2S_{\triangle DMC}$ ，求点 P 的坐标；

(3) 若点 N 是抛物线对称轴上位于点 D 上方的一动点，是否存在以点 N ， A ， C 为顶点的三角形是等腰三角形，若存在，请直接写出满足条件的点 N 的坐标；若不存在，请说明理由。

【答案】(1) $y = x^2 + 2x - 3$

(2) $P(1, 0)$ 或 $P(-4, 5)$;

(3) $N(-1, \sqrt{14})$ 或 $(-1, -\sqrt{14})$ 或 $(-1, -1)$ 或 $(-1, \sqrt{17} - 3)$

【解析】

【分析】(1) 待定系数法求解析式，即可求解；

(2) 先求得 C, M, D 的坐标，根据勾股定理的逆定理得出 $\triangle MCD$ 是等腰三角形，进而根据 $S_{\triangle PMC} = 2S_{\triangle DMC}$ 得出 $S_{\triangle PMC} = 2$ ，连接 MB ，设 MD 交 x 轴于点 E ，则 $ME = EB = 2$ 得出 $\triangle MBE$ 是等腰直角三角形，进而得出 $S_{\triangle BMC} = 2$ ，则点 P 与点 B 重合时符合题意， $P(1, 0)$ ，过点 B 作 $BP \parallel AC$ 交抛物线于点 P ，得出直线 BP 的解析式为 $y = -x + 1$ ，联立抛物线解析式，即可求解；

(3) 勾股定理求得 AC^2, AN^2, CN^2 ，根据等腰三角形的性质，分类讨论解方程，即可求解。

【小问 1 详解】

解：∵ 抛物线 $y = ax^2 + kx - 3$ 与 x 轴交于点 $A(-3, 0)$ 和点 $B(1, 0)$ ，

$$\therefore \begin{cases} 9a - 3k - 3 = 0 \\ a + k - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得：} \begin{cases} a = 1 \\ k = 2 \end{cases}$$

∴ 抛物线的解析式为 $y = x^2 + 2x - 3$ ；

【小问 2 详解】

由 $y = x^2 + 2x - 3$ ，当 $x = 0$ 时， $y = -3$ ，则 $C(0, -3)$

∵ $y = x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$ ，则 $D(-1, -4)$ ，对称轴为直线 $x = -1$

设直线 AC 的解析式为 $y = k_1x + b_1$ ，代入 $A(-3, 0)$ ， $C(0, -3)$

$$\therefore \begin{cases} -3k_1 + b_1 = 0 \\ b_1 = -3 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k_1 = -1 \\ b_1 = -3 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 AC 的解析式为 $y = -x - 3$,

当 $x = -1$ 时, $y = -2$, 则 $M(-1, -2)$

$$\therefore MC = \sqrt{1^2 + (-2+3)^2} = \sqrt{2}, MD = -2 - (-4) = 2, CD = \sqrt{1^2 + (-3+4)^2} = \sqrt{2}$$

$$\therefore MD^2 = MC^2 + CD^2$$

$\therefore \triangle MCD$ 是等腰三角形,

$$\therefore S_{\triangle PMC} = 2S_{\triangle DMC} = 2 \times \frac{1}{2} \times CD^2 = 2$$

连接 MB , 设 MD 交 x 轴于点 E , 则 $ME = EB = 2$

$\therefore \triangle MBE$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle BME = 45^\circ, BM = 2\sqrt{2},$$

又 $\angle DMC = 45^\circ$

$$\therefore BM \perp AC$$

$$\therefore S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2} \times MC \times BM = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 2$$

$\therefore$ 点 P 与点 B 重合时符合题意, $P(1, 0)$

如图所示, 过点 B 作 $BP \parallel AC$ 交抛物线于点 P ,

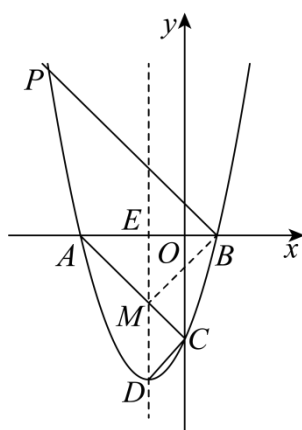


图2

设直线 BP 的解析式为 $y = -x + m$, 将 $B(1, 0)$ 代入得,

$$0 = -1 + m$$

解得: $m = 1$

$\therefore$ 直线 BP 的解析式为 $y = -x + 1$

$$\text{联立} \begin{cases} y = -x + 1 \\ y = x^2 + 2x - 3 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = -4 \\ y = 5 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\therefore P(-4, 5)$$

综上所述, $P(1, 0)$ 或 $P(-4, 5)$;

【小问 3 详解】

解: $\because A(-3, 0), C(0, -3),$

$$\therefore AC^2 = 3^2 + 3^2 = 18$$

$\because$ 点 N 是抛物线对称轴上位于点 D 上方的一动点, 设 $N(-1, n)$ 其中 $n > -4$

$$\therefore AN^2 = (-3+1)^2 + n^2 = 4 + n^2, \quad CN^2 = 1^2 + (n+3)^2 = n^2 + 6n + 10$$

$$\textcircled{1} \text{ 当 } AN = AC \text{ 时, } 4 + n^2 = 18, \text{ 解得: } n = \sqrt{14} \text{ 或 } n = -\sqrt{14}$$

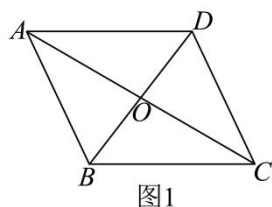
$$\textcircled{2} \text{ 当 } NA = NC \text{ 时, } 4 + n^2 = n^2 + 6n + 10, \text{ 解得: } n = -1$$

$$\textcircled{3} \text{ 当 } CA = CN \text{ 时, } 18 = n^2 + 6n + 10, \text{ 解得: } n = \sqrt{17} - 3 \text{ 或 } n = -\sqrt{17} - 3 \text{ (舍去)}$$

综上所述, $N(-1, \sqrt{14})$ 或 $(-1, -\sqrt{14})$ 或 $(-1, -1)$ 或 $(-1, \sqrt{17} - 3)$.

【点睛】本题考查了二次函数综合问题, 待定系数法求解解析式, 面积问题, 特殊三角形问题, 熟练掌握二次函数的性质是解题的关键.

25. 在学习特殊的平行四边形时, 我们发现正方形的对角线等于边长的 $\sqrt{2}$ 倍, 某数学兴趣小组以此为方向对菱形的对角线和边长的数量关系探究发现, 具体如下: 如图 1.



(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AC \perp BD, \quad AO = CO, \quad BO = DO.$$

$$\therefore AB^2 = AO^2 + BO^2.$$

$$\text{又} \because AC = 2AO, \quad BD = 2BO,$$

$$\therefore AB^2 = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\text{化简整理得 } AC^2 + BD^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【类比探究】

(2) 如图 2. 若四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 请说明边长与对角线的数量关系.

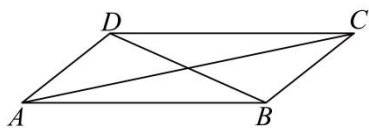


图2

【拓展应用】

(3) 如图 3, 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 对角线 AC , BD 相交于点 O , 点 E 为 AO 的中点, 点 F 为 BC 的中点, 连接 EF , 若 $AB = 8$, $BD = 8$, $AC = 12$, 直接写出 EF 的长度.

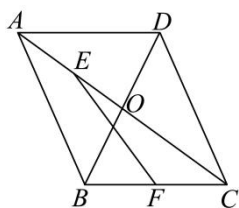


图3

【答案】 (1) $\frac{1}{4}AC^2$, $\frac{1}{4}BD^2$, $4AB^2$; (2) $AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2$; (3) $\sqrt{46}$

【解析】

【分析】 (1) 根据菱形的性质及勾股定理补充过程, 即可求解;

(2) 过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E , 过点 C 作 $CF \perp AB$ 交 AB 的延长线于点 F , 根据平行四边形的性质得 $AB = CD$, $AB \parallel CD$, $AD = BC$, 证明 $\triangle DAE \cong \triangle CBF$ (AAS),

得 $AE = BF$, $DE = CF$, 根据勾股定理得 $DB^2 = DE^2 + BF^2 = DE^2 + (AB - AE)^2$,

$AC^2 = CF^2 + AF^2 = CF^2 + (AB + BF)^2$, 继而得出 $AC^2 + BD^2$ 的值即可;

(3) 由 (2) 可得 $AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2$ 得出 $AD = 2\sqrt{10}$, 过点 E, O 分别作 BC 的垂线, 垂足分别为 M, G , 连接 OF , 根据勾股定理以及已知条件, 分别求得 OG, CG, BG , 根据 $EM \parallel OG$ 得出

$$MG = \frac{1}{2}CG = \frac{3\sqrt{10}}{4}, \quad MF = \frac{5}{4}\sqrt{10} \quad \text{根据 } \triangle COG \sim \triangle CEM \text{ 得出 } EM = \frac{3}{2}OG = \frac{9}{4}\sqrt{6}, \text{ 进而勾股定理, 即可求解.}$$

可求解.

【详解】 解: (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AC \perp BD, \quad AO = CO, \quad BO = DO.$$

$$\therefore AB^2 = AO^2 + BO^2.$$

$$\text{又} \because AC = 2AO, \quad BD = 2BO,$$

$$\therefore AB^2 = \frac{1}{4}AC^2 + \frac{1}{4}BD^2.$$

$$\text{化简整理得 } AC^2 + BD^2 = 4AB^2$$

$$\text{故答案为: } \frac{1}{4}AC^2, \quad \frac{1}{4}BD^2, \quad 4AB^2.$$

(2) $AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2$, 理由如下,

过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E , 过点 C 作 $CF \perp AB$ 交 AB 的延长线于点 F ,

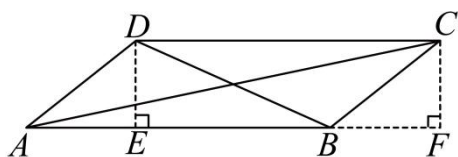


图2

$$\therefore \angle DEA = \angle DEB = \angle CFB = 90^\circ,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB = CD, \quad AB \parallel CD, \quad AD = BC,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle CBF,$$

在 $\triangle DAE$ 和 $\triangle CBF$ 中,

$$\begin{cases} \angle DAE = \angle CBF \\ \angle DEA = \angle CFB, \\ AD = BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DAE \cong \triangle CBF \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AE = BF, \quad DE = CF,$$

$$\text{在 Rt}\triangle DBE \text{ 中, } DB^2 = DE^2 + BE^2 = DE^2 + (AB - AE)^2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle CAF \text{ 中, } AC^2 = CF^2 + AF^2 = CF^2 + (AB + BF)^2,$$

$$\therefore AC^2 + BD^2 = DE^2 + (AB - AE)^2 + CF^2 + (AB + BF)^2$$

$$= 2DE^2 + AB^2 - 2AB \cdot AE + AE^2 + AB^2 + 2AB \cdot AE + AE^2$$

$$= 2(DE^2 + AE^2) + 2AB^2$$

$$= 2AD^2 + 2AB^2,$$

$$\therefore AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2$$

(3) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $AB = 8$, $BD = 8$, $AC = 12$,

$\therefore$ 由 (2) 可得 $AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2$

$$\therefore 12^2 + 8^2 = 2 \times 8^2 + 2AD^2$$

解得: $AD = 2\sqrt{10}$ (负值舍去)

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $AC = 12$, $BD = 8$,

$$\therefore BC = AD = 2\sqrt{10}, \quad OA = OC = 6, \quad OB = OD = \frac{1}{2}BD = 4,$$

如图所示, 过点 E, O 分别作 BC 的垂线, 垂足分别为 M, G , 连接 OF ,

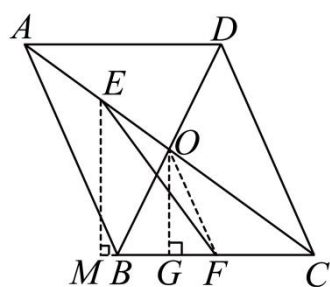


图3

$\because F$ 分别为 BC 的中点,

$$\therefore OF = \frac{1}{2}AB = 4 = OB = \frac{1}{2}BD,$$

$\because OG \perp BF$,

$$\therefore BG = GF = \frac{1}{2}BF,$$

$\because F$ 是 BC 的中点,

$$\therefore BF = \frac{1}{2}BC$$

$$\therefore BG = GF = \frac{1}{2}BF = \frac{1}{4}BC = \frac{\sqrt{10}}{2},$$

$$\therefore CG = BC - BG = \frac{3}{2}\sqrt{10},$$

在 $Rt\triangle OGC$ 中, $OG \perp BC$,

$$\therefore OG = \sqrt{OC^2 - CG^2} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{3}{2}\sqrt{10}\right)^2} = \frac{3\sqrt{6}}{2},$$

$\because E$ 为 AO 的中点,

$$\therefore OE = \frac{1}{2}OA,$$

$$\because AO = OC,$$

$$\therefore OE = \frac{1}{2}OC,$$

$$\therefore \frac{OC}{EC} = \frac{2}{3}, \frac{OE}{OC} = \frac{1}{2},$$

$$\because EM \perp BC, OG \perp BC,$$

$$\therefore EM \parallel OG,$$

$$\therefore \frac{EO}{OC} = \frac{MG}{CG} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore MG = \frac{1}{2}CG = \frac{3\sqrt{10}}{4},$$

$$\therefore MF = MG + GF = \frac{3\sqrt{10}}{4} + \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{5}{4}\sqrt{10},$$

$$\because EM \parallel OG,$$

$$\therefore \triangle COG \sim \triangle CEM,$$

$$\therefore \frac{OG}{EM} = \frac{OC}{EC} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore EM = \frac{3}{2}OG = \frac{9}{4}\sqrt{6},$$

$$\text{在 Rt}\triangle EMF \text{ 中, } EF = \sqrt{EM^2 + MF^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{4}\sqrt{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\sqrt{10}\right)^2} = \sqrt{46}.$$

【点睛】 本题考查了菱形的性质，平行四边形的性质，勾股定理，全等三角形的性质与判定，相似三角形的性质与判定，平行线分线段成比例，熟练掌握勾股定理是解题的关键.