

资阳市 2024 年初中学业水平考试暨高中阶段学校招生考试

数学

全卷分为第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 4 页。全卷满分 150 分。考试时间共 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前，请考生务必在答题卡上正确填写自己的姓名、准考证号和座位号。考试结束，将试题卷和答题卡一并交回。
2. 第 I 卷每小题选出的答案须用 2B 铅笔在答题卡上把对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦擦净后，再选涂其它答案。
3. 第 II 卷各题须用 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上对应题号答题位置作答。在试卷上作答，答案无效。

第 I 卷（选择题 共 40 分）

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 3 的相反数为（ ）

- A. -3 B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. 3

【答案】A

【解析】

【分析】根据相反数的定义：只有符号不同的两个数互为相反数计算即可。

【详解】解：3 的相反数是 -3。

故选：A。

【点睛】此题考查求一个数的相反数，解题关键在于掌握相反数的概念。

2. 下列计算正确的是（ ）

- A. $a^3 + a^2 = a^5$ B. $a^3 - a^2 = a$ C. $(a^2)^3 = a^5$ D. $a^5 \div a^2 = a^3$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了合并同类项，幂的乘方，同底数幂除法，熟练掌握运算是解答本题的关键。分别根据合并同类项的法则、同底数幂的除法法则、幂的乘方法则解答即可。

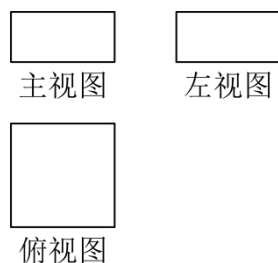
【详解】解：AB、 a^2 和 a^3 不是同类项，不能合并，故 AB 错误，不符合题意；

C、 $(a^2)^3 = a^6 \neq a^5$ ，故 C 错误，不符合题意；

D、 $a^5 \div a^2 = a^3$ ，故 D 正确，符合题意.

故选：D.

3. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体是（ ）



- A. 长方体 B. 棱锥 C. 圆锥 D. 球体

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查由三视图来判断几何体的形状.

【详解】解：由三视图可知，该几何体长方体，

故选：A.

4. 6 名学生一周做家务的天数依次为 4，4，5，7，7，7，这组数据的中位数和众数分别为（ ）

- A. 5，4 B. 6，5 C. 6，7 D. 7，7

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了众数和中位数的概念：一组数据中出现次数最多的数据叫做众数；将一组数据按照从小到大（或从大到小）的顺序排列，如果数据的个数是奇数，则处于中间位置的数就是这组数据的中位数；如果这组数据的个数是偶数，则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数.

【详解】中位数： $\frac{5+7}{2} = 6$ ，

众数：7

故选：C.

5. 在平面直角坐标系中，将点 $(-2,1)$ 沿 y 轴向上平移1个单位后，得到的点的坐标为（ ）

- A. $(-2,0)$ B. $(-2,2)$ C. $(-3,1)$ D. $(-1,1)$

【答案】B

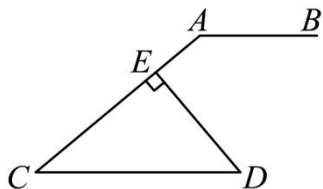
【解析】

【分析】本题考查了坐标系中点的平移规律. 根据横坐标, 右移加, 左移减; 纵坐标, 上移加, 下移减可得答案.

【详解】点 $(-2,1)$ 沿 y 轴向上平移1个单位后, 得到的点的坐标为 $(-2,2)$

故选: B.

6. 如图, $AB \parallel CD$, 过点 D 作 $DE \perp AC$ 于点 E . 若 $\angle D = 50^\circ$, 则 $\angle A$ 的度数为 ()



A. 130°

B. 140°

C. 150°

D. 160°

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了三角形内角和, 平行线的性质的知识, 熟练掌握以上知识是解题的关键.

根据题意可得 $\angle CED = 90^\circ$, $\angle D = 50^\circ$, 即 $\angle C = 180^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$, 再根据平行线的同旁内角互补 $\angle C + \angle A = 180^\circ$, 即可求出 $\angle A$ 的度数.

【详解】 $\because$ 过点 D 作 $DE \perp AC$ 于点 E ,

$$\therefore \angle CED = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle D = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 180^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ,$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle C + \angle A = 180^\circ,$$

将 $\angle C = 40^\circ$ 代入上式,

$$\text{可得} \angle A = 140^\circ,$$

故选B.

7. 一个正多边形的每个外角度数都等于 60° , 则这个多边形的边数为 ()

A. 4

B. 5

C. 6

D. 8

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查多边形的外角和, 解题的关键是掌握多边形的外角和等于 360° , 根据正多边形的每个内角相等, 每个外角也相等, 外角和等于 360° , 即可得出答案.

【详解】解: $\because$ 多边形的外角和等于 360° , 且这个每个外角都等于 60° ,

$\therefore$ 它的边数为 $360^\circ \div 60^\circ = 6$.

故选：C.

8. 若 $\sqrt{5} < m < \sqrt{10}$ ，则整数 m 的值为 ()

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】B

【解析】

【分析】此题考查了无理数的估算，解题的关键是熟练掌握无理数的估算方法. 首先确定 $\sqrt{5}$ 和 $\sqrt{10}$ 的范围，然后求出整数 m 的值的值即可.

【详解】解： $\because \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$ ，即 $2 < \sqrt{5} < 3$ ， $\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16}$ ，即 $3 < \sqrt{10} < 4$ ，

又 $\because \sqrt{5} < m < \sqrt{10}$ ，

$\therefore$ 整数 m 的值为：3，

故选：B.

9. 第14届国际数学教育大会 (JCME-14) 会标如图1所示，会标中心的图案来源于我国古代数学家赵爽的“弦图”，如图2所示的“弦图”是由四个全等的直角三角形 ($\triangle ABE$ ， $\triangle BCF$ ， $\triangle CDG$ ， $\triangle DAH$) 和一个小正方形 $EFGH$ 拼成的大正方形 $ABCD$. 若 $EF: AH = 1:3$ ，则 $\sin \angle ABE =$ ()



图1

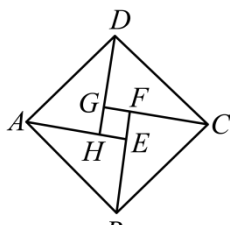


图2

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

B. $\frac{3}{5}$

C. $\frac{4}{5}$

D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】设 $EF = x$ ，则 $AH = 3x$ ，根据全等三角形，正方形的性质可得 $AE = 4x$ ，再根据勾股定理可得 $AB = 5x$ ，即可求出 $\sin \angle ABE$ 的值.

【详解】解：根据题意，设 $EF = x$ ，则 $AH = 3x$ ，

$\because \triangle ABE \cong \triangle DAH$ ，四边形 $EFGH$ 为正方形，

$\therefore AH = BE = 3x$ ， $EF = HE = x$ ，

$\therefore AE = 4x$ ，

$$\because \angle AEB = 90^\circ,$$

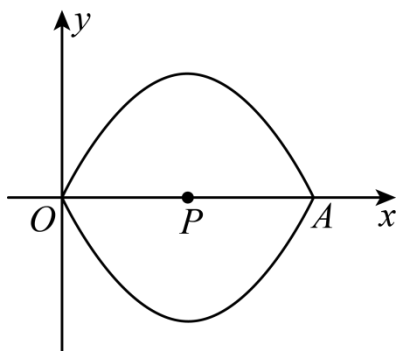
$$\therefore AB = \sqrt{AE^2 + BE^2} = 5x,$$

$$\therefore \sin \angle ABE = \frac{AE}{AB} = \frac{4x}{5x} = \frac{4}{5},$$

故选：C.

【点睛】本题考查了勾股定理，全等三角形，正方形的性质，三角函数值的知识，熟练掌握以上知识是解题的关键.

10. 已知二次函数 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx$ 与 $y = \frac{1}{2}x^2 - bx$ 的图像均过点 $A(4, 0)$ 和坐标原点 O ，这两个函数在 $0 \leq x \leq 4$ 时形成的封闭图像如图所示， P 为线段 OA 的中点，过点 P 且与 x 轴不重合的直线与封闭图像交于 B, C 两点. 给出下列结论：



① $b = 2$;

② $PB = PC$;

③以 O, A, B, C 为顶点的四边形可以为正方形;

④若点 B 的横坐标为 1, 点 Q 在 y 轴上 (Q, B, C 三点不共线), 则 $\triangle BCQ$ 周长的最小值为 $5 + \sqrt{13}$.

其中, 所有正确结论的个数是 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】D

【解析】

【分析】根据题意可得两个函数的对称轴均为直线 $x = 2$, 根据对称轴公式即可求出 b , 可判断①正确; 过点 B 作 $BD \perp x$ 交 x 轴于点 D , 过点 C 作 $CE \perp x$ 交 x 轴于点 E , 证明 $CEP \cong BDP$, 可得 $PB = PC$, 可判断②正确; 当点 B, C 分别在两个函数的顶点上时, $BC \perp OA$, 点 B, C 的横坐标均为 2, 求出 BC 的长度, 得到 $BC = OA$, 可判断③正确; 作点 B 关于 y 轴的对称点 B' , 连接 $B'C$ 交 y 轴于点 Q , 此时 $\triangle BCQ$ 周长的最小, 小值为 $B'C + BC$, 即可判断④.

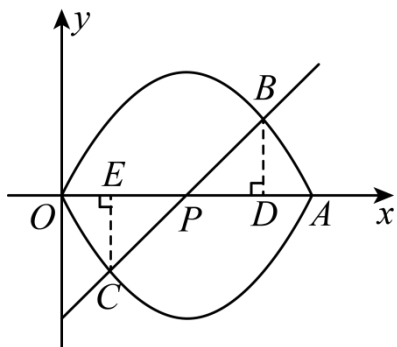
【详解】解：① $\because$ 二次函数 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx$ 与 $y = \frac{1}{2}x^2 - bx$ 的图像均过点 $A(4, 0)$ 和坐标原点 O ， P 为线段 OA 的中点，

$\therefore P(2, 0)$ ，两个函数的对称轴均为直线 $x = 2$ ，

$$\text{即 } x = -\frac{b}{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = 2,$$

解得： $b = 2$ ，故①正确；

②如图，过点 B 作 $BD \perp x$ 交 x 轴于点 D ，过点 C 作 $CE \perp x$ 交 x 轴于点 E ，



$\therefore \angle CEP = \angle BDP = 90^\circ$ ，

由函数的对称性可知 $PE = DP$ ，

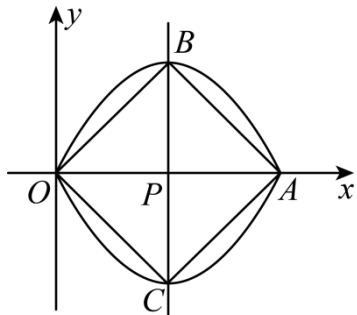
在 $\triangle CEP$ 和 $\triangle BDP$ 中，

$$\begin{cases} \angle CEP = \angle BDP \\ EP = DP \\ \angle EPC = \angle DPB \end{cases},$$

$\therefore \triangle CEP \cong \triangle BDP (ASA)$ ，

$\therefore PB = PC$ ，故正确②；

③当点 B 、 C 分别在两个函数的顶点上时， $BC \perp OA$ ，点 B 、 C 的横坐标均为 2，



由①可知两个函数的解析式分别为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ ， $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ ，

$$\therefore B(2,2), C(2,-2),$$

$$\therefore BC = 2 - (-2) = 4,$$

$$\because \text{点 } A(4,0),$$

$$\therefore OA = 4,$$

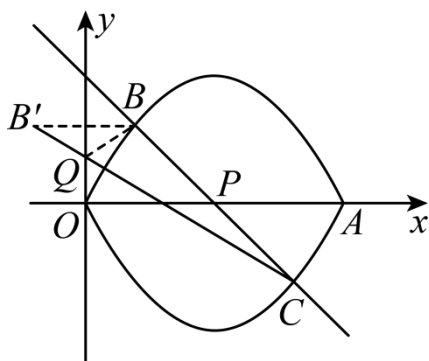
$$\therefore BC = OA,$$

$$\text{由 } BC \perp OA,$$

$\therefore$ 此时以 O, A, B, C 为顶点的四边形为正方形，故③正确；

④作点 B 关于 y 轴的对称点 B' ，连接 $B'C$ 交 y 轴于点 Q ，此时 $\triangle BCQ$ 周长的最小，最小值为

$$BQ + CQ + BC = B'Q + CQ + BC = B'C + BC,$$



$\because$ 点 B 的横坐标为 1,

$$\therefore B\left(1, \frac{3}{2}\right), \text{ 点 } C \text{ 的横坐标为 } 3,$$

$$\therefore B'\left(-1, \frac{3}{2}\right), C\left(3, -\frac{3}{2}\right),$$

$$\therefore BC = \sqrt{(3-1)^2 + \left(-\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{13}, \quad B'C = \sqrt{(-1-3)^2 + \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right)^2} = 5,$$

$\therefore \triangle BCQ$ 周长的最小值为 $B'C + BC = 5 + \sqrt{13}$ ，故正确④；

故选：D.

【点睛】本题是二次函数的综合题，涉及二次函数的图像与性质，全等三角形的判定与性质，正方形的判定，对称中的最值问题等知识，解题的关键是灵活运用这些知识.

第 II 卷（非选择题 共 110 分）

二、填空题（本大题共 6 个小题，每小题 4 分，共 24 分）

11. 若 $(a-1)^2 + |b-2| = 0$, 则 $ab =$ _____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查了绝对值和平方的非负性，解题的关键是掌握几个非负数和为 0，则这几个非负数分别为 0. 根据绝对值和平方的非负性，得出 $a-1=0, b-2=0$ ，求出 a 和 b 的值，即可解答.

【详解】 解： $\because (a-1)^2 + |b-2| = 0$,

$\therefore a-1=0, b-2=0$,

解得： $a=1, b=2$,

$\therefore ab=1 \times 2 = 2$,

故答案为： 2.

12. 2024 年政府工作报告提出，我国今年发展主要预期目标是：国内生产总值增长 5% 左右，城镇新增就业 1200 万人以上……将数“1200 万”用科学记数法表示为_____.

【答案】 1.2×10^7

【解析】

【分析】 本题考查了科学记数法，根据科学记数法的表示形式即可求解，熟练掌握科学记数法的表示形式：“ $a \times 10^n$ ”，其中 $1 \leq a < 10$ ， n 是正整数”是解题的关键.

【详解】 解： 1200 万 $= 1.2 \times 10^7$,

故答案为： 1.2×10^7 .

13. 一个不透明的袋中装有 6 个白球和 m 个红球，这些球除颜色外无其他差别. 充分搅匀后，从袋中随机取出一个球是白球的概率为 $\frac{2}{5}$ ，则 $m =$ _____.

【答案】 9

【解析】

【分析】 本题主要考查了概率公式，用到的知识点为：概率 = 所求情况数与总情况数之比. 根据概率公式即可求解.

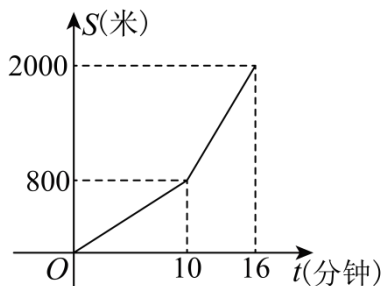
【详解】 解： 从袋中随机取出一个球是白球的概率为 $\frac{6}{m+6} = \frac{2}{5} = \frac{6}{15}$,

$\therefore m+6=15$,

解得： $m=9$,

故答案为：9.

14. 小王前往距家 2000 米的公司参会，先以 v_0 (米/分) 的速度步行一段时间后，再改骑共享单车直达会议地点，到达时距会议开始还有 14 分钟，小王距家的路程 S (单位：米) 与距家的时间 t (单位：分钟) 之间的函数图象如图所示. 若小王全程以 v_0 (米/分) 的速度步行，则他到达时距会议开始还有_____分钟.



【答案】5

【解析】

【分析】本题考查了函数图象的识别，解题的关键是理解题意，读懂图象中每条线段蕴含的信息，灵活运用所学知识解决问题.

根据图象求出 v_0 ，进而得出小王全程以 v_0 (米/分) 的速度步行，则他到达需要时间，即可解答.

【详解】解：根据题意可得： $v_0 = 800 \div 10 = 80$ (米/分)，

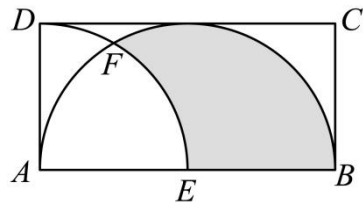
小王全程以 v_0 (米/分) 的速度步行，则他到达需要时间为： $2000 \div 80 = 25$ (分)，

由图可知，会议开始时间为出发后 $16 + 14 = 30$ (分)，

$\therefore$ 若小王全程以 v_0 (米/分) 的速度步行，则他到达时距会议开始还有 $30 - 25 = 5$ (分)，

故答案为：5.

15. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 4$ ， $AD = 2$. 以点 A 为圆心， AD 长为半径作弧交 AB 于点 E ，再以 AB 为直径作半圆，与 $\widehat{DE}$ 交于点 F ，则图中阴影部分的面积为_____.



【答案】 $\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi$

【解析】

【分析】本题考查了切线的性质，等边三角形的性质和判定，扇形的面积，解题的关键是学会利用分割法

求阴影部分的面积.

设弓形 AmF ，连接 AF ， FE ，由题意知 $AE = AF = FE = 2$ ，即 $\triangle AFE$ 为等边三角形，

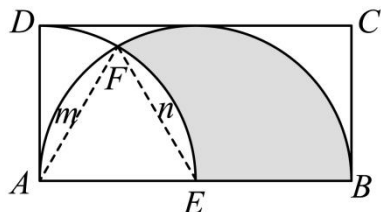
$\angle FAE = \angle FEA = 60^\circ$ ，即可得出阴影部分面积为 $S_{\text{阴}} = S_{\text{半圆}} - S_{\text{扇形} DFE} - S_{\text{弓形} AmF}$ ，代入数值即可求出结果.

【详解】解： $\because$ 以点 A 为圆心， AD 长为半径作弧交 AB 于点 E ， $AB = 4$ ， $AD = 2$ ，

$\therefore AE = AD = BE = 2$ ，

$\therefore$ 以 AB 为直径作半圆时，圆心为点 E ，

设弓形 AmF ，连接 AF ， FE ，即 $AE = AF = FE = 2$ ，如图：



$\therefore \triangle AFE$ 为等边三角形，

$\therefore \angle FAE = \angle FEA = 60^\circ$ ，

故阴影部分面积为 $S_{\text{阴}} = S_{\text{半圆}} - S_{\text{扇形} DFE} - S_{\text{弓形} AmF}$ ，

$$\text{代入数值可得 } S_{\text{阴}} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\pi - \frac{60\pi \times 2^2}{360} - \left(\frac{60\pi \times 2^2}{360} - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 \right) = \sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi,$$

故答案为 $\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi$.

16. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ， $AC = 4$. 若 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，则边 AB 长的取值范围是_____.

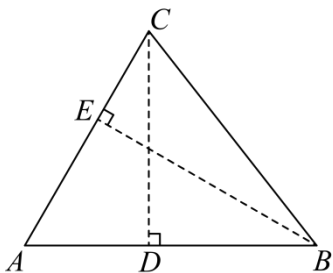
【答案】 $2 < AB < 8$

【解析】

【分析】本题考查了锐角三角函数，解题的关键是正确作出辅助线. 作 $\triangle ABC$ 的高 CD ， BE ，根据题意可得 $AB > AD$ ， $AC > AE$ ，在 $Rt\triangle ACD$ 中，根据三角函数可得 $AD = AC \cos \angle A = 2$ ，即 $AB > 2$ ，再

根据 $AB = \frac{AE}{\cos \angle A} < \frac{AC}{\cos \angle A}$ ，即可求解.

【详解】解：如图，作 $\triangle ABC$ 的高 CD ， BE ，



$\therefore \triangle ABC$ 是锐角三角形，

$\therefore CD, BE$ 在的内部,

$\therefore AB > AD, AC > AE,$

在 $Rt\triangle ACD$ 中, $\angle A = 60^\circ, AC = 4,$

$$\therefore AD = AC \cos \angle A = 4 \times \frac{1}{2} = 2,$$

$\therefore AB > 2,$

$$\text{又} \because AB = \frac{AE}{\cos \angle A} < \frac{AC}{\cos \angle A} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8,$$

$\therefore 2 < AB < 8,$

故答案为: $2 < AB < 8.$

三、解答题 (本大题共 8 个小题、共 86 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. 先化简, 再求值: $\left(\frac{x+1}{x} - 1\right) \div \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x}$, 其中 $x = 3$.

【答案】 $\frac{1}{x-2}; 1$

【解析】

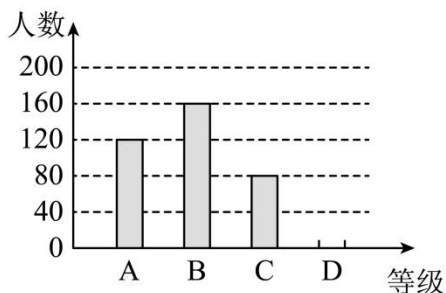
【分析】 本题主要考查了分式化简求值, 先根据分式混合运算法则进行化简, 然后再代入数据求值即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & \left(\frac{x+1}{x} - 1\right) \div \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x} \\ &= \left(\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x}\right) \div \frac{(x+2)(x-2)}{x(x+2)} \\ &= \frac{1}{x} \cdot \frac{x(x+2)}{(x+2)(x-2)} \\ &= \frac{1}{x-2}, \end{aligned}$$

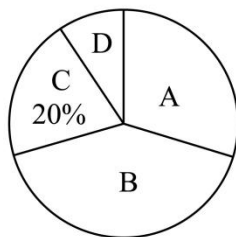
把 $x = 3$ 代入得: 原式 $= \frac{1}{3-2} = 1.$

18. 我国古诗词源远流长. 某校以“赏诗词之美、寻文化之根、铸民族之魂”为主题, 组织学生开展了古诗词知识竞赛活动. 为了解学生对古诗词的掌握情况, 该校随机抽取了部分学生的竞赛成绩, 将成绩分为 A, B, C, D 四个等级, 并绘制成如图所示的两幅不完整的统计图:

抽样成绩等级的条形统计图



抽样成绩等级的扇形统计图



- (1) 本次共抽取了_____名学生的竞赛成绩，并补全条形统计图；
- (2) 若该校共有 2000 人参加本次竞赛活动，估计竞赛成绩为 B 等级的学生人数；
- (3) 学校在竞赛成绩为 A 等级中的甲、乙、丙、丁这 4 名学生里，随机选取 2 人参加经典诵读活动，用画树状图或列表法求出甲、乙两人中恰好有 1 人被选中的概率。

【答案】(1) 400，见解析

(2) 800 名 (3) 见解析， $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】(1) 利用 C 等级的人数除以其所占的百分比求得样本总数，再利用样本总人数减去其他等级的人数求得 D 等级的人数，再补全条形统计图即可；

(2) 利用 B 等级的人数除以样本总数求得其所占的百分比，再乘除全校人数即可求解；

(3) 画树状图可得共有 12 种等可能的结果，其中甲、乙两人中恰好有 1 人被选中 8 种等可能的结果，再利用概率公式求解即可。

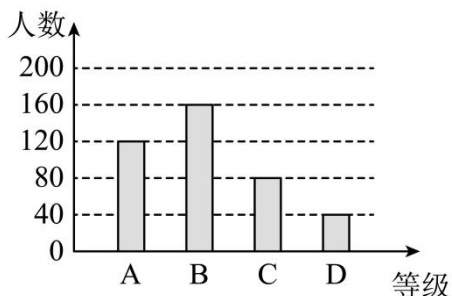
【小问 1 详解】

解：由图可得， $80 \div 20\% = 400$ (名)，

$\therefore D$ 等级的人数为： $400 - 120 - 160 - 80 = 40$ (名)，

补全条形统计图如下所示：

抽样成绩等级的条形统计图



故答案为：400；

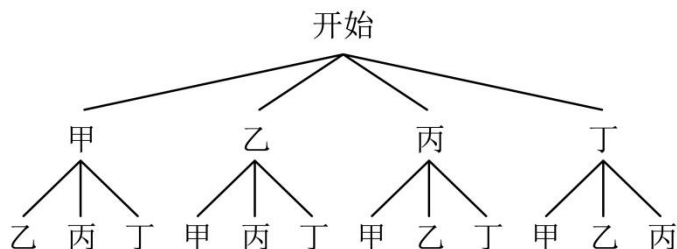
【小问 2 详解】

解： $2000 \times \frac{160}{400} = 800$ (名)，

答：估计竞赛成绩为 B 等级的学生人数为 800 名；

【小问 3 详解】

解：画树状图如下：



共有 12 种等可能的结果，其中甲、乙两人中恰好有 1 人被选中 8 种等可能的结果，

$\therefore$ 甲、乙两人中恰好有 1 人被选中的概率为 $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ 。

【点睛】本题考查条形统计图与扇形统计图、用样本估计总体、用树状图或列表法求概率、概率公式，根据统计图中的信息求得样本总数是解题的关键。

19. 2024 年巴黎奥运会将于 7 月 26 日至 8 月 11 日举行，某经销店调查发现：与吉祥物相关的 A 、 B 两款纪念品深受青少年喜爱。已知购进 3 个 A 款比购进 2 个 B 款多用 120 元；购进 1 个 A 款和 2 个 B 款共用 200 元。

(1) 分别求出 A 、 B 两款纪念品的进货单价；

(2) 该商店决定购进这两款纪念品共 70 个，其总费用不超过 5000 元，则至少应购买 B 款纪念品多少个？

【答案】(1) A 款纪念品的进货单价为 80 元，则 B 款纪念品的进货单价为 60 元

(2) 至少应购买 B 款纪念品 30 个

【解析】

【分析】本题考查二元一次方程组的应用、一元一次不等式的应用，(1) 设 A 款纪念品的进货单价为 x 元，则 B 款纪念品的进货单价为 y 元，根据题意列二元一次方程组求解即可；

(2) 设购买 B 款纪念品 a 个，则购买 A 款纪念品 $(70-a)$ 个，根据题意列一元一次不等式求得 a 的取值范围，即可求解。

【小问 1 详解】

解：设 A 款纪念品的进货单价为 x 元，则 B 款纪念品的进货单价为 y 元，

由题意得，
$$\begin{cases} 3x - 2y = 120 \\ x + 2y = 200 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} x = 80 \\ y = 60 \end{cases}$$

答：A 款纪念品的进货单价为 80 元，则 B 款纪念品的进货单价为 60 元.

【小问 2 详解】

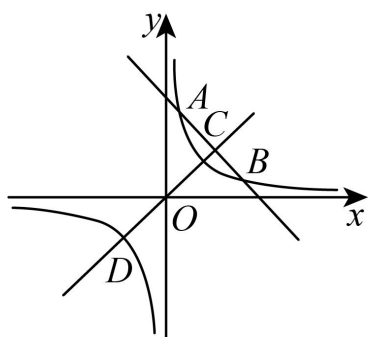
解：设购买 B 款纪念品 a 个，则购买 A 款纪念品 $(70-a)$ 个，

由题意得， $80(70-a) + 60a \leq 5000$,

解得， $a \geq 30$,

答：至少应购买 B 款纪念品 30 个.

20. 如图，已知平面直角坐标系中， O 为坐标原点，一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图象与反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 的图象相交于 $A(m, 4)$ ， $B(4, n)$ 两点.



(1) 求一次函数的解析式；

(2) 若点 $C(t, t)$ 在一次函数的图象上，直线 CO 与反比例函数的图象在第三象限内交于点 D ，求点 D 的坐标，并写出直线 CD 在图中的一个特征.

【答案】(1) $y = -x + 5$

(2) $D(-2, -2)$ ，直线 CD 上 y 随 x 的增大而增大

【解析】

【分析】本题考查了一次函数和反比例函数综合，解题的关键是掌握用待定系数法求解函数解析式的方法和步骤.

(1) 先求出点 A 和点 B 的坐标，再将点 A 和点 B 的坐标代入 $y = kx + b$ ，求出 k 和 b 的值，即可得出一次函数解析式；

(2) 先求出直线 OC 的函数解析式为 $y = x$ ，进而得出 $D(-2, -2)$ ，结合图象可得直线 CD 的特征.

【小问 1 详解】

解：把 $A(m, 4)$ 代入 $y = \frac{4}{x}$ 得： $4 = \frac{4}{m}$,

解得： $m = 1$,

$\therefore A(1, 4)$,

把 $B(4, n)$ 代入 $y = \frac{4}{x}$ 得： $n = \frac{4}{4} = 1$,

$\therefore B(4, 1)$,

把 $A(1, 4)$, $B(4, 1)$ 代入 $y = kx + b$:

$$\begin{cases} 4 = k + b \\ 1 = 4k + b \end{cases}$$

解得： $\begin{cases} k = -1 \\ b = 5 \end{cases}$,

$\therefore$ 一次函数的解析式为 $y = -x + 5$;

【小问 2 详解】

解：设直线 OC 的函数解析式为 $y = mx$,

把 $C(t, t)$ 代入 $y = mx$ 得： $t = mt$,

解得： $m = 1$,

$\therefore$ 直线 OC 的函数解析式为 $y = x$,

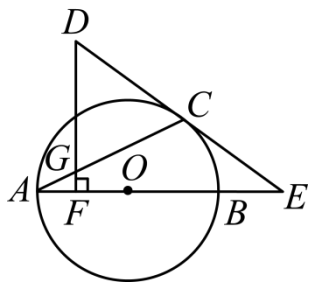
联立得： $\begin{cases} y = x \\ y = \frac{4}{x} \end{cases}$,

解得： $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 2 \end{cases}$ (舍去), $\begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = -2 \end{cases}$,

$\therefore D(-2, -2)$,

由图可知：直线 CD 上 y 随 x 的增大而增大.

21. 如图，已知 AB 是 $\odot O$ 的直径， AC 是 $\odot O$ 的弦，点 D 在 $\odot O$ 外，延长 DC ， AB 相交于点 E ，过点 D 作 $DF \perp AB$ 于点 F ，交 AC 于点 G ， $DG = DC$ 。



(1) 求证: DE 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $\odot O$ 的半径为 6, 点 F 为线段 OA 的中点, $CE = 8$, 求 DF 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{39}{4}$

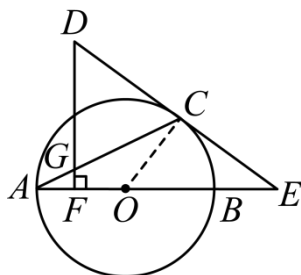
【解析】

【分析】(1) 连接 OC , 根据等边对等角和对顶角相等可推出 $\angle OAC = \angle OCA$, $\angle DGC = \angle DCG = \angle AGF$, 结合 $DF \perp AB$ 和三角形内角和, 从而推出 $\angle OCD = \angle OAC + \angle AGF = 90^\circ$, 得证;

(2) 由 (1) 可知 $\angle OCE = 90^\circ$, 可证 $\triangle DFE \sim \triangle OCE$, 推出 $\frac{OC}{DF} = \frac{CE}{FE}$, 再由勾股定理可得 $OE = 10$, 利用点 F 为线段 OA 的中点, 可得 $OF = 3$, 从而得到 $EF = 13$, 从而得到 $\frac{6}{DF} = \frac{8}{13}$, 即可得到答案.

【小问 1 详解】

证明: 连接 OC , 如图,



$\because OA = OC, DG = DC,$

$\therefore \angle OAC = \angle OCA, \angle DGC = \angle DCG,$

$\because \angle AGF = \angle DGC,$

$\therefore \angle AGF = \angle DCG,$

又 $\because DF \perp AB,$

$\therefore \angle AFG = 90^\circ,$

$\therefore \angle OAC + \angle AGF = 180^\circ - \angle AFG = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$

$\therefore \angle OCD = \angle OCA + \angle DCG = \angle OAC + \angle AGF = 90^\circ,$

$\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线;

【小问 2 详解】

解：如（1）图， $\angle OCE = 90^\circ$ ，

又 $\because \angle DFE = 90^\circ$ ， $\angle OEC = \angle DEF$ ，

$\therefore \triangle DFE \sim \triangle OCE$ ，

$$\therefore \frac{OC}{DF} = \frac{CE}{FE},$$

$\because \odot O$ 的半径为 6， $CE = 8$ ，

$\therefore OC = OB = OA = 6$ ，

$$\therefore OE^2 = OC^2 + CE^2, \text{ 即 } OE = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10,$$

又 $\because$ 点 F 为线段 OA 的中点，

$$\therefore OF = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2} \times 6 = 3,$$

$$\therefore EF = OF + OE = 3 + 10 = 13,$$

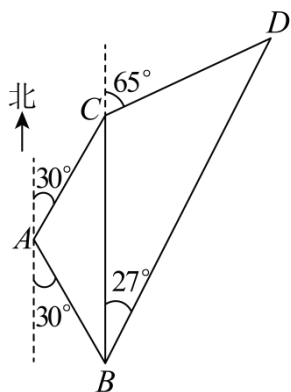
$$\therefore \frac{6}{DF} = \frac{8}{13},$$

$$\therefore DF = \frac{39}{4}.$$

【点睛】本题考查了等腰三角形的性质，切线的判定与性质，相似三角形的判定与性质，勾股定理，三角形内角和定理，熟练掌握以上知识点是解题的关键。

22. 如图，某海域有两灯塔 A ， B ，其中灯塔 B 在灯塔 A 的南偏东 30° 方向，且 A ， B 相距 $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ 海里。一

渔船在 C 处捕鱼，测得 C 处在灯塔 A 的北偏东 30° 方向、灯塔 B 的正北方向。



(1) 求 B ， C 两处的距离；

(2) 该渔船从 C 处沿北偏东 65° 方向航行一段时间后，突发故障滞留于 D 处，并发出求救信号。此时，在灯塔 B 处的渔政船测得 D 处在北偏东 27° 方向，便立即以 18 海里/小时的速度沿 BD 方向航行至 D 处救援，求渔政船的航行时间。

(注：点 A, B, C, D 在同一水平面内；参考数据： $\tan 65^\circ \approx 2.1$ ， $\tan 27^\circ \approx 0.5$)

【答案】(1) B, C 两处的距离为 16 海里

(2) 渔政船的航行时间为 $\frac{7\sqrt{5}}{12}$ 小时

【解析】

【分析】本题考查了解直角三角形的实际应用，解题的关键是正确画出辅助线，构造直角三角形.

(1) 根据题意易得 $AC = AB$ ，则 $CE = BE$ ，再求出 $BE = CE = \frac{AB}{\cos 30^\circ} = 8$ (海里)，即可解答；

(2) 过点 D 作 $DF \perp BC$ 于点 F ，设 $CF = x$ 海里，则 $DF = CF \tan 65^\circ = 2.1x$ ，

$DF = BF \tan 27^\circ = 0.5(16 + x)$ ，则 $2.1x = 0.5(16 + x)$ ，求出 $x = 5$ ，进而得出 $BF = BC + CF = 21$ 海里，

$DF = CF \tan 65^\circ = 10.5$ 海里，根据勾股定理可得： $BD = \sqrt{DF^2 + BF^2} = \frac{21\sqrt{5}}{2}$ (海里)，即可解答.

【小问 1 详解】

解：过点 A 作 $AE \perp BC$ 于点 E ，

$\because$ 灯塔 B 在灯塔 A 的南偏东 30° 方向， C 处在灯塔 A 的北偏东 30° 方向、灯塔 B 的正北方向.

$\therefore \angle ACE = \angle ABE = 30^\circ$ ，

$\therefore AC = AB$ ，

$\because AE \perp BC$ ，

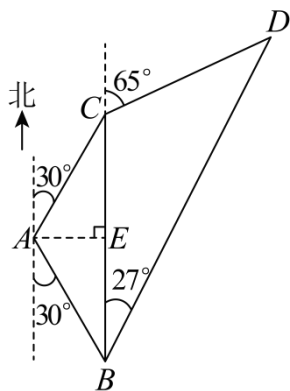
$\therefore CE = BE$ ，

$\because AB = \frac{16\sqrt{3}}{3}$ 海里，

$\therefore BE = CE = \frac{AB}{\cos 30^\circ} = 8$ (海里)，

$\therefore BC = 8 \times 2 = 16$ (海里)，

$\therefore B, C$ 两处的距离为 16 海里.



【小问 2 详解】

解：过点 D 作 $DF \perp BC$ 于点 F ，

设 $CF = x$ 海里,

$$\therefore \angle DCF = 65^\circ,$$

$$\therefore DF = CF \tan 65^\circ = 2.1x,$$

由 (1) 可知, $BC = 16$ 海里,

$$\therefore BF = (16 + x) \text{ 海里},$$

$$\therefore \angle DBF = 27^\circ,$$

$$\therefore DF = BF \tan 27^\circ = 0.5(16 + x),$$

$$\therefore 2.1x = 0.5(16 + x),$$

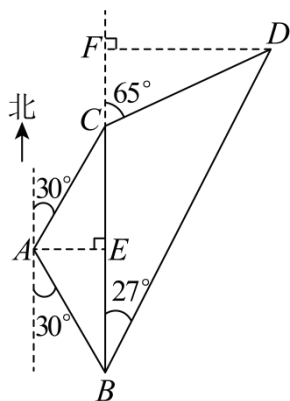
解得: $x = 5$,

$$\therefore BF = BC + CF = 21 \text{ 海里}, \quad DF = CF \tan 65^\circ = 10.5 \text{ 海里},$$

根据勾股定理可得: $BD = \sqrt{DF^2 + BF^2} = \frac{21\sqrt{5}}{2}$ (海里),

$$\therefore \text{渔政船的航行时间为 } \frac{21\sqrt{5}}{2} \div 18 = \frac{7\sqrt{5}}{12} \text{ (小时)},$$

答: 渔政船的航行时间为 $\frac{7\sqrt{5}}{12}$ 小时.



23. (1) 【观察发现】如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 BC 上. 若 $\angle BAD = \angle C$, 则 $AB^2 = BD \cdot BC$, 请证明;

(2) 【灵活运用】如图 2, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 60^\circ$, 点 D 为边 BC 的中点, $CA = CD = 2$, 点 E 在 AB 上, 连接 AD , DE . 若 $\angle AED = \angle CAD$, 求 BE 的长;

(3) 【拓展延伸】如图 3, 在菱形 $ABCD$ 中, $AB = 5$, 点 E, F 分别在边 AD, CD 上, $\angle ABC = 2\angle EBF$, 延长 AD , BF 相交于点 G . 若 $BE = 4$, $DG = 6$, 求 FG 的长.

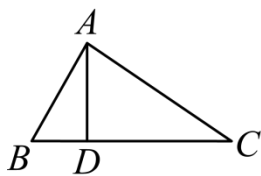


图1

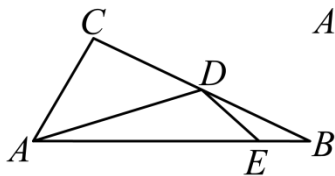


图2

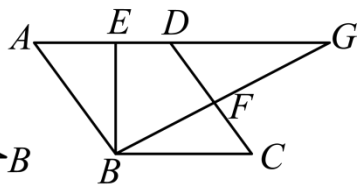


图3

【答案】(1) 见解析；(2) $BE = \frac{\sqrt{13}-1}{3}$ ；(3) $FG = \frac{24\sqrt{5}}{11}$

【解析】

【分析】(1) 证明 $\triangle ABD \sim \triangle CBA$ ，得出 $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB}$ ，即可证明结论；

(2) 过点 C 作 $CF \perp AB$ 于点 F ，过点 D 作 $DG \perp AB$ 于点 G ，解直角三角形得出 $CF = AC \times \sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ ， $AF = AC \times \cos 60^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$ ，证明 $\triangle BDG \sim \triangle BCF$ ，得出

$\frac{DG}{CF} = \frac{BG}{BF} = \frac{BD}{BC} = \frac{1}{2}$ ，求出 $DG = \frac{1}{2}CF = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，根据勾股定理得出

$BG = \sqrt{BD^2 - DG^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$ ，得出 $AB = AF + BF = 1 + \sqrt{13}$ ，证明 $\triangle BED \sim \triangle BAD$ ，得

出 $\frac{BE}{BD} = \frac{BD}{AB}$ ，求出 $BE = \frac{\sqrt{13}-1}{3}$ ；

(3) 连接 BD ，证明 $\triangle BED \sim \triangle GEB$ ，得出 $\frac{DE}{BE} = \frac{BE}{EG}$ ，求出 $DE = 2$ ，证明 $\triangle ABE$ 为直角三角形，得出 $\angle AEB = 90^\circ$ ，根据勾股定理求出 $BG = \sqrt{BE^2 + EG^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$ ，证明 $\triangle DFG \sim \triangle CFB$ ，得出

$\frac{FG}{4\sqrt{5} - FG} = \frac{6}{5}$ ，求出结果即可。

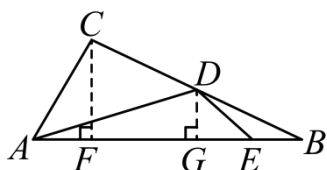
【详解】解：(1) $\because \angle BAD = \angle C$ ， $\angle ABD = \angle CBA$ ，

$\therefore \triangle ABD \sim \triangle CBA$ ，

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB}$ ，

$\therefore AB^2 = BD \cdot BC$ ；

(2) 过点 C 作 $CF \perp AB$ 于点 F ，过点 D 作 $DG \perp AB$ 于点 G ，如图所示：



则 $\angle AFC = \angle AGD = 90^\circ$,

$\therefore DF \parallel DG$,

$\therefore \angle BAC = 60^\circ$,

$$\therefore CF = AC \times \sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, \quad AF = AC \times \cos 60^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1,$$

$\therefore D$ 为 BC 的中点,

$$\therefore BD = CD = \frac{1}{2} BC = 2,$$

$\therefore DF \parallel DG$,

$\therefore \triangle BDG \sim \triangle BCF$,

$$\therefore \frac{DG}{CF} = \frac{BG}{BF} = \frac{BD}{BC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore DG = \frac{1}{2} CF = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore BG = \sqrt{BD^2 - DG^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2},$$

$$\therefore BF = 2BG = \sqrt{13},$$

$$\therefore AB = AF + BF = 1 + \sqrt{13},$$

$\therefore AC = CD$,

$\therefore \angle CAD = \angle CDA$,

$\therefore \angle AED = \angle CAD$,

$\therefore \angle AED = \angle CDA$,

$\therefore \angle AED + \angle BED = \angle ADC + \angle ADB = 180^\circ$,

$\therefore \angle BED = \angle ADB$,

$\therefore \angle DBE = \angle ABD$,

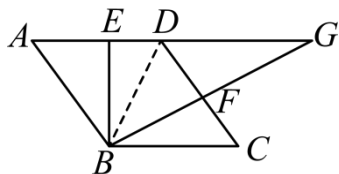
$\therefore \triangle BED \sim \triangle BAD$,

$$\therefore \frac{BE}{BD} = \frac{BD}{AB},$$

$$\text{即 } \frac{BE}{2} = \frac{2}{1 + \sqrt{13}},$$

$$\text{解得: } BE = \frac{\sqrt{13} - 1}{3};$$

(3) 连接 BD ，如图所示：



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形，

$$\therefore \angle ABD = \angle CBD = \frac{1}{2} \angle ABC, \quad AD = AB = BC = 5, \quad AD \parallel BC,$$

$$\because \angle ABC = 2\angle EBF,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle CBD = \angle EBF,$$

$$\therefore \angle EBF - \angle DBF = \angle CBD - \angle DBF,$$

$$\text{即 } \angle DBE = \angle CBF,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle CBF = \angle G,$$

$$\therefore \angle DBE = \angle G,$$

$$\because \angle DEB = \angle BEG,$$

$$\therefore \triangle BED \sim \triangle GEB,$$

$$\therefore \frac{DE}{BE} = \frac{BE}{EG},$$

$$\because DG = 6,$$

$$\therefore EG = DE + 6,$$

$$\therefore \frac{DE}{4} = \frac{4}{DE + 6},$$

解得： $DE = 2$ ，负值舍去，

$$\therefore EG = 2 + 6 = 8,$$

$$\therefore AE = AD - DE = 3,$$

$$\because AE^2 + BE^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 = AB^2,$$

$$\therefore \triangle ABE \text{ 为直角三角形, } \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BEG = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

$\therefore$ 在 $\text{Rt} \triangle BEG$ 中根据勾股定理得：

$$BG = \sqrt{BE^2 + EG^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5},$$

$$\therefore BF = BG - FG = 4\sqrt{5} - FG,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle DFG \sim \triangle CFB,$$

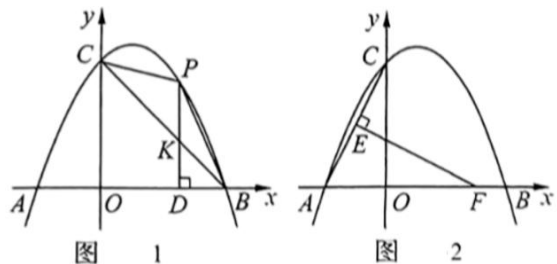
$$\therefore \frac{FG}{BF} = \frac{DG}{BC},$$

$$\text{即 } \frac{FG}{4\sqrt{5} - FG} = \frac{6}{5},$$

$$\text{解得: } FG = \frac{24\sqrt{5}}{11}.$$

【点睛】本题主要考查了菱形的性质，勾股定理及其逆定理，三角函数的应用，三角形相似的判定和性质，平行线的性质，解题的关键是作出辅助线，熟练掌握三角形相似的判定方法.

24. 已知平面直角坐标系中， O 为坐标原点，抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A, B 两点，与 y 轴的正半轴交于 C 点，且 $B(4, 0)$ ， $BC = 4\sqrt{2}$.



(1) 求抛物线的解析式;

(2) 如图 1，点 P 是抛物线在第一象限内的一点，连接 PB, PC ，过点 P 作 $PD \perp x$ 轴于点 D ，交 BC 于点 K 。记 $\triangle PBC$ ， $\triangle BDK$ 的面积分别为 S_1, S_2 ，求 $S_1 - S_2$ 的最大值;

(3) 如图 2，连接 AC ，点 E 为线段 AC 的中点，过点 E 作 $EF \perp AC$ 交 x 轴于点 F 。抛物线上是否存在点 Q ，使 $\angle QFE = 2\angle OCA$ ？若存在，求出点 Q 的坐标；若不存在，说明理由。

【答案】(1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$

(2) $\frac{8}{3}$

(3) 存在， $Q_1\left(\frac{1-3\sqrt{5}}{2}, \frac{-5-3\sqrt{5}}{4}\right)$ 或 $Q_2\left(\frac{13-\sqrt{69}}{2}, \frac{-77+11\sqrt{69}}{4}\right)$

【解析】

【分析】(1) 先求 C 点坐标，待定系数法求出函数解析式即可；

(2) 求出 BC 的解析式，设 $P\left(m, -\frac{1}{2}m^2 + m + 4\right)$ ，则： $K(m, -m + 4), D(m, 0)$ ，将 $S_1 - S_2$ 转化为二次函

数求最值即可；

(3) 易得 FE 垂直平分 AC ，设 $OF = a$ ，勾股定理求出 F 点坐标，三线合一结合同角的余角相等，推出 $\angle AFE = \angle OCA = \angle CFE$ ，分别作点 E 关于 x 轴和直线 CF 的对称点 E_1, E_2 ，直线 FE_1, FE_2 与抛物线的交点即为所求，进行求解即可。

【小问 1 详解】

解： $\because B(4, 0)$,

$$\therefore OB = 4,$$

$$\because \angle BOC = 90^\circ, BC = 4\sqrt{2},$$

$$\therefore OC = \sqrt{BC^2 - OB^2} = 4,$$

$$\therefore C(0, 4),$$

把 $B(4, 0)$ ， $C(0, 4)$ ，代入函数解析式得：

$$\therefore \begin{cases} c = 4 \\ -\frac{1}{2} \times 4^2 + 4b + c = 0 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} c = 4 \\ b = 1 \end{cases};$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4;$$

【小问 2 详解】

$$\therefore B(4, 0), C(0, 4),$$

$\therefore$ 设直线 BC 的解析式为： $y = kx + 4 (k \neq 0)$ ，把 $B(4, 0)$ ，代入，得： $k = -1$ ，

$$\therefore y = -x + 4,$$

设 $P\left(m, -\frac{1}{2}m^2 + m + 4\right)$ ，则： $K(m, -m + 4), D(m, 0)$ ，

$$\therefore PK = -\frac{1}{2}m^2 + m + 4 - (-m + 4) = -\frac{1}{2}m^2 + 2m, DK = -m + 4, DB = 4 - m,$$

$$\therefore S_1 = \frac{1}{2}PK \cdot OB = -m^2 + 4m, S_2 = \frac{1}{2}DK \cdot DB = \frac{1}{2}(-m + 4)(4 - m) = \frac{1}{2}(4 - m)^2,$$

$$\therefore S_1 - S_2 = -m^2 + 4m - \frac{1}{2}(4 - m)^2$$

$$= -\frac{3m^2}{2} + 8m - 8$$

$$= -\frac{3}{2}\left(m - \frac{8}{3}\right)^2 + \frac{8}{3},$$

$\therefore$ 当 $m = \frac{8}{3}$ 时, $S_1 - S_2$ 的最大值为 $\frac{8}{3}$;

【小问3详解】

存在:

$$\text{令 } y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4 = 0,$$

$$\text{解得: } x_1 = -2, x_2 = 4,$$

$$\therefore A(-2, 0),$$

$$\because C(0, 4), \text{ 点 } E \text{ 为 } AC \text{ 的中点},$$

$$\therefore E(-1, 2),$$

$$\because FE \perp AC, \quad AE = CE = \sqrt{(-1+2)^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

$$\therefore AF = CF,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle CFE,$$

$$\text{设 } OF = a, \text{ 则: } CF = AF = a + 2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle COF \text{ 中, 由勾股定理, 得: } a^2 + 4^2 = (a + 2)^2,$$

$$\therefore a = 3,$$

$$\therefore F(3, 0), \quad CF = 5,$$

$$\because FE \perp AC, \quad \angle AOC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle OCA = 90^\circ - \angle CAF,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle OCA = \angle CFE,$$

$$\textcircled{1} \text{ 取点 } E \text{ 关于 } x \text{ 轴的对称点 } E_1, \text{ 连接 } FE_1, \text{ 交抛物线与点 } Q_1, \text{ 则: } \angle Q_1FE = 2\angle EFA = 2\angle OCA, \quad E_1(-1, -2),$$

$$\text{设 } FE_1 \text{ 的解析式为: } y = k_1x + b,$$

$$\text{则: } \begin{cases} 3k_1 + b = 0 \\ -k_1 + b = -2 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k_1 = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases},$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2},$$

$$\text{联立} \begin{cases} y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4 \end{cases}, \text{解得:} \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{5}+1}{2} \\ y = \frac{3\sqrt{5}-5}{4} \end{cases} \text{ (舍去) 或 } \begin{cases} x = \frac{1-3\sqrt{5}}{2} \\ y = \frac{-5-3\sqrt{5}}{4} \end{cases},$$

$$\therefore Q_1\left(\frac{1-3\sqrt{5}}{2}, \frac{-5-3\sqrt{5}}{4}\right);$$

②取 E 关于 CF 的对称点 E_2 ，连接 EE_2 交 CF 于点 G ，连接 FE_2 交抛物线于点 Q_2 ，

则： $\angle Q_2FE = 2\angle CFE = 2\angle OCA$ ， $EG \perp CF$ ，

$$\therefore CE = \sqrt{5}, CF = 5,$$

$$\therefore EF = \sqrt{CF^2 - CE^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2}CF \cdot EG = \frac{1}{2}CE \cdot EF,$$

$$\therefore 5EG = 2\sqrt{5} \times \sqrt{5},$$

$$\therefore EG = 2,$$

$$\therefore FG = \sqrt{EF^2 - EG^2} = 4,$$

过点 G 作 $GH \perp x$ 轴，则： $GH = FG \cdot \sin \angle CFO = 4 \times \frac{4}{5} = \frac{16}{5}$ ， $FH = FG \cdot \cos \angle CFO = 4 \times \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$ ，

$$\therefore OH = OF - FH = \frac{3}{5},$$

$$\therefore G\left(\frac{3}{5}, \frac{16}{5}\right),$$

$$\therefore E_2\left(\frac{11}{5}, \frac{22}{5}\right),$$

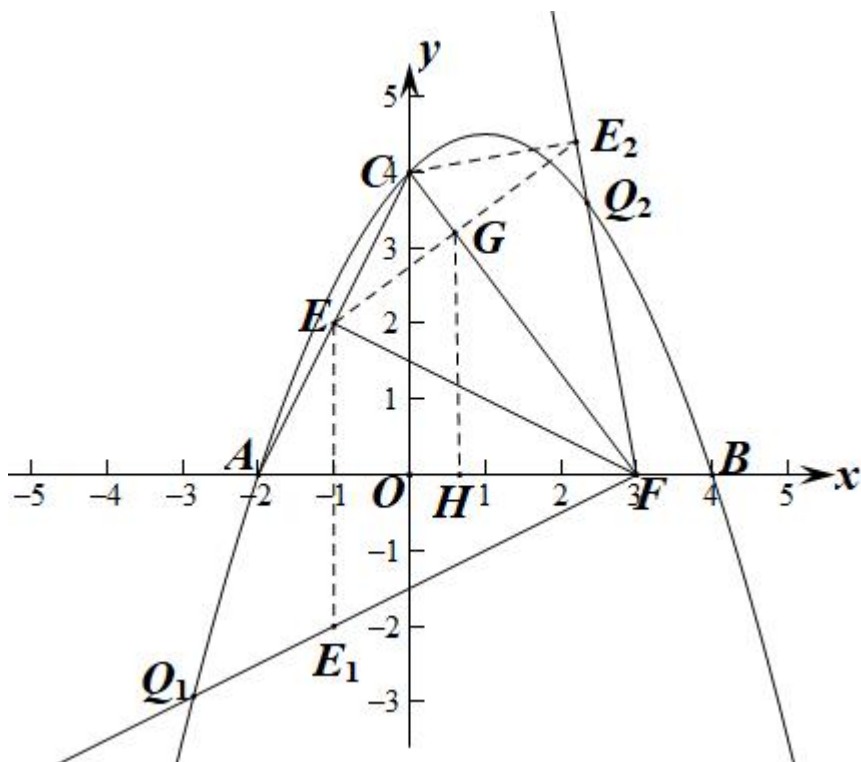
设直线 E_2F 的解析式为： $y = k_2x + b_1$ ，

$$\text{则: } \begin{cases} 3k_2 + b_1 = 0 \\ \frac{11}{5}k_2 + b_1 = \frac{22}{5} \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} k_2 = -\frac{11}{2} \\ b_1 = \frac{33}{2} \end{cases},$$

$$\therefore y = -\frac{11}{2}x + \frac{33}{2},$$

$$\text{联立} \begin{cases} y = -\frac{11}{2}x + \frac{33}{2} \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4 \end{cases}, \text{解得:} \begin{cases} x = \frac{\sqrt{69}+13}{2} \\ y = \frac{-11\sqrt{69}-77}{4} \end{cases} \text{(舍去) 或} \begin{cases} x = \frac{13-\sqrt{69}}{2} \\ y = \frac{-77+11\sqrt{69}}{4} \end{cases},$$

$$\therefore Q_2 \left(\frac{13 - \sqrt{69}}{2}, \frac{-77 + 11\sqrt{69}}{4} \right);$$



综上: $Q_1\left(\frac{1-3\sqrt{5}}{2}, \frac{-5-3\sqrt{5}}{4}\right)$ 或 $Q_2\left(\frac{13-\sqrt{69}}{2}, \frac{-77+11\sqrt{69}}{4}\right)$.

【点睛】本题考查二次函数的综合应用，涉及待定系数法求函数解析式，中垂线的判定和性质，等积法求线段的长，坐标与轴对称，勾股定理，解直角三角形，等知识点，综合性强，难度大，计算量大，属于中考压轴题，正确的求出函数解析式，利用数形结合和分类讨论的思想，进行求解，是解题的关键.