

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

2024 年四川省眉山市中考数学试卷

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 4 分，共 48 分。在每个小题给出的四个选项中只有一项是正确的，请把答题卡上相应题目的正确选项涂黑。

1. 下列四个数中，无理数是（ ）

A. -3.14

B. -2

C. $\frac{1}{2}$

D. $\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查的是无理数的概念，无理数即无限不循环小数，它的表现形式为：开方开不尽的数，与 π 有关的数，无限不循环小数。

根据无理数的定义，即可得出符合题意的选项。

【详解】解： -3.14 ， -2 ， $\frac{1}{2}$ 是有理数， $\sqrt{2}$ 是无理数，
故选：D.

2. 下列交通标志中，属于轴对称图形的是（ ）



【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了轴对称图形，根据轴对称图形的概念：如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形叫做轴对称图形可得答案。

【详解】解：A. 是轴对称图形，故此选项符合题意；
B. 不是轴对称图形，故此选项不符合题意；
C. 不是轴对称图形，故此选项不符合题意；
D. 不是轴对称图形，故此选项不符合题意；
故选：A.

3. 下列运算中正确的是（ ）

A. $a^2 - a = a$

B. $a \cdot a^2 = a^3$

C. $(a^2)^3 = a^5$

D. $(2ab^3)^3 = 6a^3b^6$

【答案】B

【解析】

【分析】此题考查了合并同类项，同底数幂乘法，幂的乘方和积的乘方，解题的关键是掌握以上运算法则。

根据合并同类项，同底数幂乘法，幂的乘方和积的乘方进行判断即可。

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

【详解】解： a^2 与 a 不是同类项，无法合并，则 A 不符合题意；

$a \cdot a^2 = a^3$ ，则 B 符合题意；

$(a^3)^3 = a^9$ ，则 C 不符合题意；

$(2ab^2)^3 = 8a^3b^6$ ，则 D 不符合题意；

故选：B.

4. 为落实阳光体育活动，学校鼓励学生积极参加体育锻炼. 已知某天五位同学体育锻炼的时间分别为（单位：小时）：1, 1.5, 1.4, 2, 1.5，这组数据的中位数和众数分别是（ ）

A. 1.5, 1.5

B. 1.4, 1.5

C. 1.48, 1.5

D. 1, 2

【答案】A

【解析】

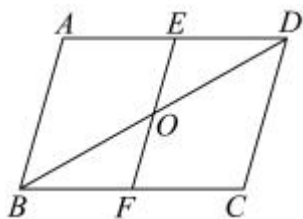
【分析】本题主要考查中位数和众数，根据中位数和众数的定义求解即可

【详解】解：这组数据按照从小到大的顺序排列为：1, 1.4, 1.5, 1.5, 2，
则中位数是 1.5，

1.5 出现次数最多，故众数是 1.5.

故选：A.

5. 如图，在 $\square ABCD$ 中，点 O 是 BD 的中点， EF 过点 O ，下列结论：① $AB \parallel DC$ ；② $EO = ED$ ；
③ $\angle A = \angle C$ ；④ $S_{\text{四边形}ABOE} = S_{\text{四边形}CDOF}$ ，其中正确结论的个数为（ ）



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查平行四边形的性质，根据平行四边形的对边平行，对角线互相平分，对角相等性质进行判断即可

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB \parallel DC$ ， $AD \parallel BC$ ， $\angle A = \angle C$ ，故①③正确，

$\therefore S_{\triangle AEO} = S_{\triangle CFO} = \frac{1}{2} S_{\text{平行四边形}ABCD}$ ， $\angle ODE = \angle OBF$ ，

$\because$ 点 O 是 BD 的中点，

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$$\therefore OD = OB,$$

$$\text{又} \because \angle DOE = \angle BOF, \quad OD = OB, \quad \angle ODE = \angle OBF,$$

$$\therefore \triangle ODE \cong \triangle OBF (\text{ASA}),$$

$$\therefore S_{\triangle ODE} = S_{\triangle OBF}, \quad EO = FO \neq ED, \quad \text{故②不正确},$$

$$\because S_{\triangle ABD} = S_{\triangle CDE}, \quad S_{\triangle ODE} = S_{\triangle OBF},$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} - S_{\triangle ODE} = S_{\triangle CDE} - S_{\triangle OBF},$$

$$\text{即 } S_{\text{四边形} ABOF} = S_{\text{四边形} CDOF}, \quad \text{故④正确},$$

综上所述，正确结论的个数为 3 个，

故选：C.

$$6. \text{不等式组} \begin{cases} 2x+1 > x+2 \\ x+3 \geq 2x-1 \end{cases} \text{的解集是 ()}$$

A. $x > 1$

B. $x \leq 4$

C. $x > 1$ 或 $x \leq 4$

D. $1 < x \leq 4$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查的是解一元一次不等式组，分别求出各不等式的解集，再求出其公共解集即可．熟知“同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到”的原则是解答此题的关键．

$$\text{【详解】解：} \begin{cases} 2x+1 > x+2 \text{①} \\ x+3 \geq 2x-1 \text{②} \end{cases},$$

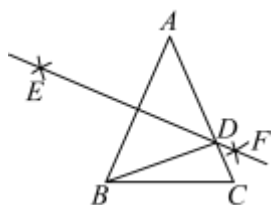
$$\text{解不等式①，得 } x > 1,$$

$$\text{解不等式②，得 } x \leq 4,$$

$$\text{故不等式组的解集为 } 1 < x \leq 4.$$

故选：D.

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 6$ ， $BC = 4$ ，分别以点 A，点 B 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径作弧，两弧交于点 E，F，过点 E，F 作直线交 AC 于点 D，连结 BD，则 $\triangle BCD$ 的周长为 ()



A. 7

B. 8

C. 10

D. 12

【答案】C

【解析】

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

【分析】本题考查了尺规作图—作垂直平分线，根据垂直平分线的性质即可证明 $AD = BD$ ，根据 $\triangle BCD$ 的周长 $= BD + CD + BC = AD + CD + BC = AC + BC$ ，即可求出答案。

【详解】解：由作图知， EF 垂直平分 AB ，

$$\therefore AD = BD,$$

$$\therefore \triangle BCD \text{ 的周长} = BD + CD + BC = AD + CD + BC = AC + BC,$$

$$\because AB = AC = 6, \quad BC = 4,$$

$$\therefore \triangle BCD \text{ 的周长} = 6 + 4 = 10,$$

故选：C.

8. 眉山市东坡区永丰村是“天府粮仓”示范区，该村的“智慧春耕”让生产更高效，提升了水稻亩产量，水稻亩产量从 2021 年的 670 千克增长到了 2023 年的 780 千克，该村水稻亩产量年平均增长率为 x ，则可列方程为（ ）

A. $670 \times (1 + 2x) = 780$

B. $670 \times (1 + x)^2 = 780$

C. $670 \times (1 + x^2) = 780$

D. $670 \times (1 + x) = 780$

【答案】B

【解析】

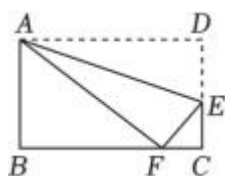
【分析】本题主要考查一元二次方程的应用，熟练掌握一元二次方程的应用是解题的关键。

设该村水稻亩产量年平均增长率为 x ，根据题意列出方程即可。

【详解】解：根据题意得： $670 \times (1 + x)^2 = 780$ 。

故选：B.

9. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 6$ ， $BC = 8$ ，点 E 在 DC 上，把 $\triangle ADE$ 沿 AE 折叠，点 D 恰好落在 BC 边上的点 F 处，则 $\cos \angle CEF$ 的值为（ ）



A. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

B. $\frac{\sqrt{7}}{3}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{5}{4}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了矩形的性质，折叠的性质，勾股定理，求角的三角函数等知识点，正确利用折叠的性质是解题的关键。

根据折叠的性质，可求得 $AF = AD = 8$ ， $EF = DE$ ，从而求得 BF ， CF ，在 $\text{Rt} \triangle EFC$ 中，由勾股定理，得 $EF^2 = CE^2 + CF^2$ ，即可求得结果。

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

【详解】解：∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore AD = BC = 8, \quad DC = AB = 6,$$

∵ 把 $\triangle ADE$ 沿 AE 折叠，点 D 恰好落在 BC 边上的点 F 处，

$$\therefore AF = AD = 8, \quad EF = DE,$$

$$\therefore BF = \sqrt{AF^2 - AB^2} = \sqrt{8^2 - 6^2} = 2\sqrt{7},$$

$$\therefore CF = BC - BF = 8 - 2\sqrt{7},$$

在 $\text{Rt}\triangle EFC$ 中，

$$CE = DC - DE = 6 - EF,$$

由勾股定理，得 $EF^2 = CE^2 + CF^2$ ，

$$\therefore EF^2 = (6 - EF)^2 + (8 - 2\sqrt{7})^2,$$

$$\therefore EF = \frac{32 - 8\sqrt{7}}{3},$$

$$\therefore CE = 6 - \frac{32 - 8\sqrt{7}}{3} = \frac{8\sqrt{7} - 14}{3},$$

$$\therefore \cos \angle CEF = \frac{CE}{EF} = \frac{\frac{8\sqrt{7} - 14}{3}}{\frac{32 - 8\sqrt{7}}{3}} = \frac{\sqrt{7}}{4},$$

故选：A.

10. 定义运算： $a \otimes b = (a + 2b)(a - b)$ ，例如 $4 \otimes 3 = (4 + 2 \times 3)(4 - 3)$ ，则函数 $y = (x + 1) \otimes 2$ 的最小值为（ ）

A. -21

B. -9

C. -7

D. -5

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查二次函数求最值，根据新定义，得到二次函数关系式，进而利用二次函数的性质，求最值即可.

【详解】解：由题意得， $y = (x + 1) \otimes 2 = (x + 1 + 2 \times 2)(x + 1 - 2) = (x + 5)(x - 1)$ ，

$$\text{即 } y = x^2 + 4x - 5 = (x + 2)^2 - 9,$$

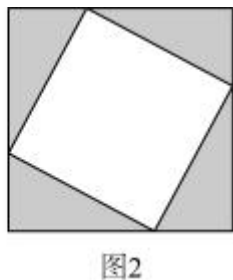
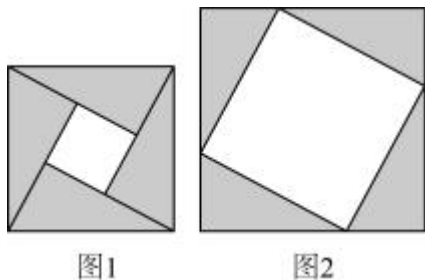
∴ 当 $x = -2$ 时，函数 $y = (x + 1) \otimes 2$ 的最小值为 -9.

故选：B.

11. 如图，图 1 是北京国际数学家大会的会标，它取材于我国古代数学家赵爽的“弦图”，是由四个全等

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

的直角三角形拼成. 若图 1 中大正方形的面积为 24, 小正方形的面积为 4, 现将这四个直角三角形拼成图 2, 则图 2 中大正方形的面积为 ()



A. 24

B. 36

C. 40

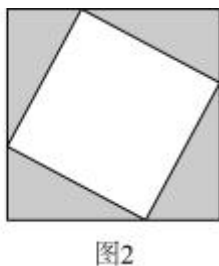
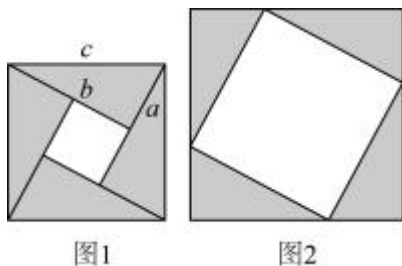
D. 44

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查勾股定理, 设直角三角形的两直角边为 a , b , 斜边为 c , 根据图 1, 结合已知条件得到 $a^2 + b^2 = c^2 = 24$, $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 4$, 进而求出 ab 的值, 再用分割法求解即可.

【详解】解: 如图, 直角三角形的两直角边为 a , b , 斜边为 c ,



∵ 图 1 中大正方形的面积是 24,

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2 = 24,$$

∵ 小正方形的面积是 4,

$$\therefore (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 4,$$

$$\therefore ab = 10,$$

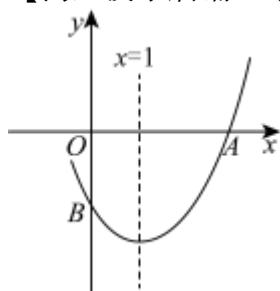
$$\therefore \text{图 2 中最大的正方形的面积为} = c^2 + 4 \times \frac{1}{2}ab = 24 + 2 \times 10 = 44;$$

故选: D.

12. 如图, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象与 x 轴交于点 $A(3, 0)$, 与 y 轴交于点 B , 对称轴为直线 $x = 1$, 下列四个结论: ① $bc < 0$; ② $3a + 2c < 0$; ③ $ax^2 + bx \geq a + b$; ④若 $-2 < c < -1$, 则

$$-\frac{8}{3} < a + b + c < -\frac{4}{3}, \text{ 其中正确结论的个数为 ()}$$

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】此题考查了二次函数的图象和性质，数形结合是解题的关键，利用开口方向和对称轴的位置即可判断①，利用对称轴和特殊点的函数值即可判断②，利用二次函数的最值即可判断③，求出 $c = -3a$ ，进

一步得到 $\frac{1}{3} < a < \frac{2}{3}$ ，又根据 $b = -2a$ 得到 $a + b + c = a - 2a - 3a = -4a$ ，即可判断④.

【详解】解：① $\because$ 函数图象开口方向向上，

$$\therefore a > 0;$$

$\because$ 对称轴在 y 轴右侧，

$\therefore a$ 、 b 异号，

$$\therefore b < 0,$$

$\therefore$ 抛物线与 y 轴交点在 y 轴负半轴，

$$\therefore c < 0,$$

$\therefore bc > 0$ ，故①错误；

② $\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交于点 $A(3, 0)$ ，与 y 轴交于点 B ，对称轴为直线 $x = 1$ ，

$$\therefore -\frac{b}{2a} = 1,$$

$$\therefore b = -2a,$$

$$\therefore x = -1 \text{ 时, } y = 0,$$

$$\therefore a - b + c = 0,$$

$$\therefore 3a + c = 0,$$

$$\therefore 3a + 2c < 0, \text{ 故②正确;}$$

③ $\because$ 对称轴为直线 $x = 1$ ， $a > 0$ ，

$\therefore y = a + b + c$ 最小值，

$$ax^2 + bx + c \geq a + b + c,$$

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$$\therefore ax^2 + bx \geq a + b,$$

故③正确;

$$\textcircled{4} \because -2 < c < -1,$$

$$\because x_1 x_2 = (-1) \times 3 = -3 = \frac{c}{a},$$

$$\therefore c = -3a,$$

$$\therefore -2 < -3a < -1,$$

$$\therefore \frac{1}{3} < a < \frac{2}{3},$$

$$\because b = -2a,$$

$$\therefore a + b + c = a - 2a - 3a = -4a,$$

$$\therefore -\frac{8}{3} < a + b + c < -\frac{4}{3},$$

故④正确;

综上所述, 正确的有②③④,

故选: C

二、填空题: 本大题共 6 个小题, 每小题 4 分, 共 24 分。请将正确答案直接填写在答题卡相应的位置上。

13. 分解因式: $3m^3 - 12m =$ _____.

【答案】 $3m(m+2)(m-2)$

【解析】

【分析】 本题考查因式分解, 涉及提公因式法因式分解及公式法因式分解, 根据多项式的结构特征, 先提公因式再利用平方差公式因式分解即可得到答案, 综合应用提公因式法因式分解及公式法因式分解是解决问题的关键.

【详解】 解: $3m^3 - 12m$
 $= 3m(m^2 - 4)$
 $= 3m(m+2)(m-2),$

故答案为: $3m(m+2)(m-2)$.

14. 已知方程 $x^2 + x - 2 = 0$ 的两根分别为 x_1, x_2 , 则 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{1}{2}$ ##0.5

【解析】

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

【分析】本题考查一元二次方程的根的定义以及根与系数的关系，解题的关键是掌握一元二次方程根与系数的关系，若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根分别为 x_1, x_2 ，则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ ， $x_1x_2=\frac{c}{a}$ 是解题的关键。

先根据根与系数的关系得到 $x_1+x_2=-1$ ， $x_1x_2=-2$ ，然后把 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ 化简为 $\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$ 然后代入即可。

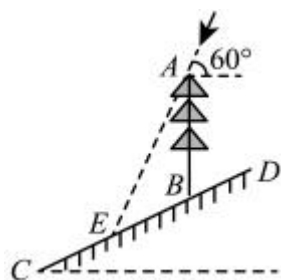
【详解】解：∵方程 $x^2+x-2=0$ 的两根分别为 x_1, x_2 ，

$$\therefore x_1+x_2=-1, \quad x_1x_2=-2,$$

$$\therefore \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}.$$

故答案为： $\frac{1}{2}$.

15. 如图，斜坡 CD 的坡度 $i=1:2$ ，在斜坡上有一棵垂直于水平面的大树 AB ，当太阳光与水平面的夹角为 60° 时，大树在斜坡上的影子 BE 长为 10 米，则大树 AB 的高为_____米。



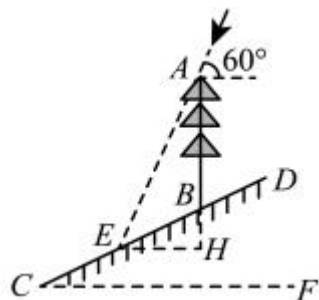
【答案】 $(4\sqrt{15}-2\sqrt{5})$ 米

【解析】

【分析】此题考查了解直角三角形的应用，勾股定理，解题的关键是正确构造直角三角形。

如图，过点 E 作水平地面的平行线，交 AB 的延长线于点 H ，设 $BH=x$ 米， $EH=2x$ 米，勾股定理求出 $x=2\sqrt{5}$ ，解直角三角形求出 $AH=\tan \angle AEH \cdot EH=\sqrt{3}EH=4\sqrt{15}$ ，进而求解即可。

【详解】解：如图，过点 E 作水平地面的平行线，交 AB 的延长线于点 H ，



则 $\angle BEH = \angle DCF$ ，

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

在 $Rt\triangle BEH$ 中, $\tan \angle BEH = \tan \angle BCF = i = \frac{BH}{EH} = \frac{1}{2}$,

设 $BH = x$ 米, $EH = 2x$ 米,

$$\therefore BE = \sqrt{EH^2 + BH^2} = \sqrt{5}x = 10,$$

$$\therefore x = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore BH = 2\sqrt{5} \text{ 米}, EH = 4\sqrt{5} \text{ 米},$$

$$\therefore \angle AEH = 60^\circ,$$

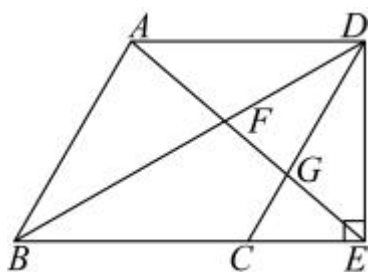
$$\therefore AH = \tan \angle AEH \cdot EH = \sqrt{3}EH = 4\sqrt{15} \text{ (米)},$$

$$\therefore AB = AH - BH = (4\sqrt{15} - 2\sqrt{5}) \text{ (米)},$$

答: 大树 AB 的高度为 $(4\sqrt{15} - 2\sqrt{5})$ 米.

故答案为: $(4\sqrt{15} - 2\sqrt{5})$.

16. 如图, 菱形 $ABCD$ 的边长为 6, $\angle BAD = 120^\circ$, 过点 D 作 $DE \perp BC$, 交 BC 的延长线于点 E , 连结 AE 分别交 BD , CD 于点 F , G , 则 FG 的长为_____.



【答案】 $\frac{4\sqrt{7}}{5}$ 或 $\frac{4}{5}\sqrt{7}$

【解析】

【分析】此题考查了菱形的性质, 相似三角形的性质和判定, 勾股定理等知识, 解题的关键是掌握以上知识.

首先根据菱形的性质得到 $AD = BC = CD = 6$, $AD \parallel BC$, $\angle BCD = 120^\circ$, 然后勾股定理求出

$$DE = \sqrt{CD^2 - CE^2} = 3\sqrt{3}, AE = \sqrt{DE^2 + AD^2} = 3\sqrt{7},$$

然后证明出 $\triangle AFD \sim \triangle EFB$, 得到

$$\frac{AF}{FE} = \frac{AD}{BE} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}, \text{ 代数求出 } AF = \frac{6\sqrt{7}}{5},$$

$$\text{然后证明出 } \triangle AGD \sim \triangle EGC, \text{ 得到 } \frac{AG}{EG} = \frac{AD}{CE} = \frac{6}{3} = 2,$$

求出 $AG = 2\sqrt{7}$, 进而求解即可.

【详解】解: $\because$ 菱形 $ABCD$ 的边长为 $\angle BAD = 120^\circ$,

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$$\therefore AD = BC = CD = 6, \quad AD \parallel BC, \quad \angle BCD = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle DCE = 60^\circ,$$

$$\because DE \perp BC,$$

$$\therefore \angle DEC = 90^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle DCE \text{ 中, } \because \angle CDE = 90^\circ - \angle DCE = 30^\circ,$$

$$\therefore CE = \frac{1}{2}CD = 3,$$

$$\therefore DE = \sqrt{CD^2 - CE^2} = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore BE = BC + CE = 9,$$

$$\because AD \parallel BE,$$

$$\therefore \angle ADE = 180^\circ - \angle DEC = 90^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ADE \text{ 中, } AE = \sqrt{DE^2 + AD^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 6^2} = 3\sqrt{7},$$

$$\because AD \parallel BE,$$

$$\therefore \triangle AFD \sim \triangle EFB,$$

$$\therefore \frac{AF}{FE} = \frac{AD}{BE} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore AF = \frac{2}{5}AE = \frac{2}{5} \times 3\sqrt{7} = \frac{6\sqrt{7}}{5},$$

$$\because AD \parallel CE,$$

$$\therefore \triangle AGD \sim \triangle EGC,$$

$$\therefore \frac{AG}{EG} = \frac{AD}{CE} = \frac{6}{3} = 2,$$

$$\therefore AG = \frac{2}{3}AE = \frac{2}{3} \times 3\sqrt{7} = 2\sqrt{7},$$

$$\therefore FG = AG - AF = 2\sqrt{7} - \frac{6\sqrt{7}}{5} = \frac{4\sqrt{7}}{5}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{4\sqrt{7}}{5}.$$

17. 已知 $a_1 = x+1$ ($x \neq 0$ 且 $x \neq -1$), $a_2 = \frac{1}{1-a_1}, a_3 = \frac{1}{1-a_2}, \dots, a_n = \frac{1}{1-a_{n-1}}$, 则 a_{2024} 的值为 _____.

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

【答案】 $-\frac{1}{x}$

【解析】

【分析】此题考查了分式的混合运算，利用分式的运算法则计算得到每三个为一个循环，分别为 $x+1$ ， $-\frac{1}{x}$ ， $\frac{x}{x+1}$ ，进一步即可求出 a_{2024} 。

【详解】解： $\because a_1 = x+1$ ，

$$\therefore a_2 = \frac{1}{1-a_1} = \frac{1}{1-(x+1)} = -\frac{1}{x},$$

$$a_3 = \frac{1}{1-a_2} = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{x}\right)} = \frac{x}{x+1},$$

$$\therefore a_4 = \frac{1}{1-a_3} = \frac{1}{1-\frac{x}{x+1}} = \frac{1}{\frac{1}{x+1}} = x+1,$$

$$\therefore a_5 = -\frac{1}{x},$$

$$a_6 = \frac{x}{x+1},$$

.....,

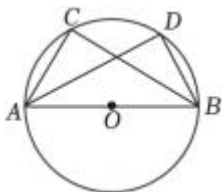
由上可得，每三个为一个循环，

$$\because 2024 \div 3 = 674 \times 3 + 2,$$

$$\therefore a_{2024} = -\frac{1}{x}.$$

故答案为： $-\frac{1}{x}$ 。

18. 如图， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ，点 O 在 AB 上， AD 平分 $\angle BAC$ 交 $\odot O$ 于 D ，连接 BD 。若 $AB = 10$ ， $BD = 2\sqrt{5}$ ，则 BC 的长为_____。



【答案】 8

【解析】

【分析】本题考查了圆周角定理，角平分线的定义全等三角形的判定和性质，勾股定理，相似三角形的判

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

定和性质，延长 AC ， BD 交于 E ，由圆周角定理可得 $\angle ADB = \angle ADE = 90^\circ$ ，

$\angle ACB = \angle BCE = 90^\circ$ ，进而可证明 $\triangle ABD \cong \triangle AED (ASA)$ ，得到 $BD = DE = 2\sqrt{5}$ ，即得

$BE = 4\sqrt{5}$ ，利用勾股定理得 $AD = 4\sqrt{5}$ ，再证明 $\triangle ABD \sim \triangle BCE$ ，得到 $\frac{BE}{AB} = \frac{BC}{AD}$ ，据此即可求解，
正确作出辅助线是解题的关键。

【详解】解：延长 AC ， BD 交于 E ，

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ADB = \angle ADE = 90^\circ$ ， $\angle ACB = \angle BCE = 90^\circ$ ，

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$ ，

$\therefore \angle BAD = \angle DAE$ ，

又 $\because AD = AD$ ，

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle AED (ASA)$ ，

$\therefore BD = DE = 2\sqrt{5}$ ，

$\therefore BE = 4\sqrt{5}$ ，

$\because AB = 10$ ， $BD = 2\sqrt{5}$ ，

$\therefore AD = \sqrt{10^2 - (2\sqrt{5})^2} = 4\sqrt{5}$ ，

$\because \angle DAC = \angle CBD$ ，

又 $\because \angle BAD = \angle DAE$ ，

$\therefore \angle BAD = \angle CBD$ ，

$\because \angle ADB = \angle BCE = 90^\circ$ ，

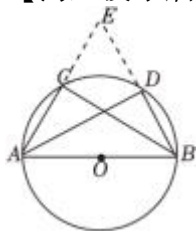
$\therefore \triangle ABD \sim \triangle BEC$ ，

$\therefore \frac{BE}{AB} = \frac{BC}{AD}$ ，

$\therefore \frac{4\sqrt{5}}{10} = \frac{BC}{4\sqrt{5}}$ ，

$\therefore BC = 8$ ，

故答案为：8。



三、解答题：本大题共 8 个小题，共 78 分。请把解答过程写在答题卡相应的位置上。

19. 计算：
$$\left(\sqrt{3}-\pi\right)^0+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}+2 \sin 45^{\circ}-\left|1-\sqrt{2}\right|$$

【答案】6

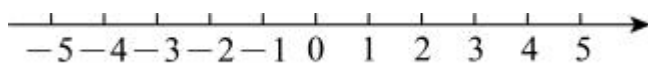
【解析】

【分析】本题主要考查了含特殊角的三角函数值、零指数幂、负整数指数幂、化简绝对值、实数混合运算等知识，熟练掌握相关运算法则是解题关键。根据零指数幂运算法则、负整数指数幂运算法则、特殊角的三角函数以及绝对值的性质进行运算，即可获得答案。

【详解】解：

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{3}-\pi\right)^0+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}+2 \sin 45^{\circ}-\left|1-\sqrt{2}\right| \\ &=1+4+2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}-\left(\sqrt{2}-1\right) \\ &=1+4+\sqrt{2}-\sqrt{2}+1 \\ &=6 \end{aligned}$$

20. 解不等式：
$$\frac{x+1}{3}-1 \leq \frac{2-x}{2}$$
，把它的解集表示在数轴上。



【答案】 $x \leq 2$ ，见解析

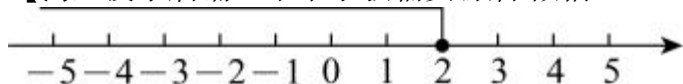
【解析】

【分析】本题考查求不等式的解集，并在数轴上表示解集，去分母，去括号，移项，合并，系数化 1，求出不等式的解集，然后在数轴上表示出解集即可。

【详解】解：

$$\begin{aligned} & \frac{x+1}{3}-1 \leq \frac{2-x}{2}, \\ & 2(x+1)-6 \leq 3(2-x), \\ & 2x+2-6 \leq 6-3x, \\ & 2x+3x \leq 6+6-2, \\ & 5x \leq 10, \\ & x \leq 2, \end{aligned}$$

其解集在数轴上表示如下：

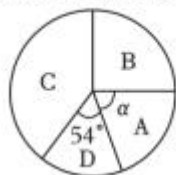


21. 为响应国家政策，保障耕地面积，提高粮食产量，确保粮食安全，我市开展高标准农田改造建设，调查统计了其中四台不同型号的挖掘机（分别为A型，B型，C型，D型）一个月内改造建设高标准农田的面积（亩），并绘制成如图不完整的统计图表：

改造农田面积统计表

型号	A	B	C	D
亩数	16	20	m	12

改造农田面积扇形统计图



利用图中的信息，解决下列问题：

- (1) ① $m =$ _____；
- ② 扇形统计图中 α 的度数为 _____。
- (2) 若这四台不同型号的挖掘机共改造建设了 960 亩高标准农田，估计其中 B 型挖掘机改造建设了多少亩？
- (3) 若从这四台不同型号的挖掘机中随机抽调两台挖掘机参加其它任务，请用画树状图或列表的方法求出恰好同时抽到 A，B 两种型号挖掘机的概率。

【答案】 (1) ① 32，② 72° (2) 240 亩

(3) $\frac{1}{6}$

【解析】

【分析】 本题考查的是统计表和扇形统计图的综合运用，求扇形统计图圆心角度数，用样本估计总体，画树状图求概率。读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键。

(1) 利用 D 型建设高标准农田的面积除以其所占比得到总数，再利用总数减去 A 型，B 型，D 型的面积，即可得到 C 型的建设面积，利用 360° 乘以 A 型建设面积所占比，即可解题；

(2) 利用总数乘以 B 型所占比，即可解题；

(3) 根据题意画出树状图得到总的情况数，再得到抽到 A，B 两种型号挖掘机的情况数，利用由概率公式求解即可。

【小问 1 详解】

解：① $12 \div \frac{54}{360} = 80$ (亩)，
 $m = 80 - 16 - 20 - 12 = 32$ ；

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

②扇形统计图中 α 的度数为 $360^\circ \times \frac{16}{80} = 72^\circ$ ；

故答案为：32， 72° ；

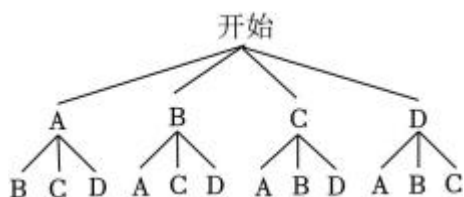
【小问 2 详解】

解：根据题意得： $960 \times \frac{20}{80} = 240$ （亩），

答：估计其中 B 型挖掘机改造建设了 240 亩；

【小问 3 详解】

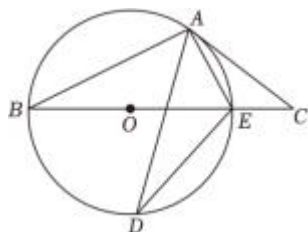
解：画树状图得：



$\therefore$ 共有 12 种等可能的结果，同时抽到 A，B 两种型号挖掘机的有 2 中情况，

$\therefore$ 同时抽到 A，B 两种型号挖掘机的概率为： $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ 。

22. 如图，BE 是 $\odot O$ 的直径，点 A 在 $\odot O$ 上，点 C 在 BE 的延长线上， $\angle EAC = \angle ABC$ ，AD 平分 $\angle BAE$ 交 $\odot O$ 于点 D，连结 DE。



(1) 求证：CA 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 当 $AC = 8$ ， $CE = 4$ 时，求 DE 的长。

【答案】 (1) 见解析 (2) $6\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了切线的判定和性质，等腰三角形的性质，勾股定理，圆周角定理，熟练掌握切线的判定是解题的关键。

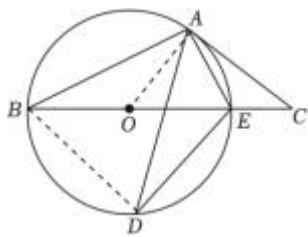
(1) 连接 OA，根据圆周角定理得到 $\angle BAE = 90^\circ$ ，根据等腰三角形的性质得到 $\angle ABC = \angle BAO$ ，求得 $\angle OAC = 90^\circ$ ，根据切线的判定定理得到结论；

(2) 根据相似三角形的判定和性质定理得到 $BC = 16$ ，求得 $BE = BC - CE = 12$ ，连接 BD，根据角平分线的定义得到 $\angle BAD = \angle EAD$ ，求得 $\widehat{BD} = \widehat{DE}$ ，得到 $BD = DE$ ，根据等腰直角三角形的性质即可得到结论。

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

【小问 1 详解】

证明：连接 OA ，



$\because BE$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle BAE = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAO + \angle OAE = 90^\circ$,

$\because OA = OB$,

$\therefore \angle B = \angle BAO$,

$\because \angle EAC = \angle ABC$,

$\therefore \angle CAE = \angle BAO$,

$\therefore \angle CAE + \angle OAE = 90^\circ$,

$\therefore \angle OAC = 90^\circ$,

$\because OA$ 是 $\odot O$ 的半径,

$\therefore CA$ 是 $\odot O$ 的切线;

【小问 2 详解】

解: $\because \angle EAC = \angle ABC$, $\angle C = \angle C$,

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle EAC$,

$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{CE}{AC}$,

$\therefore \frac{8}{BC} = \frac{4}{8}$,

$\therefore BC = 16$,

$\therefore BE = BC - CE = 12$,

连接 BD ,

$\because AD$ 平分 $\angle BAE$,

$\therefore \angle BAD = \angle EAD$,

$\therefore \widehat{BD} = \widehat{DE}$,

$\therefore BD = DE$,

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$\because BE$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle BDE = 90^\circ$,

$$\therefore DE = BD = \frac{\sqrt{2}}{2} BE = 6\sqrt{2}$$

23. 眉山是“三苏”故里，文化底蕴深厚. 近年来眉山市旅游产业蓬勃发展，促进了文创产品的销售，某商店用 960 元购进的 A 款文创产品和用 780 元购进的 B 款文创产品数量相同. 每件 A 款文创产品进价比 B 款文创产品进价多 15 元.

(1) 求 A, B 两款文创产品每件的进价各是多少元?

(2) 已知 A, B 文创产品每件售价为 100 元, B 款文创产品每件售价为 80 元, 根据市场需求, 商店计划再用不超过 7400 元的总费用购进这两款文创产品共 100 件进行销售, 问: 怎样进货才能使销售完后获得的利润最大, 最大利润是多少元?

【答案】 (1) A 款文创产品每件的进价 80 元, B 文创产品每件的进价是 65 元;

(2) 购进 A 款文创产品 60 件, 购进 B 款文创产品 40 件, 才能使销售完后获得的利润最大, 最大利润是 1800 元.

【解析】

【分析】 (1) 设 A 款文创产品每件的进价 a 元, 则 B 文创产品每件的进价是 $(a-15)$ 元, 根据题意, 列出分式方程即可求解;

(2) 设购进 A 款文创产品 x 件, 则购进 B 款文创产品 $(100-x)$ 件, 总利润为 W , 利用一次一次不等式求出 x 的取值范围, 再根据题意求出 W 与 x 的一次函数, 根据一次函数的性质解答即可求解;
本题考查了分式方程的应用, 一次函数的应用, 根据题意, 列出分式方程和一次函数解析式是解题的关键.

【小问 1 详解】

解: 设 A 款文创产品每件的进价 a 元, 则 B 文创产品每件的进价是 $(a-15)$ 元,

$$\text{根据题意得, } \frac{960}{a} = \frac{780}{a-15},$$

解得 $a = 80$,

经检验, $a = 80$ 是原分式方程的解,

$$\therefore 80 - 15 = 65$$

答: A 款文创产品每件的进价 80 元, 则 B 文创产品每件的进价是 65 元;

【小问 2 详解】

解: 设购进 A 款文创产品 x 件, 则购进 B 款文创产品 $(100-x)$ 件, 总利润为 W ,

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

根据题意得， $80x + 65(100 - x) \leq 7400$ ，

解得 $x \leq 60$ ，

又由题意得， $W = (100 - 80)x + (80 - 65)(100 - x) = 5x + 1500$ ，

$\because k = 5 > 0$ ， W 随 x 的增大而增大，

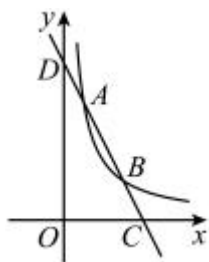
$\therefore$ 当 $x = 60$ 时，利润最大，

$\therefore$ 购进 A 款文创产品 60 件，购进 B 款文创产品 40 件，获得的利润最大，

$$W_{\text{最大}} = 5 \times 60 + 1500 = 1800$$

答：购进 A 款文创产品 60 件，购进 B 款文创产品 40 件，才能使销售完后获得的利润最大，最大利润是 1800 元。

24. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y = kx + b$ 与反比例函数 $y = \frac{m}{x} (x > 0)$ 的图象交于点 $A(1, 6)$ ， $B(n, 2)$ ，与 x 轴， y 轴分别交于 C ， D 两点。



(1) 求一次函数和反比例函数的表达式；

(2) 若点 P 在 y 轴上，当 $\triangle PAB$ 的周长最小时，请直接写出点 P 的坐标；

(3) 将直线 AB 向下平移 a 个单位长度后与 x 轴， y 轴分别交于 E ， F 两点，当 $EF = \frac{1}{2} AB$ 时，求 a 的值。

【答案】 (1) 一次函数的表达式为 $y = -2x + 8$ ，反比例函数的表达式为 $y = \frac{6}{x}$

(2) 点 P 的坐标为 $(0, 5)$

(3) $a = 6$ 或 $a = 10$

【解析】

【分析】 本题考查了待定系数法求函数的解析式，轴对称-最短路径问题，勾股定理，正确地求出函数的解析式是解题的关键。

(1) 根据已知条件列方程求得 $m = 6$ ，得到反比例函数的表达式为 $y = \frac{6}{x}$ ，求得 $B(3, 2)$ ，解方程组即可得到结论；

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

(2) 如图，作点 A 关于 y 轴的对称点 E ，连接 EB 交 y 轴于 P ，则此时， $\triangle PAB$ 的周长最小，根据轴对称

的性质得到 $E(-1, 6)$ ，得到直线 BE 的解析式为 $y = -x + 5$ ，当 $x = 0$ 时， $y = 5$ ，于是得到点 P 的坐标为 $(0, 5)$ ；

(3) 将直线 AB 向下平移 a 个单位长度后与 x 轴， y 轴分别交于 E ， F 两点，求得直线 EF 的解析式为

$y = -2x + 8 - a$ ，解方程得到 $E\left(\frac{8-a}{2}, 0\right)$ ， $F(0, 8-a)$ ，根据勾股定理即可得到结论。

【小问 1 详解】

解： $\because$ 一次函数 $y = kx + b$ 与反比例函数 $y = \frac{m}{x} (x > 0)$ 的图象交于点 $A(1, 6)$ ， $B(n, 2)$ ，

$$\therefore \frac{m}{1} = 6,$$

$$\therefore m = 6,$$

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y = \frac{6}{x}$ ，

把 $B(n, 2)$ 代入 $y = \frac{6}{x}$ 得，

$$2 = \frac{6}{n},$$

$$\therefore n = 3,$$

$$\therefore B(3, 2),$$

把 $A(1, 6)$ ， $B(3, 2)$ 代入 $y = kx + b$ 得，

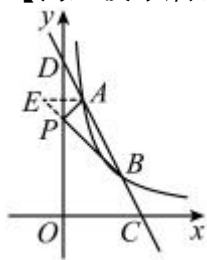
$$\begin{cases} k + b = 6 \\ 3k + b = 2 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -2 \\ b = 8 \end{cases},$$

$\therefore$ 一次函数的表达式为 $y = -2x + 8$ ；

【小问 2 详解】

解：如图，作点 A 关于 y 轴的对称点 E ，连接 EB 交 y 轴于 P ，



此时, $\triangle PAB$ 的周长最小,

$\therefore$ 点 $A(1, 6)$,

$\therefore E(-1, 6)$,

设直线 BE 的解析式为 $y = mx + c$,

$$\therefore \begin{cases} -m + c = 6 \\ 3m + c = 2 \end{cases},$$

解得 $\begin{cases} m = -1 \\ c = 5 \end{cases},$

$\therefore$ 直线 BE 的解析式为 $y = -x + 5$,

当 $x = 0$ 时, $y = 5$,

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(0, 5)$;

【小问 3 详解】

解: 将直线 AB 向下平移 a 个单位长度后与 x 轴, y 轴分别交于 E , F 两点,

$\therefore$ 直线 EF 的解析式为 $y = -2x + 8 - a$,

$$\therefore E\left(\frac{8-a}{2}, 0\right), F(0, 8-a),$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore \sqrt{\left(\frac{8-a}{2}\right)^2 + (8-a)^2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{(1-3)^2 + (6-2)^2},$$

解得 $a = 6$ 或 $a = 10$.

25. 综合与实践

问题提出: 在一次综合与实践活动中, 某数学兴趣小组将足够大的直角三角板的一个顶点放在正方形的中心 O 处, 并绕点 O 旋转, 探究直角三角板与正方形 $ABCD$ 重叠部分的面积变化情况.

操作发现: 将直角三角板的直角顶点放在点 O 处, 在旋转过程中:

(1) 若正方形边长为 4, 当一条直角边与对角线重合时, 重叠部分的面积为_____; 当一条直角边与正方形的一边垂直时, 重叠部分的面积为_____.

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

(2) 若正方形的面积为 S ，重叠部分的面积为 S_1 ，在旋转过程中 S_1 与 S 的关系为_____。

类比探究：如图 1，若等腰直角三角板的直角顶点与点 O 重合，在旋转过程中，两条直角边分别交正方形两边于 E ， F 两点，小宇经过多次实验得到结论 $BE + DF = \sqrt{2}OC$ ，请你帮他进行证明。

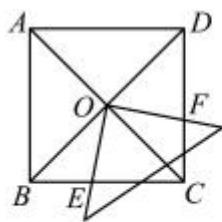


图1

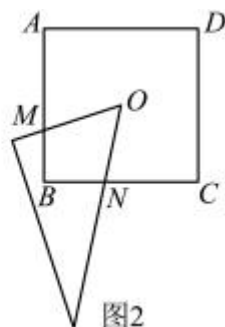


图2

拓展延伸：如图 2，若正方形边长为 4，将另一个直角三角板中 60° 角的顶点与点 O 重合，在旋转过程中，当三角板的直角边交 AB 于点 M ，斜边交 BC 于点 N ，且 $BM = BN$ 时，请求出重叠部分的面积。

(参考数据： $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ ， $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ ， $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$)

【答案】 (1) 4；4； (2) $S_1 = \frac{1}{4}S$ ； 类比探究：见解析； 拓展延伸： $4\sqrt{3} - 4$

【解析】

【分析】 本题考查了正方形的性质，图形旋转的性质，三角形的全等的判定及性质，三角函数的概念等知识点，正确作辅助线证明全等是解题的关键。

操作发现： (1) 根据图形即可判断重叠部分即为 $\triangle BOC$ (对角线分成的四个三角形中的一个) 求出面积即可；当一条直角边与正方形的一边垂直时，如图，证明四边形 $OMCN$ 是正方形，求解面积即可；

(2) 如图，过点 O 作 $OG \perp CB$ 于点 G ， $OH \perp DC$ 于点 H ，证明 $\triangle OGE \cong \triangle OHF$ ，从而证明

$$S_{\text{四边形}OECF} = S_{\text{正方形}OGCH} = \frac{1}{4}S_{\text{正方形}ABCD}, \text{即可求得结论；}$$

类比探究： 先证明 $\triangle EOB \cong \triangle FOC$ ，从而证明 $BE + DF = CF + DF = CD$ ，即可证明结论；

拓展延伸： 过点 O 作 $OG \perp AB$ 于点 G ， $OH \perp BC$ 于点 H ，先证明 $\triangle OGM \cong \triangle OHN$ ，即可证明

$$S_{\triangle OGM} = S_{\triangle OHN}, \angle GOM = \angle NOH, \text{从而证明 } \angle GOM = 15^\circ, \text{根据 } \tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}, \text{即可求得}$$

$\therefore GM = 2 \times (2 - \sqrt{3}) = 4 - 2\sqrt{3}$ ，由重叠部分的面积 $= S_{\text{四边形}OMEN} = S_{\text{正方形}OGHN} - 2S_{\triangle OGM}$ ，即可求得结果。

【详解】 解： 操作发现： (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

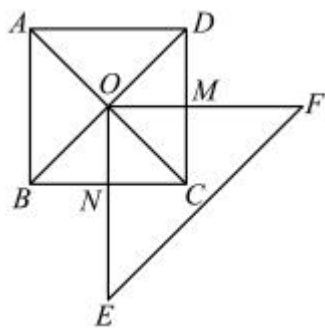
$$\therefore \angle BOC = 90^\circ,$$

$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{4}S_{\text{正方形}ABCD} = \frac{1}{4} \times 4 \times 4 = 4;$$

当一条直角边与对角线重合时，重叠部分的面积为

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

当一条直角边与正方形的一边垂直时，如图，



$$\therefore \angle OMC = \angle MON = \angle BCD = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $MONC$ 是矩形，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore \angle ACD = 45^\circ, \quad OA = OC,$$

$$\therefore \angle MOC = \angle MCO,$$

$$\therefore OM = MC,$$

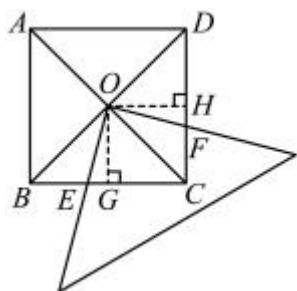
$\therefore$ 四边形 $OMCN$ 是正方形，

$$\therefore OM = \frac{1}{2}AD = 2,$$

$\therefore$ 四边形 $OMCN$ 的面积是 4，

故答案为：4，4；

(2) 如图，过点 O 作 $OG \perp CB$ 于点 G ， $OH \perp DC$ 于点 H 。



$\because O$ 是正方形 $ABCD$ 的中心，

$$\therefore OG = OH,$$

$$\because \angle OGC = \angle OHC = \angle C = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $OGCH$ 是矩形，

$$\because OG = OH,$$

$\therefore$ 四边形 $OGCH$ 是正方形，

$$\therefore \angle GOH = \angle EOF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EOG = \angle FOH,$$

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$$\because \angle OGE = \angle OHF = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle OGE \cong \triangle OHF \text{ (ASA)},$$

$$\therefore S_{\triangle OGE} = S_{\triangle OHF},$$

$$\therefore S_{\text{四边形} OECF} = S_{\text{正方形} OGCH} = \frac{1}{4} S_{\text{正方形} ABCD},$$

$$\therefore S_1 = \frac{1}{4} S$$

$$\text{故答案为: } S_1 = \frac{1}{4} S;$$

类比探究:

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AC \perp BD, OB = OC = OD = OA, \angle BCD = \angle OCD = 45^\circ,$$

$$\because \angle FOE = \angle BOC,$$

$$\therefore \angle EOB = \angle FOC,$$

$$\therefore \triangle EOB \cong \triangle FOC \text{ (ASA)},$$

$$\therefore BE = CF,$$

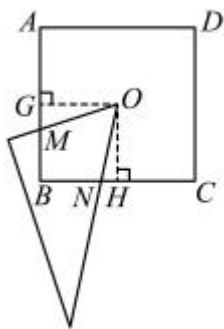
$$\therefore BE + DF = CF + DF = CD,$$

$$\because CD = \sqrt{2}OC,$$

$$\therefore BE + DF = \sqrt{2}OC,$$

拓展延伸:

过点 O 作 $OG \perp AB$ 于点 G , $OH \perp BC$ 于点 H .



同 (2) 可知四边形 $OGBH$ 是正方形,

$$\therefore BG = BH, OG = OH,$$

$$\because BM = BN,$$

$$\therefore GM = NH,$$

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$$\because \angle OGM = \angle OHN = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle OGM \cong \triangle OHN (\text{SAS}),$$

$$\therefore S_{\triangle OGM} = S_{\triangle OHN}, \quad \angle GOM = \angle NOH,$$

$$\because \angle MON = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle GOM = \frac{1}{2} \times (90^\circ - 60^\circ) = 15^\circ$$

$$\text{由 (1) 可知 } OG = 2, \quad S_{\text{正方形 } OGBH} = 4,$$

$$\therefore \tan \angle GOM = \tan 15^\circ = \frac{GM}{OG} = 2 - \sqrt{3},$$

$$\therefore GM = 2 \times (2 - \sqrt{3}) = 4 - 2\sqrt{3},$$

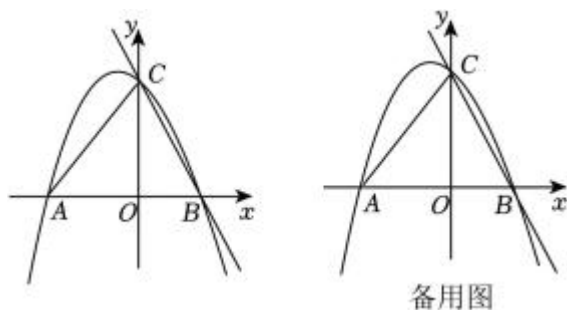
$$\therefore S_{\triangle OGM} = \frac{1}{2} OG \cdot GM = \frac{1}{2} \times 2 \times (4 - 2\sqrt{3}) = 4 - 2\sqrt{3}$$

$$\therefore \text{重叠部分的面积} = S_{\text{四边形 } OMBN} = S_{\text{正方形 } OGBH} - 2S_{\triangle OGM}$$

$$= 4 - 2 \times (4 - 2\sqrt{3})$$

$$= 4\sqrt{3} - 4.$$

26. 如图，抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-3, 0)$ 和点 B ，与 y 轴交于点 $C(0, 3)$ ，点 D 在抛物线上。



(1) 求该抛物线的解析式；

(2) 当点 D 在第二象限内，且 $\triangle ACD$ 的面积为 3 时，求点 D 的坐标；

(3) 在直线 BC 上是否存在点 P ，使 $\triangle OPD$ 是以 PD 为斜边的等腰直角三角形？若存在，请直接写出点

P 的坐标；若不存在，请说明理由。

【答案】 (1) 抛物线的解析式为 $y = -x^2 - 2x + 3$

(2) D 的坐标为 $(-1, 4)$ 或 $(-2, 3)$

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

(3) P 的坐标为 $(0, 3)$ 或 $\left(\frac{25-\sqrt{193}}{18}, \frac{-7+\sqrt{193}}{6}\right)$ 或 $\left(\frac{25+\sqrt{193}}{18}, \frac{-7-\sqrt{193}}{6}\right)$ 或 $\left(\frac{11}{9}, -\frac{2}{3}\right)$

【解析】

【分析】 (1) 利用待定系数法求解；

(2) 过 D 作 $DK \parallel y$ 轴交 AC 于 K ，求出直线 AC 解析式，根据 $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}DK \cdot |x_A - x_C| = 3$ 列式求解；

(3) 先求出点 A, B 坐标，再求出直线 BC 解析式，过 P 作 $PN \perp y$ 轴于 N ，过 D 作 $DM \perp y$ 轴于 M ，分以下情况分别讨论即可：① P 与 C 重合， D 与 A 重合时；②当 P 在第一象限， D 在第四象限时；③当 P 在第四象限， D 在第三象限时；④当 P 在第四象限， D 在第一象限时。

【小问 1 详解】

解：把 $A(-3, 0)$ ， $C(0, 3)$ 代入 $y = -x^2 + bx + c$ 得：

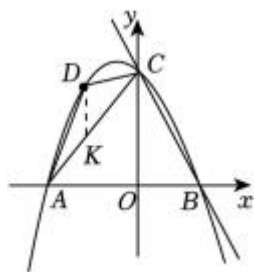
$$\begin{cases} -9 - 3b + c = 0 \\ c = 3 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} b = -2 \\ c = 3 \end{cases}$ ，

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -x^2 - 2x + 3$ ；

【小问 2 详解】

解：过 D 作 $DK \parallel y$ 轴交 AC 于 K ，如图：



由 $A(-3, 0)$ ， $C(0, 3)$ 得直线 AC 解析式为 $y = x + 3$ ，

设 $D(t, -t^2 - 2t + 3)$ ，则 $K(t, t + 3)$ ，

$$\therefore DK = -t^2 - 2t + 3 - (t + 3) = -t^2 - 3t$$

$\therefore \triangle ACD$ 的面积为 3，

$$\therefore \frac{1}{2}DK \cdot |x_A - x_C| = 3 \quad , \quad \text{即} \quad \frac{1}{2}(-t^2 - 3t) \times 3 = 3$$

解得 $t = -1$ 或 $t = -2$ ，

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$\therefore D$ 的坐标为 $(-1, 4)$ 或 $(-2, 3)$;

【小问 3 详解】

解：在直线 BC 上存在点 P ，使 $\triangle OPD$ 是以 PD 为斜边的等腰直角三角形，理由如下：

在 $y = -x^2 - 2x + 3$ 中，令 $y = 0$ 得 $0 = -x^2 - 2x + 3$,

解得 $x = -3$ 或 $x = 1$,

$\therefore A(-3, 0)$, $B(1, 0)$,

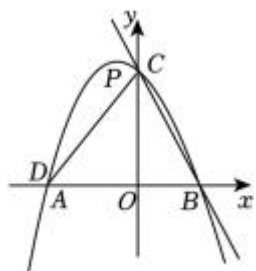
由 $B(1, 0)$, $C(0, 3)$ 得直线 BC 解析式为 $y = -3x + 3$,

设 $P(m, -3m + 3)$, $D(n, -n^2 - 2n + 3)$,

过 P 作 $PN \perp y$ 轴于 N ，过 D 作 $DM \perp y$ 轴于 M ,

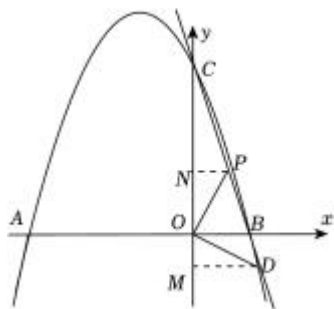
① $\because OA = OC = 3$,

$\therefore$ 当 P 与 C 重合， D 与 A 重合时， $\triangle OPD$ 是等腰直角三角形，如图：



此时 $P(0, 3)$;

② 当 P 在第一象限， D 在第四象限时，



$\because \triangle OPD$ 是以 PD 为斜边的等腰直角三角形，

$\therefore OD = OP$, $\angle POD = 90^\circ$,

$\therefore \angle DOM = 90^\circ - \angle PON = \angle OPN$,

$\because \angle DMO = 90^\circ = \angle PNO$,

$\therefore \triangle DOM \cong \triangle OPN$ (AAS),

$\therefore DM = ON$, $OM = PN$,

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

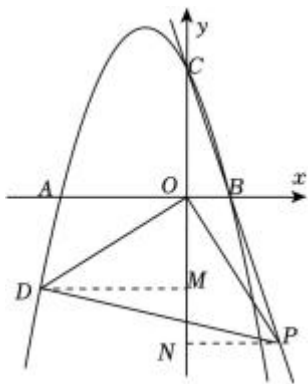
$$\therefore \begin{cases} n = -3m + 3 \\ n^2 + 2n - 3 = m \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} m = \frac{25 + \sqrt{193}}{18} \\ n = \frac{-7 - \sqrt{193}}{6} \end{cases} \quad (n \text{ 小于 } 0, \text{ 舍去}) \text{ 或 } \begin{cases} m = \frac{25 - \sqrt{193}}{18} \\ n = \frac{-7 + \sqrt{193}}{6} \end{cases},$$

$$\therefore -3m + 3 = -3 \times \frac{25 - \sqrt{193}}{18} + 3 = \frac{-7 + \sqrt{193}}{6},$$

$$\therefore P \text{ 的坐标为 } \left(\frac{25 - \sqrt{193}}{18}, \frac{-7 + \sqrt{193}}{6} \right);$$

③当 P 在第四象限, D 在第三象限时, 如图:



$\because \triangle OPD$ 是以 PD 为斜边的等腰直角三角形,

$$\therefore OD = OP, \quad \angle POD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DOM = 90^\circ - \angle PON = \angle OPN,$$

$$\because \angle DMO = 90^\circ = \angle PNO,$$

$$\therefore \triangle DOM \cong \triangle OPN (\text{AAS}),$$

$$\therefore PN = OM, \quad ON = DM,$$

$$\text{同理可得} \begin{cases} m = n^2 + 2n - 3 \\ 3m - 3 = -n \end{cases},$$

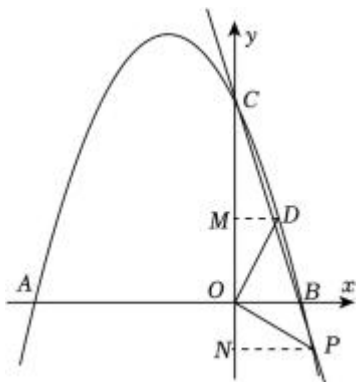
$$\text{解得} \begin{cases} m = \frac{25 + \sqrt{193}}{18} \\ n = \frac{-7 - \sqrt{193}}{6} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m = \frac{25 - \sqrt{193}}{18} \\ n = \frac{-7 + \sqrt{193}}{6} \end{cases} \quad (\text{大于 } 0, \text{ 舍去}),$$

$$\therefore -3m + 3 = -3 \times \frac{25 + \sqrt{193}}{18} + 3 = \frac{-7 - \sqrt{193}}{6},$$

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$\therefore P$ 的坐标为 $\left(\frac{25+\sqrt{193}}{18}, \frac{-7-\sqrt{193}}{6}\right)$;

④当 P 在第四象限， D 在第一象限，如图：



$\because \triangle OPD$ 是以 PD 为斜边的等腰直角三角形，

$\therefore OD = OP$, $\angle POD = 90^\circ$,

$\therefore \angle DOM = 90^\circ - \angle PON = \angle OPN$,

$\because \angle DMO = 90^\circ = \angle PNO$,

$\therefore \triangle DOM \cong \triangle OPN (AAS)$,

$\therefore PN = OM$, $ON = DM$,

$$\therefore \begin{cases} m = -n^2 - 2n + 3 \\ 3m - 3 = n \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} m = 0 \\ n = -3 \end{cases} \text{ (舍去) 或 } \begin{cases} m = \frac{11}{9} \\ n = \frac{2}{3} \end{cases},$$

$$\therefore -3m + 3 = -3 \times \frac{11}{9} + 3 = -\frac{2}{3},$$

$\therefore P$ 的坐标为 $\left(\frac{11}{9}, -\frac{2}{3}\right)$;

综上所述， P 的坐标为 $(0, 3)$ 或 $\left(\frac{25-\sqrt{193}}{18}, \frac{-7+\sqrt{193}}{6}\right)$ 或 $\left(\frac{25+\sqrt{193}}{18}, \frac{-7-\sqrt{193}}{6}\right)$ 或 $\left(\frac{11}{9}, -\frac{2}{3}\right)$.

【点睛】本题属于二次函数综合题，考查待定系数法求函数解析式、二次函数中三角形面积计算、特殊三角形存在性问题、等腰直角三角形的性质等，难度较大，熟练运用数形结合及分类讨论思想是解题的关键.