

泸州市二〇二四年初中学业水平考试

数学试题

全卷分为第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共4页。全卷满分120分。考试时间共120分钟。

注意事项：

1. 答题前，请考生务必在答题卡上正确填写自己的姓名、准考证号和座位号。考试结束，将试卷和答题卡一并交回。
2. 选择题每小题选出的答案须用2B铅笔在答题卡上把对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦擦净后，再选涂其它答案。非选择题须用0.5毫米黑色墨迹签字笔在答题卡上对应题号位置作答，在试卷上作答无效。

第Ⅰ卷（选择题 共36分）

一、选择题（本大题共12个小题，每小题3分，共36分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）。

1. 下列各数中，无理数是（ ）

- A. $-\frac{1}{3}$ B. 3.14 C. 0 D. π

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了无理数的识别，无限不循环小数叫无理数，初中范围内常见的无理数有三类：① π 类，如 2π ， $\frac{\pi}{3}$ 等；②开方开不尽的数，如 $\sqrt{2}$ ， $\sqrt[3]{5}$ 等；③虽有规律但却是无限不循环的小数，如0.1010010001...（两个1之间依次增加1个0），0.2121121112...（两个2之间依次增加1个1）等。

【详解】解：根据无理数的定义可知，四个数中，只有D选项中的数 π 是无理数，
故选：D。

2. 第二十届中国国际酒业博览会于2024年3月21-24日在泸州市国际会展中心举办，各种活动带动消费2.6亿元，将数据260000000用科学记数法表示为（ ）

- A. 2.6×10^7 B. 2.6×10^8 C. 2.6×10^9 D. 2.6×10^{10}

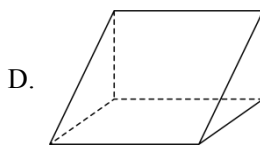
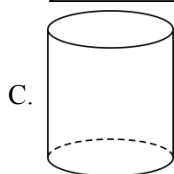
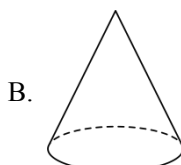
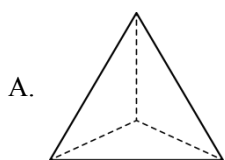
【答案】B

【解析】

【分析】本题考查科学记数法的表示方法，一般形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ，确定 n 的值时，要看原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的值与小数点移动位数相同，确定 a 与 n 的值是解题关键。

【详解】解： $260000000 = 2.6 \times 10^8$ ，
故选：B。

3. 下列几何体中，其三视图的主视图和左视图都为矩形的是（ ）



【答案】C

【解析】

【分析】本题考查三视图，主视图、左视图是分别从物体正面、左面所看到的图形，依此即可求解.

【详解】解：A、主视图为三角形，左视图为三角形，故本选项不符合题意；

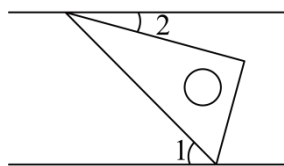
B、主视图为三角形，左视图为三角形，故本选项不符合题意；

C、主视图为矩形，左视图为矩形，故本选项符合题意；

D、主视图为矩形，左视图为三角形，故本选项不符合题意.

故选：C.

4. 把一块含 30° 角的直角三角板按如图方式放置于两条平行线间，若 $\angle 1 = 45^\circ$ ，则 $\angle 2 =$ （ ）



A. 10°

B. 15°

C. 20°

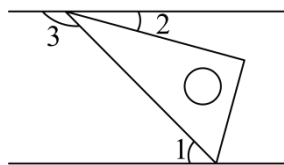
D. 30°

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了平行线的性质，三角板中角的运算，熟练掌握相关性质是解题的关键，利用平行线性质得到 $\angle 3 = 135^\circ$ ，再根据平角的定义求解，即可解题.

【详解】解：如图，



$\because$ 直角三角板位于两条平行线间且 $\angle 1 = 45^\circ$,

$\therefore \angle 3 = 135^\circ$,

又 $\because$ 直角三角板含 30° 角,

$\therefore 180^\circ - \angle 2 - \angle 3 = 30^\circ$,

$$\therefore \angle 2 = 15^\circ,$$

故选：B.

5. 下列运算正确的是 ()

A. $3a + 2a^3 = 5a^4$

B. $3a^2 \cdot 2a^3 = 6a^6$

C. $(-2a^3)^2 = 4a^6$

D. $4a^6 \div a^2 = 4a^3$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了积的乘方，单项式除以单项式，单项式乘以单项式和合并同类项等计算，熟知相关计算法则是解题的关键.

【详解】解：A、 $3a$ 与 $2a^3$ 不是同类项，不能合并，原式计算错误，不符合题意；

B、 $3a^2 \cdot 2a^3 = 6a^5$ ，原式计算错误，不符合题意；

C、 $(-2a^3)^2 = 4a^6$ ，原式计算正确，符合题意；

D、 $4a^6 \div a^2 = 4a^4$ ，原式计算错误，不符合题意；

故选：C.

6. 已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形，下列条件中，不能判定 $ABCD$ 为矩形的是 ()

A. $\angle A = 90^\circ$

B. $\angle B = \angle C$

C. $AC = BD$

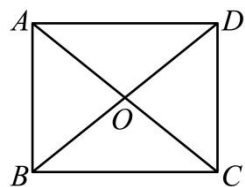
D. $AC \perp BD$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了矩形的判定. 根据有一个角是直角的平行四边形是矩形、对角线相等的平行四边形是矩形、有一个角是直角的平行四边形是矩形判断即可.

【详解】解：如图，



A、 $\angle BAD = 90^\circ$ ，能判定 $ABCD$ 为矩形，本选项不符合题意；

B、 $\because \angle ABC = \angle BCD$ ， $\angle ABC + \angle BCD = 180^\circ$ ， $\therefore \angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$ ，能判定 $ABCD$ 为矩形，本选项不符合题意；

C、 $AC = BD$ ，能判定 $ABCD$ 为矩形，本选项不符合题意；

D、 $AC \perp BD$ ，能判定 $ABCD$ 为菱形，不能判定 $ABCD$ 为矩形，本选项符合题意；

故选：D.

7. 分式方程 $\frac{1}{x-2} - 3 = \frac{2}{2-x}$ 的解是 ()

A. $x = -\frac{7}{3}$

B. $x = -1$

C. $x = \frac{5}{3}$

D. $x = 3$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查解分式方程，根据解分式方程方法和步骤（去分母，去括号，移项，合并同类项，系数化为1，检验）求解，即可解题.

【详解】解： $\frac{1}{x-2} - 3 = \frac{2}{2-x}$,

$$\frac{1}{x-2} - 3 = -\frac{2}{x-2},$$

$$1 - 3(x-2) = -2,$$

$$1 - 3x + 6 = -2,$$

$$-3x = -9,$$

$$x = 3,$$

经检验 $x = 3$ 是该方程的解，

故选：D.

8. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2x + 1 - k = 0$ 无实数根，则函数 $y = kx$ 与函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象交点个数为 ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了根的判别式及一次函数和反比例函数的图象. 首先根据一元二次方程无实数根确定 k 的取值范围，然后根据一次函数和反比例函数的性质确定其图象的位置.

【详解】解： $\because$ 方程 $x^2 + 2x + 1 - k = 0$ 无实数根，

$$\therefore \Delta = 4 - 4(1 - k) < 0,$$

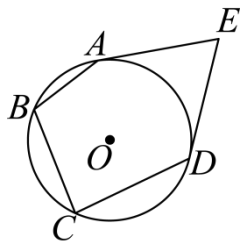
解得： $k < 0$ ，则函数 $y = kx$ 的图象过二，四象限，

而函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象过一，三象限，

∴ 函数 $y = kx$ 与函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象不会相交，则交点个数为 0，

故选：A.

9. 如图， EA ， ED 是 $\odot O$ 的切线，切点为 A ， D ，点 B ， C 在 $\odot O$ 上，若 $\angle BAE + \angle BCD = 236^\circ$ ，则 $\angle E =$ ()



A. 56°

B. 60°

C. 68°

D. 70°

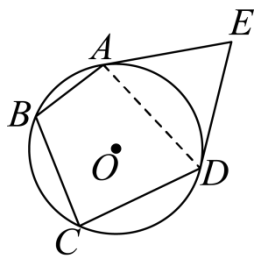
【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了圆的内接四边形的性质，切线长定理，等腰三角形的性质等知识点，正确作辅助线是解题关键.

根据圆的内接四边形的性质得 $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$ ，由 $\angle BAE + \angle BCD = 236^\circ$ 得 $\angle EAD = 56^\circ$ ，由切线长定理得 $EA = ED$ ，即可求得结果.

【详解】解：如图，连接 AD ，



∵ 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形，

∴ $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$ ，

∵ $\angle BAE + \angle BCD = 236^\circ$ ，

∴ $\angle BAE + \angle BCD - (\angle BAD + \angle BCD) = 236^\circ - 180^\circ$ ，

即 $\angle BAE - \angle BAD = 56^\circ$ ，

∴ $\angle EAD = 56^\circ$ ，

∵ EA ， ED 是 $\odot O$ 的切线，根据切线长定理得，

∴ $EA = ED$ ，

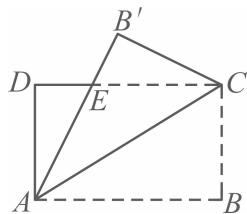
∴ $\angle EAD = \angle EDA = 56^\circ$ ，

$$\therefore \angle E = 180^\circ - \angle EAD - \angle EDA = 180^\circ - 56^\circ - 56^\circ = 68^\circ.$$

故选：C.

10. 宽与长的比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的矩形叫做黄金矩形，黄金矩形给我们以协调、匀称的美感. 如图，把黄金矩形

$ABCD$ 沿对角线 AC 翻折，点 B 落在点 B' 处， AB' 交 CD 于点 E ，则 $\sin \angle DAE$ 的值为 ()



A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了折叠的性质，矩形的性质，勾股定理，全等三角形的判定和性质，三角函数等知识点，利用黄金比例表示各线段的长是解题的关键.

设宽，根据比例表示长，证明 $\triangle ADE \cong \triangle CB'E$ ，在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中，利用勾股定理即可求得结果.

【详解】解：设宽为 x ，

$$\because \text{宽与长的比是 } \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\therefore \text{长为: } \frac{x}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}x,$$

由折叠的性质可知， $AD = BC = B'C = x$ ，

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CB'E$ 中，

$$\begin{cases} \angle AED = \angle B'E \\ \angle D = \angle B' \\ AD = B'C \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CB'E (\text{AAS}),$$

$$\therefore AE = CE,$$

$$\therefore AE + DE = DC = \frac{\sqrt{5}+1}{2}x,$$

设 $DE = y$ ，

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ADE \text{ 中, } x^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}x - y \right)^2,$$

变形得： $\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$,

$$AD = 2y, \quad AE = \sqrt{y^2 + (2y)^2} = \sqrt{5}y,$$

$$\therefore \sin \angle DAE = \frac{DE}{AE} = \frac{y}{\sqrt{5}y} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

故选 A.

11. 已知二次函数 $y = ax^2 + (2a-3)x + a-1$ (x 是自变量) 的图象经过第一、二、四象限, 则实数 a 的取值范围为 ()

A. $1 \leq a < \frac{9}{8}$

B. $0 < a < \frac{3}{2}$

C. $0 < a < \frac{9}{8}$

D. $1 \leq a < \frac{3}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了二次函数图象与性质. 利用二次函数的性质, 抛物线与 x 轴有 2 个交点, 开口向上, 而且与 y 轴的交点不在负半轴上, 然后解不等式组即可.

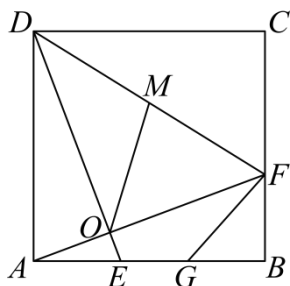
【详解】解: $\because$ 二次函数 $y = ax^2 + (2a-3)x + a-1$ 图象经过第一、二、四象限,

$$\therefore \Delta = (2a-3)^2 - 4a(a-1) > 0 \text{ 且 } a-1 \geq 0, \quad a > 0,$$

$$\text{解得 } 1 \leq a < \frac{9}{8}.$$

故选: A.

12. 如图, 在边长为 6 的正方形 $ABCD$ 中, 点 E, F 分别是边 AB, BC 上的动点, 且满足 $AE = BF$, AF 与 DE 交于点 O , 点 M 是 DF 的中点, G 是边 AB 上的点, $AG = 2GB$, 则 $OM + \frac{1}{2}FG$ 的最小值是 ()



A. 4

B. 5

C. 8

D. 10

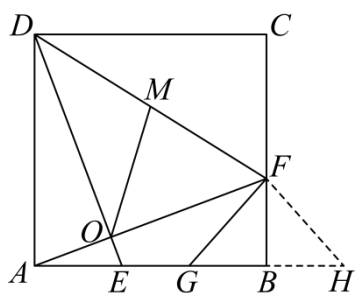
【答案】B

【解析】

【分析】 本题主要考查了正方形的性质，全等三角形的性质与判定，直角三角形的性质，勾股定理等等，先证明 $\triangle ADE \cong \triangle BAF$ (SAS) 得到 $\angle ADE = \angle BAE$ ，进而得到 $\angle DOF = 90^\circ$ ，则由直角三角形的性质可得 $OM = \frac{1}{2}DF$ ，如图所示，在 AB 延长线上截取 $BH = BG$ ，连接 FH ，易证明 $\triangle FBG \cong \triangle FBH$ (SAS)，则 $FH = FG$ ，可得当 H, D, F 三点共线时， $DF + HF$ 有最小值，即此时 $OM + \frac{1}{2}FG$ 有最小值，最小值即为 DH 的长的一半，求出 $AH = 8$ ，在 $\text{Rt}\triangle ADH$ 中，由勾股定理得 $DH = \sqrt{AD^2 + AH^2} = 10$ ，责任 $OM + \frac{1}{2}FG$ 的最小值为 5.

【详解】 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，
 $\therefore AD = AB, \angle DAB = \angle ABC = 90^\circ$ ，
 又 $\because AE = BF$ ，
 $\therefore \triangle ADE \cong \triangle BAF$ (SAS)，
 $\therefore \angle ADE = \angle BAF$ ，
 $\therefore \angle DOF = \angle ADO + \angle DAO = \angle BAF + \angle DAO = \angle DAB = 90^\circ$ ，
 $\because$ 点 M 是 DF 的中点，
 $\therefore OM = \frac{1}{2}DF$ ；

如图所示，在 AB 延长线上截取 $BH = BG$ ，连接 FH ，



$\because \angle FBG = \angle FBH = 90^\circ, FB = FB, BG = BH$ ，
 $\therefore \triangle FBG \cong \triangle FBH$ (SAS)，
 $\therefore FH = FG$ ，
 $\therefore OM + \frac{1}{2}FG = \frac{1}{2}DF + \frac{1}{2}HF = \frac{1}{2}(DF + HF)$ ，
 $\therefore$ 当 H, D, F 三点共线时， $DF + HF$ 有最小值，即此时 $OM + \frac{1}{2}FG$ 有最小值，最小值即为 DH 的长的一半，

$$\because AG = 2GB, AB = 6,$$

$$\therefore BH = BG = 2,$$

$$\therefore AH = 8,$$

在 $\text{Rt}\triangle ADH$ 中，由勾股定理得 $DH = \sqrt{AD^2 + AH^2} = 10$,

$$\therefore OM + \frac{1}{2}FG \text{ 的最小值为 } 5,$$

故选：B.

第 II 卷 (非选择题 共 84 分)

注意事项：用 0.5 毫米黑色墨迹签字笔在答题卡上对应题号位置作答，在试卷上作答无效.

二、填空题 (本大题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分).

13. 函数 $y = \sqrt{x+2}$ 中，自变量 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq -2$

【解析】

【详解】解： $\because \sqrt{x+2}$ 在实数范围内有意义，

$$\therefore x+2 \geq 0,$$

$$\therefore x \geq -2,$$

故答案为 $x \geq -2$.

14. 在一个不透明的盒子中装有 6 个白球，若干个黄球，它们除颜色不同外，其余均相同. 若从中随机摸出一个球是白球的概率是 $\frac{2}{3}$ ，则黄球的个数为_____.

【答案】 3

【解析】

【分析】此题考查了分式方程的应用，以及概率公式的应用. 设黄球的个数为 x 个，然后根据概率公式列方程，解此分式方程即可求得答案.

【详解】解：设黄球的个数为 x 个，

$$\text{根据题意得：} \frac{6}{x+6} = \frac{2}{3},$$

$$\text{解得：} x = 3,$$

经检验， $x = 3$ 是原分式方程的解，

$\therefore$ 黄球的个数为 3 个.

故答案为：3.

15. 已知 x_1, x_2 是一元二次方程 $x^2 - 3x - 5 = 0$ 的两个实数根，则 $(x_1 - x_2)^2 + 3x_1x_2$ 的值是_____.

【答案】 14

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程根与系数的关系，完全平方公式的变形求值. 对于一元二次方程，

若该方程的两个实数根为 x_1, x_2 ，则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. 先根据根与系数的关系得到 $x_1 + x_2 = 3$ ， $x_1 x_2 = -5$ ，再根据完全平方公式的变形 $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 = 9$ ，求出 $(x_1 - x_2)^2 = 29$ ，由此即可得到答案.【详解】 解： $\because x_1, x_2$ 是一元二次方程 $x^2 - 3x - 5 = 0$ 的两个实数根，

$$\therefore x_1 + x_2 = 3, \quad x_1 x_2 = -5,$$

$$\therefore (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 = 9,$$

$$\therefore (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 = 9 - 4x_1 x_2 = 9 + 20 = 29,$$

$$\therefore (x_1 - x_2)^2 + 3x_1 x_2 = 29 + 3 \times (-5) = 14.$$

故答案为： 14.

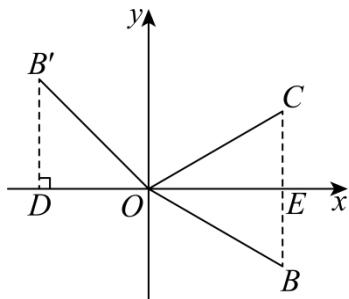
16. 定义：在平面直角坐标系中，将一个图形先向上平移 a ($a > 0$) 个单位，再绕原点按逆时针方向旋转 θ 角度，这样的图形运动叫做图形的 $\rho(a, \theta)$ 变换. 如：点 $A(2, 0)$ 按照 $\rho(1, 90^\circ)$ 变换后得到点 A' 的坐标为 $(-1, 2)$ ，则点 $B(\sqrt{3}, -1)$ 按照 $\rho(2, 105^\circ)$ 变换后得到点 B' 的坐标为_____.

【答案】 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

【解析】

【分析】 本题考查了解直角三角形，坐标与图形. 根据题意，点 $B(\sqrt{3}, -1)$ 向上平移 2 个单位，得到点 $C(\sqrt{3}, 1)$ ，再根据题意将点 $C(\sqrt{3}, 1)$ 绕原点按逆时针方向旋转 105° ，得到 $OB' = OC = 2$ ， $\angle B'OD = 45^\circ$ ，据此求解即可.

【详解】 解：根据题意，点 $B(\sqrt{3}, -1)$ 向上平移 2 个单位，得到点 $C(\sqrt{3}, 1)$ ，



$$\therefore CE=1, \quad OE=\sqrt{3},$$

$$\therefore OC=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2, \quad \sin \angle COE=\frac{CE}{OC}=\frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle COE=30^\circ,$$

根据题意，将点 $C(\sqrt{3}, 1)$ 绕原点按逆时针方向旋转 105° ，

$$\therefore \angle B'OE=105^\circ+30^\circ=135^\circ,$$

作 $B'D \perp x$ 轴于点 D ，

$$\therefore OB'=OC=2, \quad \angle B'OD=180^\circ-135^\circ=45^\circ,$$

$$\therefore B'D=OD=OB' \cdot \sin 45^\circ=\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{点 } B' \text{ 的坐标为 } (-\sqrt{2}, \sqrt{2}),$$

故答案为： $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

三、本大题共 3 个小题，每小题 6 分，共 18 分.

$$17. \text{ 计算: } |-\sqrt{3}|+(\pi-2024)^0-2\sin 60^\circ+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}.$$

【答案】 3

【解析】

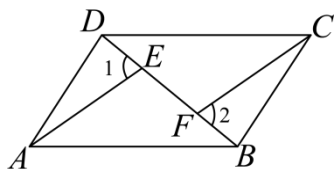
【分析】 本题考查了实数的运算，绝对值，零指数幂，负整数指数幂，特殊角的三角函数值，二次根式的加减运算，准确熟练地进行计算是解题的关键. 先化简各式，然后再进行加减计算即可解答.

$$\text{【详解】 解: 原式}=\sqrt{3}+1-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+2,$$

$$=\sqrt{3}-\sqrt{3}+3,$$

$$=3.$$

18. 如图，在 $ABCD$ 中， E, F 是对角线 BD 上的点，且 $DE=BF$. 求证: $\angle 1=\angle 2$.



【答案】证明见解析

【解析】

【分析】本题主要考查了平行四边形的性质，全等三角形的性质与判定，先由平行四边形的性质得到 $AD = CB$, $AD \parallel CB$, 则 $\angle ADE = \angle CBF$, 再证明 $\triangle ADE \cong \triangle CBF$ (SAS), 即可证明 $\angle 1 = \angle 2$.

【详解】证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD = CB$, $AD \parallel CB$,

$\therefore \angle ADE = \angle CBF$,

又 $\because DE = BF$,

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CBF$ (SAS),

$\therefore \angle 1 = \angle 2$.

19. 化简: $\left(\frac{y^2}{x} + x - 2y\right) \div \frac{x^2 - y^2}{x}$.

【答案】 $\frac{x-y}{x+y}$

【解析】

【分析】本题考查了分式的混合运算，熟练掌握运算是解题的关键.

先将括号里的通分，再将除法转化为乘法，然后根据完全平方公式和平方差公式整理，最后约分即可得出答案.

$$\begin{aligned}
 \text{【详解】解: } & \left(\frac{y^2}{x} + x - 2y\right) \div \frac{x^2 - y^2}{x} \\
 &= \frac{y^2 + x^2 - 2xy}{x} \cdot \frac{x}{x^2 - y^2} \\
 &= \frac{(x-y)^2}{x} \cdot \frac{x}{(x+y)(x-y)} \\
 &= \frac{x-y}{x+y}
 \end{aligned}$$

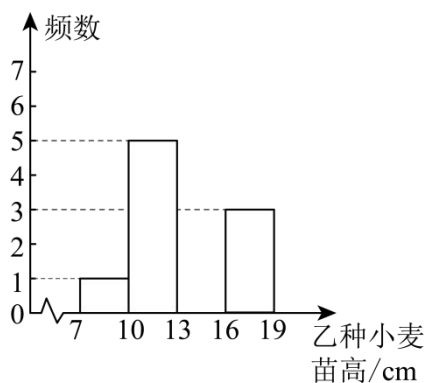
四、本大题共 2 个小题，每小题 7 分，共 14 分.

20. 某地两块试验田中分别栽种了甲、乙两种小麦，为了考察这两种小麦的长势，分别从中随机抽取 16 株麦苗，测得苗高（单位： cm ）如下表.

甲	7	8	10	11	11	12	13	13	14	14	14	14	15	16	16	18
乙	7	10	13	11	18	12	13	13	10	13	13	14	15	16	11	17

将数据整理分析，并绘制成以下不完整的统计表格和频数分布直方图.

苗高分组	甲种小麦的频数
$7 \leq x < 10$	a
$10 \leq x < 13$	b
$13 \leq x < 16$	7
$16 \leq x < 19$	3



小 麦 种类 统计量	甲	乙
平均数	12.875	12.875
众数	14	d
中位数	c	13
方差	8.65	7.85

根据所给出的信息，解决下列问题:

- $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$, 并补全乙种小麦的频数分布直方图;
- $c = \underline{\hspace{2cm}}$, $d = \underline{\hspace{2cm}}$;

(3) 甲、乙两种小麦的苗高长势比较整齐的是_____ (填甲或乙); 若从栽种乙种小麦的试验田中随机抽取 1200 株, 试估计苗高在 $10 \leq x < 13$ (单位: cm) 的株数.

【答案】(1) 2, 4, 乙种小麦的频数分布直方图见解析;

(2) 13, 13.5;

(3) 乙, 375.

【解析】

【分析】本题考查的是数据的整理, 画频数分布直方图, 众数和中位数的定义, 根据方差作决策, 用样本估计总体. 读懂统计图, 从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键.

(1) 根据题中数据和频数分布直方图的, 即可直接得到 a 、 b , 以及乙种小麦 $13 \leq x < 16$ 的株数, 再画出频数分布直方图, 即可解题;

(2) 根据众数和中位数的概念, 即可解题;

(3) 可根据方差的意义作出判断, 根据统计表和统计图得到乙种小麦苗高在 $10 \leq x < 13$ 的所占比, 再利用总数乘以其所占比, 即可解题.

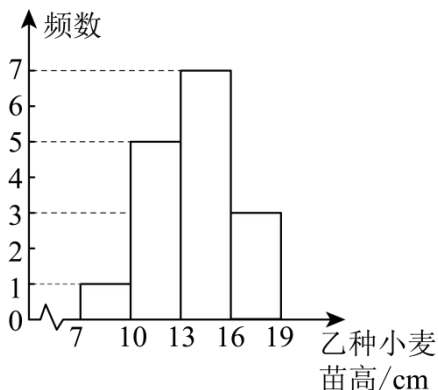
【小问 1 详解】

解: 由表可知: 甲种小麦苗高在 $7 \leq x < 10$ 的有 7、8, 故 $a = 2$;

甲种小麦苗高在 $10 \leq x < 13$ 的有 10、11、11、12, 故 $b = 4$,

$16 - 1 - 5 - 3 = 7$ (株),

补全后的乙种小麦的频数分布直方图如下:



故答案为: 2, 4;

【小问 2 详解】

解: 由表可知: 乙种小麦苗高 13cm 最多, 为 5 次, 故 $d = 13$;

将甲种小麦苗高从小到大排列得 7、8、10、11、11、12、13、13、14、14、14、14、15、16、16、18, 故

中位数为 $\frac{13+14}{2} = 13.5$, 即 $c = 13.5$;

故答案为: 13.5, 13;

【小问 3 详解】

解：∵乙种小麦方差 $7.85 <$ 甲种小麦方差 8.65 ,

∴甲、乙两种小麦的苗高长势比较整齐的是乙，

由题可知：乙种小麦随机抽取 16 株麦苗中苗高在 $10 \leq x < 13$ 有 5 株，

∴若从栽种乙种小麦的试验田中随机抽取 1200 株，苗高在 $10 \leq x < 13$ 的株数为：

$$1200 \times \frac{5}{16} = 375 \text{ (株)}.$$

21. 某商场购进 A , B 两种商品，已知购进 3 件 A 商品比购进 4 件 B 商品费用多 60 元；购进 5 件 A 商品和 2 件 B 商品总费用为 620 元.

(1) 求 A , B 两种商品每件进价各为多少元？

(2) 该商场计划购进 A , B 两种商品共 60 件，且购进 B 商品的件数不少于 A 商品件数的 2 倍. 若 A 商品按每件 150 元销售， B 商品按每件 80 元销售，为满足销售完 A , B 两种商品后获得的总利润不低于 1770 元，则购进 A 商品的件数最多为多少？

【答案】(1) A , B 两种商品每件进价各为 100 元，60 元；

(2) 购进 A 商品的件数最多为 20 件

【解析】

【分析】本题主要考查了二元一次方程组的实际应用，一元一次不等式组的实际应用：

(1) 设 A , B 两种商品每件进价各为 x 元， y 元，根据购进 3 件 A 商品比购进 4 件 B 商品费用多 60 元；购进 5 件 A 商品和 2 件 B 商品总费用为 620 元列出方程组求解即可；

(2) 设购进 A 商品的件数为 m 件，则购进 B 商品的件数为 $(60-m)$ 件，根据利润不低于 1770 元且购进 B 商品的件数不少于 A 商品件数的 2 倍列出不等式组求解即可.

【小问 1 详解】

解：设 A , B 两种商品每件进价各为 x 元， y 元，

$$\text{由题意得, } \begin{cases} 3x - 4y = 60 \\ 5x + 2y = 620 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = 100 \\ y = 60 \end{cases},$$

答： A , B 两种商品每件进价各为 100 元，60 元；

【小问 2 详解】

解：设购进 A 商品的件数为 m 件，则购进 B 商品的件数为 $(60-m)$ 件，

由题意得,
$$\begin{cases} (150-100)m + (80-60)(60-m) \geq 1770 \\ 60-m \geq 2m \end{cases},$$

解得 $19 \leq m \leq 20$,

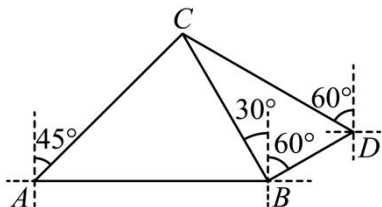
$\therefore m$ 为整数,

$\therefore m$ 的最大值为 20,

答: 购进 A 商品的件数最多为 20 件.

五、本大题共 2 小题, 每小题 8 分, 共 16 分.

22. 如图, 海中有一个小岛 C, 某渔船在海中的 A 点测得小岛 C 位于东北方向上, 该渔船由西向东航行一段时间后到达 B 点, 测得小岛 C 位于北偏西 30° 方向上, 再沿北偏东 60° 方向继续航行一段时间后到达 D 点, 这时测得小岛 C 位于北偏西 60° 方向上. 已知 A, C 相距 30n mile . 求 C, D 间的距离 (计算过程中的数据不取近似值).

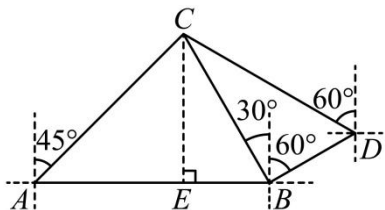


【答案】 C, D 间的距离为 $20\sqrt{2}\text{n mile}$.

【解析】

【分析】 本题考查了解直角三角形的应用. 作 $CE \perp AB$ 于点 E, 利用方向角的定义求得 $\angle CAE = 45^\circ$, $\angle ECB = 30^\circ$, $\angle ECD = 60^\circ$, 证明 $\triangle CAE$ 是等腰直角三角形, 在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 中, 求得 BC 的长, 再证明 $\angle CBD = 90^\circ$, $\angle DCB = 30^\circ$, 在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, 利用三角函数的定义即可求解.

【详解】 解: 作 $CE \perp AB$ 于点 E,



由题意得 $\angle CAE = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$, $\angle ECB = 30^\circ$, $\angle ECD = 60^\circ$,

$\therefore \triangle CAE$ 是等腰直角三角形,

$\therefore AC = 30$,

$\therefore AE = CE = AC \cdot \cos 45^\circ = 15\sqrt{2}$,

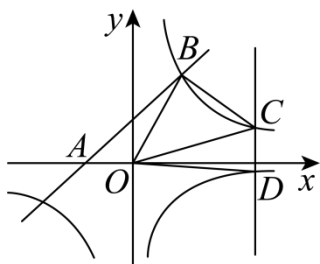
在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 中, $BC = \frac{CE}{\cos 30^\circ} = 10\sqrt{6}$,

在 $\triangle BCD$ 中, $\angle CBD = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$, $\angle DCB = \angle ECD - \angle ECB = 30^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $CD = \frac{BC}{\cos 30^\circ} = 20\sqrt{2} \text{ (n mile)}$,

答: C, D 间的距离为 $20\sqrt{2} \text{ n mile}$.

23. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 一次函数 $y = kx + b$ 与 x 轴相交于点 $A(-2, 0)$, 与反比例函数 $y = \frac{a}{x}$ 的图象相交于点 $B(2, 3)$.



(1) 求一次函数和反比例函数的解析式;

(2) 直线 $x = m (m > 2)$ 与反比例函数 $y = \frac{a}{x} (x > 0)$ 和 $y = -\frac{2}{x} (x > 0)$ 的图象分别交于点 C, D , 且

$S_{\triangle OBC} = 2S_{\triangle OCD}$, 求点 C 的坐标.

【答案】 (1) 一次函数解析式为 $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$, 反比例函数解析式为 $y = \frac{6}{x}$

(2) $C(6, 1)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数与反比例函数综合, 反比例函数与几何综合:

(1) 利用待定系数法求解即可;

(2) 先利用反比例函数比例系数的几何意义得到 $S_{\triangle COF} = 3$, $S_{\triangle ODF} = 1$, 进而得到 $S_{\triangle OBC} = 2S_{\triangle OCD} = 8$;

再证明 $S_{\triangle OBE} = S_{\triangle COF} = 3$, 推出 $S_{\text{梯形} BEFC} = S_{\triangle BOC} = 8$, 设 $C\left(m, \frac{6}{m}\right)$, 则 $OF = m$, $CF = \frac{6}{m}$, 求出

$OF = m - 2$, 可得 $\frac{3 + \frac{6}{m}}{2} \cdot (m - 2) = 8$, 解方程即可得到答案.

【小问 1 详解】

解: 把 $B(2, 3)$ 代入 $y = \frac{a}{x}$ 中得: $3 = \frac{a}{2}$, 解得 $a = 6$,

$\therefore$ 反比例函数解析式为 $y = \frac{6}{x}$;

把 $A(-2, 0)$, $B(2, 3)$ 代入 $y = kx + b$ 中得: $\begin{cases} -2k + b = 0 \\ 2k + b = 3 \end{cases}$,

$$\therefore \begin{cases} k = \frac{3}{4} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases},$$

$\therefore$ 一次函数解析式为 $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$;

【小问 2 详解】

解：如图所示，过点 B 作 $BE \perp x$ 轴于 E ，设 CD 与 x 轴交于 F ，

$\therefore$ 直线 $x = m$ ($m > 2$) 与反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ ($x > 0$) 和 $y = -\frac{2}{x}$ ($x > 0$) 的图象分别交于点 C , D ,

$$\therefore S_{\triangle COF} = \frac{1}{2} \times 6 = 3, \quad S_{\triangle DOF} = \frac{1}{2} \times |-2| = 1,$$

$$\therefore S_{\triangle COD} = S_{\triangle COF} + S_{\triangle DOF} = 4,$$

$$\therefore S_{\triangle OBC} = 2S_{\triangle OCD} = 8;$$

$\therefore BE \perp x$ 轴，点 B 在反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ ($x > 0$) 的图象上，

$$\therefore S_{\triangle OBE} = S_{\triangle COF} = 3,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}OBCF} = S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COF} = S_{\triangle BOE} + S_{\text{梯形}BEFC},$$

$$\therefore S_{\text{梯形}BEFC} = S_{\triangle BOC} = 8,$$

设 $C\left(m, \frac{6}{m}\right)$ ，则 $OF = m$, $CF = \frac{6}{m}$,

$$\therefore B(2, 3),$$

$$\therefore OE = 2, \quad BE = 3,$$

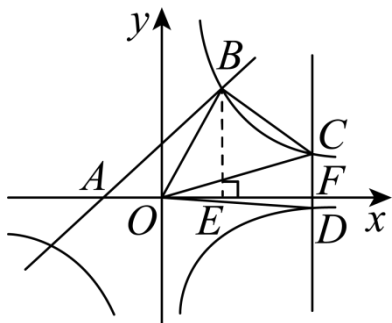
$$\therefore OF = m - 2,$$

$$\therefore \frac{3 + \frac{6}{m}}{2} \cdot (m - 2) = 8,$$

解得 $m = 6$ 或 $m = -\frac{2}{3}$ (舍去),

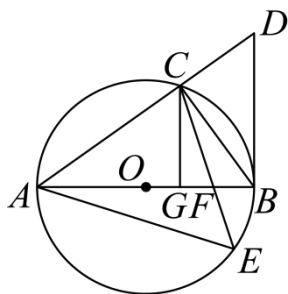
经检验 $m = 6$ 是原方程的解，且符合题意，

$$\therefore C(6, 1).$$



六、本大题共 2 个小题，每小题 12 分，共 24 分。

24. 如图, $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形, AB 是 $\odot O$ 的直径, 过点 B 作 $\odot O$ 的切线与 AC 的延长线交于点 D , 点 E 在 $\odot O$ 上, $AC = CE$, CE 交 AB 于点 F .



- (1) 求证: $\angle CAE = \angle D$;
- (2) 过点 C 作 $CG \perp AB$ 于点 G , 若 $OA = 3$, $BD = 3\sqrt{2}$, 求 FG 的长.

【答案】(1) 证明见解析

(2) $\frac{4}{5}$

【解析】

【分析】(1) 由直径所对的圆周角是直角得到 $\angle BCD = 90^\circ$ ，则 $\angle D + \angle CBD = 90^\circ$ ，由切线的性质推出 $\angle ABC + \angle CBD = 90^\circ$ ，则 $\angle ABC = \angle D$ ，再由同弧所对的圆周角相等和等边对等角得到 $\angle E = \angle ABC$ ， $\angle CAE = \angle E$ ，据此即可证明 $\angle CAE = \angle D$ ；

(2) 由勾股定理得 $AD = 3\sqrt{6}$, 利用等面积法求出 $BC = 2\sqrt{3}$, 则 $AC = 2\sqrt{6}$, 同理可得 $CG = 2\sqrt{2}$, 则 $AG = 4$, 进而得到 $BG = 2$; 如图所示, 过点 C 作 $CH \perp AE$ 于 H , 则 $AE = 2AH$, 证明 $\triangle ACB \sim \triangle CHA$, 求出 $AH = 2\sqrt{2}$, 则 $AE = 4\sqrt{2}$; 设 $FG = x$, 则 $AF = 4 + x$, 证明 $\triangle AEF \sim \triangle CBF$, 推出

$CF = \frac{4\sqrt{6} + \sqrt{6}x}{4}$, 在 $\text{Rt}\triangle CGF$ 中, 由勾股定理得 $\left(\frac{4\sqrt{6} + \sqrt{6}x}{4}\right)^2 = (2\sqrt{2})^2 + x^2$, 解方程即可得到答案.

【小问 1 详解】

证明: $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle D + \angle CBD = 90^\circ;$$

$\therefore BD$ 是 $\odot O$ 的切线,

$$\therefore \angle ABD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle CBD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle D,$$

$$\therefore \overline{AC} = AC,$$

$$\therefore \angle E = \angle ABC,$$

$$\therefore AC = CE,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle E,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle D;$$

【小问 2 详解】

解: $\because OA=3$,

$$\therefore AB = 2OA = 6,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, 由勾股定理得 $AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = \sqrt{6^2 + (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{6}$,

$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot BD = \frac{1}{2} AD \cdot BC,$$

$$\therefore BC = \frac{AB \cdot BD}{AD} = \frac{6 \times 3\sqrt{2}}{3\sqrt{6}} = 2\sqrt{3},$$

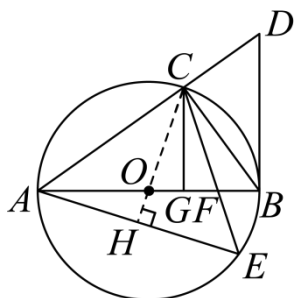
$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{6} ,$$

同理可得 $CG = 2\sqrt{2}$,

$$\therefore AG = \sqrt{AC^2 - CG^2} = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 - (2\sqrt{2})^2} = 4,$$

$$\therefore BG = 2;$$

如图所示，过点 C 作 $CH \perp AE$ 于 H ，则 $AE = 2AH$ ，



由 (1) 可得 $\angle ABC = \angle CAH$, $\angle ACB = \angle CHA = 90^\circ$,

$$\therefore \triangle ACB \sim \triangle CHA,$$

$$\therefore \frac{AH}{BC} = \frac{AC}{AB}, \text{ 即 } \frac{AH}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{6},$$

$$\therefore AH = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore AE = 4\sqrt{2};$$

设 $FG = x$, 则 $AF = 4 + x$,

$$\because \angle E = \angle CBF, \angle EAF = \angle BCF,$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle CBF,$$

$$\therefore \frac{CF}{AF} = \frac{BC}{AE}, \text{ 即 } \frac{CF}{4+x} = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},$$

$$\therefore CF = \frac{4\sqrt{6} + \sqrt{6}x}{4},$$

在 $\text{Rt}\triangle CGF$ 中, 由勾股定理得 $CF^2 = CG^2 + FG^2$,

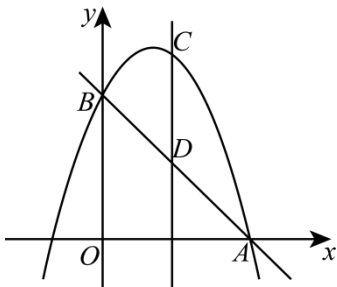
$$\therefore \left(\frac{4\sqrt{6} + \sqrt{6}x}{4} \right)^2 = (2\sqrt{2})^2 + x^2,$$

解得 $x = \frac{4}{5}$ 或 $x = 4$ (舍去),

$$\therefore FG = \frac{4}{5}.$$

【点睛】本题主要考查了切线的性质, 相似三角形的性质与判定, 勾股定理, 同弧所对的圆周角相等, 直径所对的圆周角是直角, 等腰三角形的性质等等, 正确作出辅助线构造直角三角形和相似三角形是解题的关键.

25. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 经过点 $A(3, 0)$, 与 y 轴交于点 B , 且关于直线 $x = 1$ 对称.



(1) 求该抛物线的解析式;

(2) 当 $-1 \leq x \leq t$ 时, y 的取值范围是 $0 \leq y \leq 2t - 1$, 求 t 的值;

(3) 点 C 是抛物线上位于第一象限的一个动点，过点 C 作 x 轴的垂线交直线 AB 于点 D ，在 y 轴上是否存在点 E ，使得以 B, C, D, E 为顶点的四边形是菱形？若存在，求出该菱形的边长；若不存在，说明理由。

【答案】(1) $y = -x^2 + 2x + 3$

$$(2) t = \frac{5}{2}$$

(3) 存在点以 B, C, D, E 为顶点的四边形是菱形，边长为 $3\sqrt{2} - 2$ 或 2

【解析】

【分析】本题考查二次函数的综合应用，菱形的性质，正确的求出函数解析式，利用数形结合和分类讨论的思想进行求解，是解题的关键。

(1) 待定系数法求出函数解析式即可；

(2) 分 $t \leq 1$ 和 $t > 1$ ，两种情况，结合二次函数的增减性进行求解即可。

(3) 分 BD 为菱形的边和菱形的对角线两种情况进行讨论求解即可。

【小问 1 详解】

解：∵ 抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 经过点 $A(3, 0)$ ，与 y 轴交于点 B ，且关于直线 $x = 1$ 对称，

$$\therefore \begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ 9a + 3b + 3 = 0 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases},$$

$$\therefore y = -x^2 + 2x + 3;$$

【小问 2 详解】

∵ 抛物线的开口向下，对称轴为直线 $x = 1$ ，

∴ 抛物线上点到对称轴上的距离越远，函数值越小，

$$\therefore -1 \leq x \leq t \text{ 时}, 0 \leq y \leq 2t - 1,$$

① 当 $t \leq 1$ 时，则：当 $x = t$ 时，函数有最大值，即： $2t - 1 = -t^2 + 2t + 3$ ，

解得： $t = -2$ 或 $t = 2$ ，均不符合题意，舍去；

② 当 $t > 1$ 时，则：当 $x = 1$ 时，函数有最大值，即： $2t - 1 = -1^2 + 2 + 3 = 4$ ，

$$\text{解得: } t = \frac{5}{2};$$

$$\text{故 } t = \frac{5}{2};$$

【小问 3 详解】

存在；

当 $y = -x^2 + 2x + 3 = 0$ 时，解得： $x_1 = 3, x_2 = -1$ ，当 $x = 0$ 时， $y = 3$ ，

$\therefore A(3, 0), B(0, 3)$ ，

设直线 AB 的解析式为 $y = kx + 3$ ，把 $A(3, 0)$ 代入，得： $k = -1$ ，

$\therefore y = -x + 3$ ，

设 $C(m, -m^2 + 2m + 3) (0 < m < 3)$ ，则： $D(m, -m + 3)$ ，

$\therefore CD = -m^2 + 2m + 3 + m - 3 = -m^2 + 3m$ ， $BD = \sqrt{m^2 + (-m + 3 - 3)^2} = \sqrt{2}m$ ，

$BC^2 = m^2 + (-m^2 + 2m)^2$ ，

当 B, C, D, E 为顶点的四边形是菱形时，分两种情况：

①当 BD 为边时，则： $BD = CD$ ，即 $-\sqrt{2}m = -m^2 + 3m$ ，

解得： $m = 0$ （舍去）或 $m = 3 - \sqrt{2}$ ，

此时菱形的边长为 $\sqrt{2}m = 3\sqrt{2} - 2$ ；

②当 BD 为对角线时，则： $BC = CD$ ，即： $m^2 + (-m^2 + 2m)^2 = (-m^2 + 3m)^2$ ，

解得： $m = 2$ 或 $m = 0$ （舍去）

此时菱形的边长为： $-2^2 + 3 \times 2 = 2$ ；

综上：存在以 B, C, D, E 为顶点的四边形是菱形，边长为 $3\sqrt{2} - 2$ 或 2 。