

2024 年四川省成都市中考数学

A 卷 (共 100 分)

第 I 卷 (选择题, 共 32 分)

一、选择题 (本大题共 8 个小题, 每小题 4 分, 共 32 分, 每小题均有四个选项, 其中只有一项符合题目要求)

1. -5 的绝对值是 ()

- A. 5 B. -5 C. $-\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{5}$

【答案】A

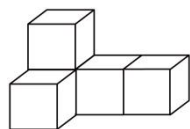
【解析】

【分析】根据负数的绝对值等于它的相反数可得答案.

【详解】解: $|-5|=5$.

故选 A.

2. 如图所示的几何体是由 5 个大小相同的小立方块搭成, 它的主视图是 ()



- A. B. C. D.

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查简单几何体的三视图, 根据主视图是从正面看到的图形求解即可.

【详解】解: 该几何体的主视图为 ,

故选: A.

3. 下列计算正确的是 ()

- A. $(3x)^2 = 3x^2$ B. $3x + 3y = 6xy$
C. $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ D. $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了积的乘方运算，同类项的合并，完全平方公式以及平方差公式，根据积的乘方运算法则，同类项的合并法则以及完全平方公式以及平方差公式一一计算判断即可.

【详解】解：A. $(3x)^2 = 9x^2$ ，原计算错误，故该选项不符合题意；

B. $3x$ 和 $3y$ 不是同类项，不能合并，故该选项不符合题意；

C. $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ ，原计算错误，故该选项不符合题意；

D. $(x+2)(x-2) = x^2 - 4$ ，原计算正确，故该选项符合题意；

故选：D.

4. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $P(1, -4)$ 关于原点对称的点的坐标是 ()

A. $(-1, -4)$

B. $(-1, 4)$

C. $(1, 4)$

D. $(1, -4)$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了求关于原点对称的点的坐标. 关于原点对称的两点，则其横、纵坐标互为相反数，由点关于原点对称的坐标特征即可求得对称点的坐标.

【详解】解：点 $P(1, -4)$ 关于原点对称的点的坐标为 $(-1, 4)$ ；

故选：B.

5. 为深入贯彻落实《中共中央、国务院关于学习运用“千村示范、万村整治”工程经验有力有效推进乡村全面振兴的意见》精神，某镇组织开展“村BA”、村超、村晚等群众文化赛事活动，其中参赛的六个村得分分别为：55，64，51，50，61，55，则这组数据的中位数是 ()

A. 53

B. 55

C. 58

D. 64

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了中位数的定义，根据中位数的定义求解即可.

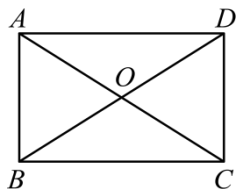
【详解】解：参赛的六个村得分分别为：55，64，51，50，61，55，

把这6个数从小到大排序：50，51，55，55，61，64，

∴这组数据的中位数是： $\frac{55+55}{2} = 55$ ，

故选：B.

6. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，则下列结论一定正确的是 ()



- A. $AB = AD$ B. $AC \perp BD$ C. $AC = BD$ D. $\angle ACB = \angle ACD$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查矩形的性质，根据矩形的性质逐项判断即可。

【详解】解：∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $AB = CD$ ， $AC = BD$ ， $AD \parallel BC$ ，则 $\angle ACB = \angle DAC$ ，

∴ 选项 A 中 $AB = AD$ 不一定正确，故不符合题意；

选项 B 中 $AC \perp BD$ 不一定正确，故不符合题意；

选项 C 中 $AC = BD$ 一定正确，故符合题意；

选项 D 中 $\angle ACB = \angle ACD$ 不一定正确，故不符合题意，

故选：C。

7. 中国古代数学著作《九章算术》中记载了这样一个题目：今有共买璊，人出半，盈四；人出少半，不足三。问人数，璊价各几何？其大意是：今有人合伙买璊石，每人出 $\frac{1}{2}$ 钱，会多出 4 钱；每人出 $\frac{1}{3}$ 钱，又差了 3 钱。问人数，璊价各是多少？设人数为 x ，璊价为 y ，则可列方程组为（ ）

- A. $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 4 \\ y = \frac{1}{3}x + 3 \end{cases}$ B. $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 4 \\ y = \frac{1}{3}x + 3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 4 \\ y = \frac{1}{3}x - 3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 4 \\ y = \frac{1}{3}x - 3 \end{cases}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了列二元一次方程组，根据题意列出二元一次方程组即可。

【详解】解：设人数为 x ，璊价为 y ，

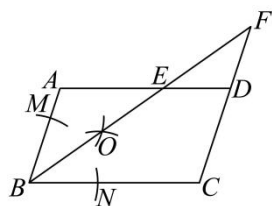
根据每人出 $\frac{1}{2}$ 钱，会多出 4 钱可得出 $y = \frac{1}{2}x - 4$ ，

每人出 $\frac{1}{3}$ 钱，又差了 3 钱。可得出 $y = \frac{1}{3}x + 3$ ，

则方程组为：
$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 4 \\ y = \frac{1}{3}x + 3 \end{cases},$$

故选：B.

8. 如图，在 $ABCD$ 中，按以下步骤作图：①以点 B 为圆心，以适当长为半径作弧，分别交 BA ， BC 于点 M ， N ；②分别以 M ， N 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径作弧，两弧在 $\angle ABC$ 内交于点 O ；③作射线 BO ，交 AD 于点 E ，交 CD 延长线于点 F ．若 $CD = 3$ ， $DE = 2$ ，下列结论错误的是（ ）



A. $\angle ABE = \angle CBE$

B. $BC = 5$

C. $DE = DF$

D. $\frac{BE}{EF} = \frac{5}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查角平分线的尺规作图、平行四边形的性质、等腰三角形的判定以及相似性质与判定的综合．先由作图得到 BF 为 $\angle ABC$ 的角平分，利用平行线证明 $\angle AEB = \angle ABE$ ，从而得到 $AE = AB = CD = 3$ ，再利用平行四边形的性质得到 $BC = AD = AE + ED = 3 + 2 = 5$ ，再证明 $\triangle AEB \sim \triangle DEF$ ，分别求出 $\frac{BE}{EF} = \frac{3}{2}$ ， $DF = 2$ ，则各选项可以判定．

【详解】解：由作图可知， BF 为 $\angle ABC$ 的角平分，

$\therefore \angle ABE = \angle CBE$ ，故 A 正确；

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore AD = BC, AB = CD, AD \parallel BC$ ，

$\because AD \parallel BC$

$\therefore \angle AEB = \angle CBE$ ，

$\therefore \angle AEB = \angle ABE$ ，

$\therefore AE = AB = CD = 3$ ，

$\therefore BC = AD = AE + ED = 3 + 2 = 5$ ，故 B 正确；

$\therefore AB = CD$ ，

$$\therefore \angle ABE = \angle F,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle DEF,$$

$$\therefore \triangle AEB \sim \triangle DEF,$$

$$\therefore \frac{BE}{EF} = \frac{AB}{DF} = \frac{AE}{ED},$$

$$\therefore \frac{BE}{EF} = \frac{3}{DF} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \frac{BE}{EF} = \frac{3}{2}, \quad DF = 2, \text{ 故 D 错误;}$$

$$\therefore DE = 2,$$

$$\therefore DE = DF, \text{ 故 C 正确,}$$

故选：D.

第 II 卷（非选择题，共 68 分）

二、填空题（本大题共 5 个小题，每小题 4 分，共 20 分）

9. 若 m, n 为实数，且 $(m+4)^2 + \sqrt{n-5} = 0$ ，则 $(m+n)^2$ 的值为_____.

【答案】1

【解析】

【分析】本题考查非负数的性质，根据平方式和算术平方数的非负数求得 m, n 值，进而代值求解即可.

【详解】解： $\because (m+4)^2 + \sqrt{n-5} = 0$,

$$\therefore m+4=0, \quad n-5=0,$$

解得 $m=-4, \quad n=5$,

$$\therefore (m+n)^2 = (-4+5)^2 = 1,$$

故答案为：1.

10. 分式方程 $\frac{1}{x-2} = \frac{3}{x}$ 的解是_____.

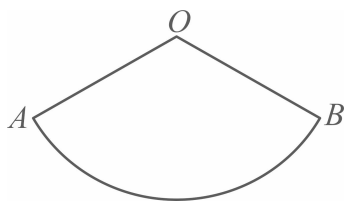
【答案】x=3

【解析】

【详解】试题分析：分式方程去分母转化为整式方程 $x=3(x-2)$ ，求出整式方程的解得到 $x=3$ ，经检验 $x=3$ 是分式方程的解，即可得到分式方程的解.

考点：解分式方程

11. 如图，在扇形 AOB 中， $OA=6$ ， $\angle AOB=120^\circ$ ，则 $\widehat{AB}$ 的长为_____.



【答案】 4π

【解析】

【分析】 此题考查了弧长公式，把已知数据代入弧长公式计算即可.

【详解】 解：由题意得 $\widehat{AB}$ 的长为

$$\frac{n\pi r}{180} = \frac{120\pi \times 6}{180} = 4\pi,$$

故答案为： 4π

12. 盒中有 x 枚黑棋和 y 枚白棋，这些棋除颜色外无其他差别. 从盒中随机取出一枚棋子，如果它是黑棋的概率是 $\frac{3}{8}$ ，则 $\frac{x}{y}$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{3}{5}$

【解析】

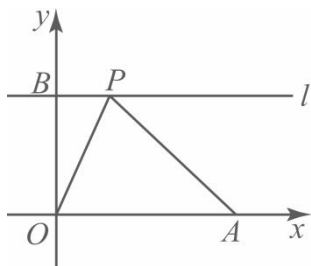
【分析】 本题考查简单的概率计算、比例性质，根据随机取出一枚棋子，它是黑棋的概率是 $\frac{3}{8}$ ，可得 $\frac{x}{x+y} = \frac{3}{8}$ ，进而利用比例性质求解即可.

【详解】 解： $\because$ 随机取出一枚棋子，它是黑棋的概率是 $\frac{3}{8}$ ，

$$\therefore \frac{x}{x+y} = \frac{3}{8}, \text{ 则 } \frac{x}{y} = \frac{3}{5},$$

故答案为： $\frac{3}{5}$.

13. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知 $A(3,0)$ ， $B(0,2)$ ，过点 B 作 y 轴的垂线 l ， P 为直线 l 上一动点，连接 PO ， PA ，则 $PO+PA$ 的最小值为_____.



【答案】 5

【解析】

【分析】本题考查轴对称—最短问题以及勾股定理和轴对称图形的性质. 先取点 A 关于直线 l 的对称点 A' , 连 $A'O$ 交直线 l 于点 C , 连 AC , 得到 $AC = A'C$, $A'A \perp l$, 再由轴对称图形的性质和两点之间线段最短, 得到当 O, P, A' 三点共线时, $PO + PA$ 的最小值为 $A'O$, 再利用勾股定理求 $A'O$ 即可.

【详解】解: 取点 A 关于直线 l 的对称点 A' , 连 $A'O$ 交直线 l 于点 C , 连 AC ,

则可知 $AC = A'C$, $A'A \perp l$,

$$\therefore PO + PA = PO + PA' \geq A'O,$$

即当 O, P, A' 三点共线时, $PO + PA$ 的最小值为 $A'O$,

$\because$ 直线 l 垂直于 y 轴,

$\therefore A'A \perp x$ 轴,

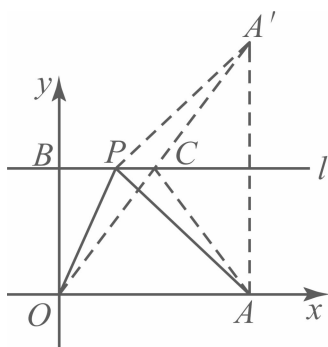
$\because A(3,0), B(0,2),$

$\therefore AO = 3, AA' = 4,$

$\therefore$ 在 $Rt\triangle A'AO$ 中,

$$A'O = \sqrt{OA^2 + AA'^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

故答案为: 5



三、解答题 (本大题共 5 个小题, 共 48 分)

14. (1) 计算: $\sqrt{16} + 2\sin 60^\circ - (\pi - 2024)^0 + |\sqrt{3} - 2|$.

(2) 解不等式组:
$$\begin{cases} 2x + 3 \geq -1 & \text{①} \\ \frac{x-1}{2} - 1 < \frac{x}{3} & \text{②} \end{cases}$$

【答案】(1) 5; (2) $-2 \leq x < 9$

【解析】

【分析】本题考查实数的混合运算、解一元一次不等式组, 熟练掌握相关运算法则并正确求解是解答的关键.

- (1) 先计算算术平方根、特殊角的三角函数值、零指数幂、化简绝对值，然后加减运算即可；
- (2) 先求得每个不等式的解集，再求得它们的公共部分即为不等式组的解集.

【详解】解：(1) $\sqrt{16} + 2\sin 60^\circ - (\pi - 2024)^0 + |\sqrt{3} - 2|$

$$= 4 + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + 2 - \sqrt{3}$$

$$= 5 + \sqrt{3} - \sqrt{3}$$

$$= 5;$$

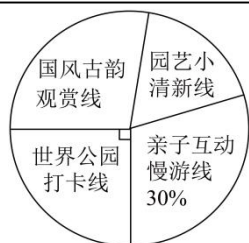
(2) 解不等式①，得 $x \geq -2$,

解不等式②，得 $x < 9$,

$\therefore$ 该不等式组的解集为 $-2 \leq x < 9$.

15. 2024 年成都世界园艺博览会以“公园城市美好人居”为主题，秉持“绿色低碳、节约持续、共享包容”的理念，以园艺为媒介，向世界人民传递绿色发展理念和诗意栖居的美好生活场景. 在主会场有多条游园线路，某单位准备组织全体员工前往参观，每位员工从其中四条线路（国风古韵观赏线、世界公园打卡线、亲子互动慢游线、园艺小清新线）中选择一条. 现随机选取部分员工进行了“线路选择意愿”的摸底调查，并根据调查结果绘制成如下统计图表.

游园线路	人数
国风古韵观赏线	44
世界公园打卡线	x
亲子互动慢游线	48
园艺小清新线	y



根据图表信息，解答下列问题：

- 本次调查的员工共有_____人，表中 x 的值为_____；
- 在扇形统计图中，求“国风古韵观赏线”对应的圆心角度数；
- 若该单位共有 2200 人，请你根据调查结果，估计选择“园艺小清新线”的员工人数.

【答案】(1) 160, 40

(2) 99°

(3) 385

【解析】

【分析】本题考查统计表和扇形统计图的关联、用样本估计总体，理解题意，能从统计图中获取有用信息是解答的关键.

(1) 根据选择“亲子互动慢游线”的人数及其所占的百分比可求得调查总人数，再根据选择“世界公园打卡线”对应的圆心角是 90° 可求解 x 值；

(2) 由 360° 乘以选择“国风古韵观赏线”所占的百分比可得答案；

(3) 先求得选择“园艺小清新线”的人数，再由单位总人数乘以样本中选择“园艺小清新线”所占的比例求解即可.

【小问 1 详解】

解：调查总人数为 $48 \div 30\% = 160$ (人)，

选择“世界公园打卡线”的人数为 $160 \times \frac{90}{360} = 40$ (人)，

故答案为：160, 40；

【小问 2 详解】

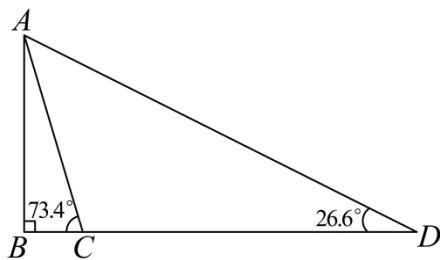
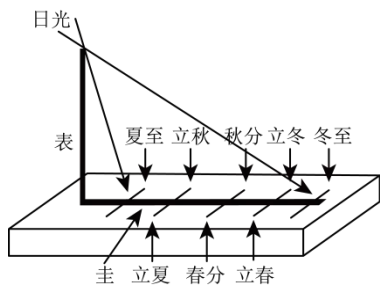
解：“国风古韵观赏线”对应的圆心角度数为 $360^\circ \times \frac{44}{160} = 99^\circ$ ；

【小问 3 详解】

解：选择“园艺小清新线”的人数为 $160 - 44 - 40 - 48 = 28$ (人)，

$\therefore$ 该单位选择“园艺小清新线”的员工人数为 $2200 \times \frac{28}{160} = 385$ (人).

16. 中国古代运用“土圭之法”判别四季. 夏至时日影最短，冬至时日影最长，春分和秋分时日影长度等于夏至和冬至日影长度的平均数. 某地学生运用此法进行实践探索，如图，在示意图中，产生日影的杆子 AB 垂直于地面， AB 长 8 尺. 在夏至时，杆子 AB 在太阳光线 AC 照射下产生的日影为 BC ；在冬至时，杆子 AB 在太阳光线 AD 照射下产生的日影为 BD . 已知 $\angle ACB = 73.4^\circ$ ， $\angle ADB = 26.6^\circ$ ，求春分和秋分时日影长度. (结果精确到 0.1 尺；参考数据： $\sin 26.6^\circ \approx 0.45$ ， $\cos 26.6^\circ \approx 0.89$ ， $\tan 26.6^\circ \approx 0.50$ ， $\sin 73.4^\circ \approx 0.96$ ， $\cos 73.4^\circ \approx 0.29$ ， $\tan 73.4^\circ \approx 3.35$)



【答案】9.2 尺

【解析】

【分析】本题主要考查解直角三角形和求平均数，利用正切分别求得 BC 和 BD ，结合题意利用平均数即可求得春分和秋分时日影长度。

【详解】解：∵ $\angle ACB = 73.4^\circ$ ，杆子 AB 垂直于地面， AB 长 8 尺。

$$\therefore \tan \angle ACB = \frac{AB}{BC}, \text{ 即 } BC \approx \frac{8}{3.35} \approx 2.39,$$

$$\therefore \angle ADB = 26.6^\circ,$$

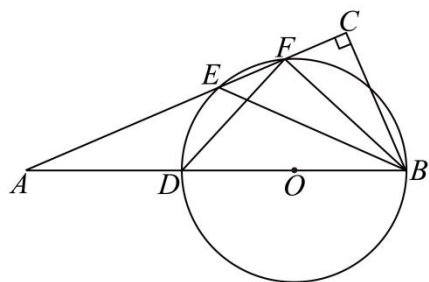
$$\therefore \tan \angle ADB = \frac{AB}{BD}, \text{ 即 } BD \approx \frac{8}{0.50} = 16,$$

∵ 春分和秋分时日影长度等于夏至和冬至日影长度的平均数。

$$\therefore \text{春分和秋分时日影长度为 } \frac{2.39 + 16}{2} \approx 9.2.$$

答：春分和秋分时日影长度 9.2 尺。

17. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， D 为斜边 AB 上一点，以 BD 为直径作 $\odot O$ ，交 AC 于 E ， F 两点，连接 BE ， BF ， DF 。



(1) 求证： $BC \cdot DF = BF \cdot CE$ ；

(2) 若 $\angle A = \angle CBF$ ， $\tan \angle BFC = \sqrt{5}$ ， $AF = 4\sqrt{5}$ ，求 CF 的长和 $\odot O$ 的直径。

【答案】(1) 见详解；

(2) $\sqrt{5}$ ， $3\sqrt{6}$ 。

【解析】

【分析】(1) 先证明 $\triangle EBC \sim \triangle DBF$ ，然后利用对应边成比例，即可证明；

(2) 利用 $\triangle EBC \sim \triangle DBF$ ，知道 $\angle EBC = \angle DBF$ ，从而推出 $\angle CBF = \angle EBA$ ，结合 $\angle A = \angle CBF$ ，知

道 $\angle A = \angle EBA$ ，推出 $AE = BE$ ，接下来证明 $\angle BFC = \angle ABC$ ，那么有 $\tan \angle BFC = \tan \angle ABC = \sqrt{5}$ ，即 $\frac{CB}{CF} = \frac{AC}{BC} = \sqrt{5}$ ，不妨设 $CF = x$ ，代入求得 CB 的长度，不妨设 $EF = y$ ，在 $\text{Rt}\triangle CEB$ 和 $\text{Rt}\triangle CFB$ 中利用勾股定理求得 EF 和 BF 的长度，最后利用 $\tan \angle CEB = \tan \angle FDB$ ，求得 DF 的长度，然后在利用勾股定理求得 BD 的长度。

【小问 1 详解】

$\because BD$ 是 $\odot O$ 的直径

$$\therefore \angle BFD = 90^\circ = \angle C$$

$$\text{又} \because \angle CEB = \angle FDB$$

$$\therefore \triangle EBC \sim \triangle DBF$$

$$\therefore \frac{EC}{DF} = \frac{CB}{FB}$$

$$\therefore BC \cdot DF = BF \cdot CE$$

【小问 2 详解】

由 (1) 可知， $\triangle EBC \sim \triangle DBF$

$$\therefore \angle EBC = \angle DBF$$

$$\therefore \angle EBC - \angle FBE = \angle DBF - \angle FBE$$

$$\therefore \angle CBF = \angle EBA$$

$$\because \angle A = \angle CBF$$

$$\therefore \angle A = \angle EBA$$

$$\therefore AE = BE$$

$$\because \angle A = \angle CBF$$

$$\therefore 90^\circ - \angle A = 90^\circ - \angle CBF$$

$$\therefore \angle ABC = \angle CFB$$

$$\therefore \tan \angle BFC = \sqrt{5}$$

$$\therefore \tan \angle BFC = \tan \angle ABC = \sqrt{5}$$

$$\therefore \frac{CB}{CF} = \frac{AC}{BC} = \sqrt{5}$$

不妨设 $CF = x$ ，那么 $CB = \sqrt{5}x$

$$\therefore AF = 4\sqrt{5}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}}{\sqrt{5}x} = \sqrt{5}$$

$$\therefore x = \sqrt{5}$$

$$\therefore CF = \sqrt{5}, \quad CB = \sqrt{5}x = \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$$

不妨设 $EF = y$ ，那么 $AE = AF - EF = 4\sqrt{5} - y = BE$

在 $\text{Rt}\triangle CEB$ 中， $CE = EF + CF = y + \sqrt{5}$ ， $CB = 5$ ， $BE = 4\sqrt{5} - y$

$$\therefore (y + \sqrt{5})^2 + 5^2 = (4\sqrt{5} - y)^2$$

$$\therefore y = \sqrt{5}$$

$$\therefore EF = \sqrt{5}$$

在 $\text{Rt}\triangle CFB$ 中， $CF = \sqrt{5}$ ， $BC = 5$

$$\therefore BF = \sqrt{CF^2 + BC^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 5^2} = \sqrt{30}$$

$$\therefore \angle CEB = \angle FDB$$

$$\therefore \tan \angle CEB = \tan \angle FDB$$

$$\therefore \frac{CB}{CE} = \frac{BF}{DF}$$

$$\therefore \frac{5}{\sqrt{5} + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{DF}$$

$$\therefore DF = 2\sqrt{6}$$

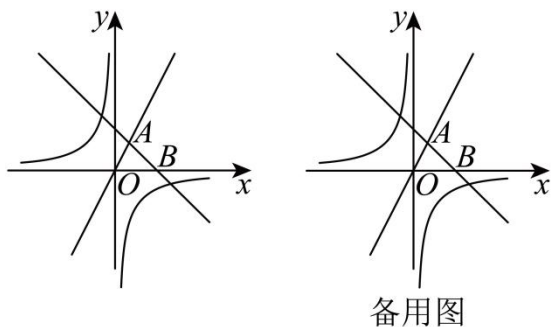
$$\therefore BD = \sqrt{DF^2 + BF^2} = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 + (\sqrt{30})^2} = 3\sqrt{6}$$

$$\therefore \odot O \text{ 的直径是 } 3\sqrt{6}$$

故答案为： $CF = \sqrt{5}$ ， $\odot O$ 直径是 $3\sqrt{6}$ 。

【点睛】 本题考查了同弧所对的圆周角相等，直径所对的圆周角是直角，三角形相似的判定与性质，勾股定理，解直角三角形，等腰三角形的性质，二次根式的化简，熟练掌握以上知识点是解题的关键。

18. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = -x + m$ 与直线 $y = 2x$ 相交于点 $A(2, a)$ ，与 x 轴交于点 $B(b, 0)$ ，点 C 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k < 0)$ 图象上。



备用图

- (1) 求 a , b , m 的值;
- (2) 若 O , A , B , C 为顶点的四边形为平行四边形, 求点 C 的坐标和 k 的值;
- (3) 过 A , C 两点的直线与 x 轴负半轴交于点 D , 点 E 与点 D 关于 y 轴对称. 若有且只有一点 C , 使得 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ABE$ 相似, 求 k 的值.

【答案】(1) $a = 4$, $m = 6$, $b = 6$

(2) 点 C 的坐标为 $(-4, 4)$ 或 $(4, -4)$, $k = -16$

(3) -1

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法求解即可;

(2) 设 $C(t, s)$, 根据平行四边形的性质, 分当 OA 为对角线时, 当 OB 为对角线时, 当 OC 为对角线时三种情况, 分别利用中点坐标公式列方程组求解即可;

(3) 设点 $D(x, 0)$, 则 $E(-x, 0)$, $x < 0$, 利用相似三角形的性质得 $AB^2 = BE \cdot BD$, 进而解方程得 $x = -2$, 则 $D(-2, 0)$, 利用待定系数法求得直线 AC 的表达式为 $y = x + 2$, 联立方程组得 $x^2 + 2x - k = 0$, 根据题意, 方程 $x^2 + 2x - k = 0$ 有且只有一个实数根, 利用根的判别式求解即可.

【小问 1 详解】

解: 由题意, 将 $A(2, a)$ 代入 $y = 2x$ 中, 得 $a = 2 \times 2 = 4$, 则 $A(2, 4)$,

将 $A(2, 4)$ 代入 $y = -x + m$ 中, 得 $4 = -2 + m$, 则 $m = 6$,

$$\therefore y = -x + 6,$$

将 $B(b, 0)$ 代入 $y = -x + 6$ 中, 得 $0 = -b + 6$, 则 $b = 6$;

【小问 2 详解】

解: 设 $C(t, s)$, 由 (1) 知 $A(2, 4)$, $B(6, 0)$

若 O , A , B , C 为顶点的四边形为平行四边形, 分以下情况:

当 OA 为对角线时, 则 $\begin{cases} 0+2=t+6 \\ 0+4=0+s \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} t=-4 \\ s=4 \end{cases}$,

$\therefore C(-4, 4)$, 则 $k = -4 \times 4 = -16$;

当 OB 为对角线时, 则 $\begin{cases} 0+6=2+t \\ 0+0=4+s \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} t=4 \\ s=-4 \end{cases}$,

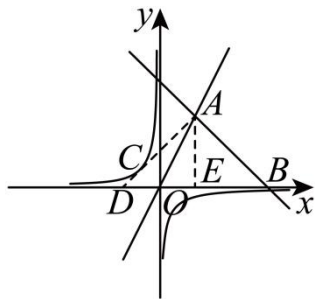
$\therefore C(4, -4)$, 则 $k = -4 \times 4 = -16$;

当 OC 为对角线时, 依题意, 这种情况不存在,

综上所述, 满足条件的点 C 的坐标为 $(-4, 4)$ 或 $(4, -4)$, $k = -16$;

【小问 3 详解】

解: 如图, 设点 $D(x, 0)$, 则 $E(-x, 0)$, $x < 0$,



若 $\triangle ABD \sim \triangle EBA$, 则 $\frac{AB}{BE} = \frac{BD}{AB}$, 即 $AB^2 = BE \cdot BD$,

$\therefore (2-6)^2 + (4-0)^2 = (6+x)(6-x)$, 即 $x^2 = 4$,

解得 $x = \pm 2$,

$\because x < 0$, $\therefore x = -2$, 则 $D(-2, 0)$,

设直线 AC 的表达式为 $y = px + q$,

则 $\begin{cases} 2p+q=4 \\ -2p+q=0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} p=1 \\ q=2 \end{cases}$,

$\therefore$ 直线 AC 的表达式为 $y = x + 2$,

联立方程组 $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = \frac{k}{x} \end{cases}$, 得 $x^2 + 2x - k = 0$,

$\therefore$ 有且只有一点 C ,

$\therefore$ 方程 $x^2 + 2x - k = 0$ 有且只有一个实数根,

$$\therefore \Delta = 2^2 + 4k = 0, \text{ 解得 } k = -1;$$

由题意, $ABD \sim ABE$ 不存在,

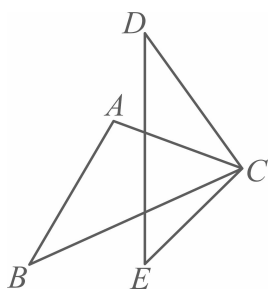
故满足条件的 k 值为 -1 .

【点睛】本题考查一次函数与反比例函数的综合、反比例函数与几何的综合, 涉及待定系数法、相似三角形的性质、平行四边形的性质、坐标与图形、一元二次方程根的判别式等知识, 熟练掌握相关知识的联系与运用, 利用分类讨论思想求解是解答的关键.

B 卷 (共 50 分)

一、填空题 (本大题共 5 个小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

19. 如图, $\triangle ABC \cong \triangle CDE$, 若 $\angle D = 35^\circ$, $\angle ACB = 45^\circ$, 则 $\angle DCE$ 的度数为_____.



【答案】 100° ## 100 度

【解析】

【分析】本题考查了三角形的内角和定理和全等三角形的性质, 先利用全等三角形的性质, 求出 $\angle CED = \angle ACB = 45^\circ$, 再利用三角形内角和求出 $\angle DCE$ 的度数即可.

【详解】解: 由 $\triangle ABC \cong \triangle CDE$, $\angle D = 35^\circ$,

$$\therefore \angle CED = \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle D = 35^\circ,$$

$$\therefore \angle DCE = 180^\circ - \angle D - \angle CED = 180^\circ - 35^\circ - 45^\circ = 100^\circ,$$

故答案为: 100°

20. 若 m , n 是一元二次方程 $x^2 - 5x + 2 = 0$ 的两个实数根, 则 $m + (n - 2)^2$ 的值为_____.

【答案】 7

【解析】

【分析】本题考查了根与系数的关系和完全平方公式和已知式子的值, 求代数式的值. 先利用已知条件求出 $n^2 - 5n + 2 = 0$, $m + n = -\frac{b}{a} = 5$, 从而得到 $n^2 = 5n - 2$, 再将原式利用完全平方公式展开, 利用

$n^2 = 5n - 2$ 替换 n^2 项, 整理后得到 $m + n + 2$, 再将 $m + n = 5$ 代入即可.

【详解】解：∵ m, n 是一元二次方程 $x^2 - 5x + 2 = 0$ 的两个实数根，

$$\therefore n^2 - 5n + 2 = 0, \quad m + n = -\frac{b}{a} = 5,$$

$$\text{则 } n^2 = 5n - 2$$

$$\therefore m + (n - 2)^2$$

$$= m + n^2 - 4n + 4$$

$$= m + 5n - 2 - 4n + 4$$

$$= m + n + 2$$

$$= 5 + 2$$

$$= 7$$

故答案为：7

21. 在综合实践活动中，数学兴趣小组对 $1 \sim n$ 这 n 个自然数中，任取两数之和大于 n 的取法种数 k 进行了探究. 发现：当 $n = 2$ 时，只有 $\{1, 2\}$ 一种取法，即 $k = 1$ ；当 $n = 3$ 时，有 $\{1, 3\}$ 和 $\{2, 3\}$ 两种取法，即 $k = 2$ ；当 $n = 4$ 时，可得 $k = 4$ ；…… 若 $n = 6$ ，则 k 的值为_____；若 $n = 24$ ，则 k 的值为_____.

【答案】 ①. 9 ②. 144

【解析】

【分析】本题考查数字类规律探究，理解题意，能够从特殊到一般，得到当 n 为偶数或奇数时的不同取法是解答的关键. 先根据前几个 n 值所对应 k 值，找到变化规律求解即可.

【详解】解：当 $n = 2$ 时，只有 $\{1, 2\}$ 一种取法，则 $k = 1$ ；

当 $n = 3$ 时，有 $\{1, 3\}$ 和 $\{2, 3\}$ 两种取法，则 $k = 2$ ；

当 $n = 4$ 时，有 $\{1, 4\}$ ， $\{2, 4\}$ ， $\{3, 4\}$ ， $\{2, 3\}$ 四种取法，则 $k = 3 + 1 = 4 = \frac{4^2}{4}$ ；

故当 $n = 5$ 时，有 $\{1, 5\}$ ， $\{2, 5\}$ ， $\{3, 5\}$ ， $\{4, 5\}$ ， $\{2, 4\}$ ， $\{3, 4\}$ 六种取法，则 $k = 4 + 2 = 6$ ；

当 $n = 6$ 时，有 $\{1, 6\}$ ， $\{2, 6\}$ ， $\{3, 6\}$ ， $\{4, 6\}$ ， $\{5, 6\}$ ， $\{2, 5\}$ ， $\{3, 5\}$ ， $\{4, 5\}$ ， $\{3, 4\}$ 九种取法，则

$$k = 5 + 3 + 1 = 9 = \frac{6^2}{4}；$$

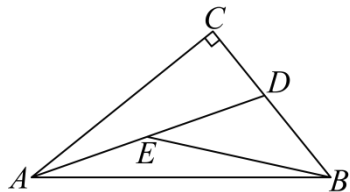
依次类推，

当 n 为偶数时, $k = (n-1) + (n-3) + \cdots + 5 + 3 + 1 = \frac{n^2}{4}$,

故当 $n = 24$ 时, $k = 23 + 21 + 19 + \cdots + 5 + 3 + 1 = \frac{24^2}{4} = 144$,

故答案为: 9, 144.

22. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, AD 是 $\triangle ABC$ 的一条角平分线, E 为 AD 中点, 连接 BE . 若 $BE = BC$, $CD = 2$, 则 $BD = \underline{\hspace{2cm}}$.

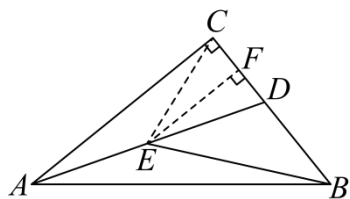


【答案】 $\frac{\sqrt{17}+1}{2}$

【解析】

【分析】连接 CE , 过 E 作 $EF \perp CD$ 于 F , 设 $BD = x$, $EF = m$, 根据直角三角形斜边上的中线性质的性质和等腰三角形的性质证得 $CF = DF = \frac{1}{2}CD = 1$, $\angle EAC = \angle ECA$, $\angle ECD = \angle EDC = \angle BEC$, 进而利用三角形的外角性质和三角形的中位线性质的性质得到 $\angle CED = 2\angle CAE$, $AC = 2EF = 2m$, 证明 $\triangle CBE \sim \triangle CED$, 利用相似三角形的性质和勾股定理得到 $m^2 = 3 + 2x$; 根据角平分线的定义和相似三角形的判定与性质证明 $\triangle CAB \sim \triangle FBE$ 得到 $2m^2 = (x+1)(x+2)$, 进而得到关于 x 的一元二次方程, 进而求解即可.

【详解】解: 连接 CE , 过 E 作 $EF \perp CD$ 于 F , 设 $BD = x$, $EF = m$,



$\because \angle ACB = 90^\circ$, E 为 AD 中点,

$\therefore CE = AE = DE$, 又 $CD = 2$,

$\therefore CF = DF = \frac{1}{2}CD = 1$, $\angle EAC = \angle ECA$, $\angle ECD = \angle EDC$,

$\therefore \angle CED = 2\angle CAE$, $AC = 2EF = 2m$,

$\because BE = BC$,

$\therefore \angle BEC = \angle ECB$, 则 $\angle BEC = \angle EDC$, 又 $\angle BCE = \angle ECD$,

$$\therefore \triangle CBE \sim \triangle CED,$$

$$\therefore \frac{CE}{CD} = \frac{CB}{CE}, \quad \angle CBE = \angle CED = 2\angle CAE,$$

$$\therefore CE^2 = CD \cdot CB = 2(2+x) = 4+2x,$$

$$\text{则 } m^2 = EF^2 = CE^2 - CF^2 = 3+2x;$$

$\therefore AD$ 是 $\triangle ABC$ 的一条角平分线,

$$\therefore \angle CAB = 2\angle CAE = \angle CBE, \quad \text{又 } \angle ACB = \angle BFE = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle CAB \sim \triangle FBE,$$

$$\therefore \frac{AC}{BF} = \frac{BC}{EF}$$

$$\therefore \frac{2m}{x+1} = \frac{x+2}{m}, \quad \text{则 } 2m^2 = (x+1)(x+2),$$

$$\therefore 2(3+2x) = (x+1)(x+2), \quad \text{即 } x^2 - x - 4 = 0,$$

$$\text{解得 } x = \frac{\sqrt{17}+1}{2} \quad (\text{负值已舍去}),$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{17}+1}{2}.$$

【点睛】本题考查了相似三角形的判定与性质、直角三角形的性质、等腰三角形的性质、三角形的中位线性质、三角形的外角性质、角平分线的定义以及解一元二次方程等知识，是一道填空压轴题，有一定的难度，熟练掌握三角形相关知识是解答的关键。

23. 在平面直角坐标系 xOy 中， $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ， $C(x_3, y_3)$ 是二次函数 $y = -x^2 + 4x - 1$ 图象上三点. 若 $0 < x_1 < 1$ ， $x_2 > 4$ ，则 y_1 _____ y_2 (填 “>” 或 “<”)；若对于 $m < x_1 < m+1$ ， $m+1 < x_2 < m+2$ ， $m+2 < x_3 < m+3$ ，存在 $y_1 < y_3 < y_2$ ，则 m 的取值范围是_____.

$$\text{【答案】} \quad \text{①. } > \quad \text{②. } -\frac{1}{2} < m < 1$$

【解析】

【分析】本题考查二次函数的性质、不等式的性质以及解不等式组，熟练掌握二次函数的性质是解答的关键. 先求得二次函数的对称轴，再根据二次函数的性质求解即可.

【详解】解：由 $y = -x^2 + 4x - 1 = -(x-2)^2 + 3$ 得抛物线的对称轴为直线 $x = 2$ ，开口向下，

$$\therefore 0 < x_1 < 1, \quad x_2 > 4,$$

$$\therefore |x_1 - 2| < |x_2 - 2|,$$

$$\therefore y_1 > y_2;$$

$$\therefore m < m+1 < m+2, \quad m < x_1 < m+1, \quad m+1 < x_2 < m+2, \quad m+2 < x_3 < m+3,$$

$$\therefore x_1 < x_2 < x_3,$$

$$\therefore \text{存在 } y_1 < y_3 < y_2,$$

$$\therefore x_1 < 2, \quad x_3 > 2, \quad \text{且 } A(x_1, y_1) \text{ 离对称轴最远, } B(x_2, y_2) \text{ 离对称轴最近,}$$

$$\therefore 2 - x_1 > x_3 - 2 > |x_2 - 2|, \quad \text{即 } x_1 + x_3 < 4, \quad \text{且 } x_2 + x_3 > 4,$$

$$\therefore 2m+2 < x_1 + x_3 < 2m+4, \quad 2m+3 < x_2 + x_3 < 2m+5,$$

$$\therefore 2m+2 < 4 \text{ 且 } 2m+5 > 4,$$

$$\text{解得 } -\frac{1}{2} < m < 1,$$

$$\text{故答案为: } >; \quad -\frac{1}{2} < m < 1.$$

二、解答题 (本大题共 3 个小题, 共 30 分)

24. 推进中国式现代化, 必须坚持不懈夯实农业基础, 推进乡村全面振兴. 某合作社着力发展乡村水果网络销售, 在水果收获的季节, 该合作社用 17500 元从农户处购进 A, B 两种水果共 1500kg 进行销售, 其中 A 种水果收购单价 10 元/kg, B 种水果收购单价 15 元/kg.

(1) 求 A, B 两种水果各购进多少千克;

(2) 已知 A 种水果运输和仓储过程中质量损失 4%, 若合作社计划 A 种水果至少要获得 20% 的利润, 不计其他费用, 求 A 种水果的最低销售单价.

【答案】 (1) A 种水果购进 1000 千克, B 种水果购进 500 千克

(2) A 种水果的最低销售单价为 12.5 元/kg

【解析】

【分析】 本题主要考查一元二次方程的应用和一元一次不等式的应用,

(1) 设 A 种水果购进 x 千克, B 种水果购进 y 千克, 根据题意列出二元一次方程组求解即可.

(2) 根据题意列出关于利润和进价与售价的不等式求解即可.

【小问 1 详解】

解: 设 A 种水果购进 x 千克, B 种水果购进 y 千克,

根据题意有：
$$\begin{cases} x+y=1500 \\ 10x+15y=17500 \end{cases},$$

解得：
$$\begin{cases} x=1000 \\ y=500 \end{cases},$$

∴ A 种水果购进 1000 千克， B 种水果购进 500 千克

【小问 2 详解】

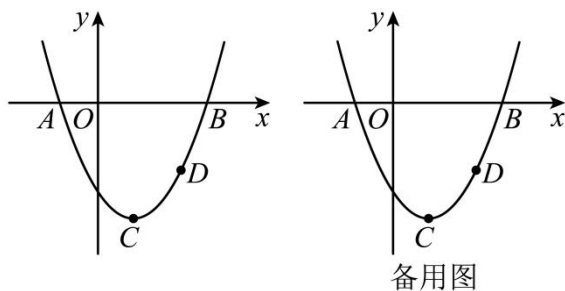
设 A 种水果的销售单价为 a 元/kg，

根据题意有： $1000(1-4\%)a \geq (1+20\%) \times 1000 \times 10,$

解得 $a \geq 12.5,$

故 A 种水果的最低销售单价为 12.5 元/kg

25. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $L: y = ax^2 - 2ax - 3a (a > 0)$ 与 x 轴交于 A, B 两点（点 A 在点 B 的左侧），其顶点为 C ， D 是抛物线第四象限上一点.



(1) 求线段 AB 的长；

(2) 当 $a = 1$ 时，若 $\triangle ACD$ 的面积与 $\triangle ABD$ 的面积相等，求 $\tan \angle ABD$ 的值；

(3) 延长 CD 交 x 轴于点 E ，当 $AD = DE$ 时，将 $\triangle ADB$ 沿 DE 方向平移得到 $\triangle A'EB'$ 。将抛物线 L 平移得到抛物线 L' ，使得点 A', B' 都落在抛物线 L' 上。试判断抛物线 L' 与 L 是否交于某个定点。若是，求出该定点坐标；若不是，请说明理由。

【答案】(1) $AB = 4$

(2) $\tan \angle ABD = \frac{10}{3}$

(3) 抛物线 L' 与 L 交于定点 $(3, 0)$

【解析】

【分析】(1) 根据题意可得 $ax^2 - 2ax - 3a = 0$ ，整理得 $x^2 - 2x - 3 = 0$ ，即可知 $A(-1, 0), B(3, 0)$ ，则有 $AB = 4$ ；

(2) 由题意得抛物线 $L: y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$, 则 $C(1, -4)$, 设 $D(n, n^2 - 2n - 3)$, $(0 < n < 3)$, 可求得 $S_{\triangle ABD} = -2n^2 + 4n + 6$, 结合题意可得直线 AD 解析式为 $y = (n-3)(x+1)$, 设直线 AD 与抛物线对称轴交于点 E , 则 $E(1, 2n-6)$, 即可求得 $S_{\triangle ACD} = n^2 - 1$, 进一步解得点 $D\left(\frac{7}{3}, -\frac{20}{9}\right)$, 过 D 作 $DH \perp AB$ 于点 H , 则 $BH = \frac{2}{3}, DH = \frac{20}{9}$, 即可求得 $\tan \angle ABD = \frac{DH}{BH}$;

(3) 设 $D(n, an^2 - 2an - 3a)$, 可求得直线 AD 解析式为 $y = a(n-3)(x+1)$, 过点 D 作 $DM \perp AB$, 可得 $AM = n+1, DM = -an^2 + 2an + 3a$, 结合题意得

$EM = n+1, A'(n, -an^2 + 2an + 3a), B'(n+4, -an^2 + 2an + 3a)$, 设抛物线 L' 解析式为 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$, 由于过点 A', B' 可求得抛物线 L' 解析式为 $y = ax^2 + (-2an - 4a)x + 6an + 3a$, 根据 $ax^2 - 2ax - 3a = ax^2 + (-2an - 4a)x + 6an + 3a$ 解得 $x = 3$, 即可判断抛物线 L' 与 L 交于定点 $(3, 0)$.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 抛物线 $L: y = ax^2 - 2ax - 3a (a > 0)$ 与 x 轴交于 A, B 两点,

$\therefore ax^2 - 2ax - 3a = 0$, 整理得 $x^2 - 2x - 3 = 0$, 解得 $x_1 = -1, x_2 = 3$,

$\therefore A(-1, 0), B(3, 0)$,

则 $AB = 3 - (-1) = 4$;

【小问 2 详解】

当 $a = 1$ 时, 抛物线 $L: y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$,

则 $C(1, -4)$,

设 $D(n, n^2 - 2n - 3)$, $(0 < n < 3)$, 则 $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot |y_D| = -\frac{1}{2} \times 4 \times (n^2 - 2n - 3) = -2n^2 + 4n + 6$,

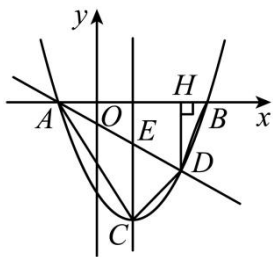
设直线 AD 解析式为 $y = k(x+1)$,

$\because$ 点 D 在直线 AD 上,

$\therefore n^2 - 2n - 3 = k(n+1)$, 解得 $k = n-3$,

则直线 AD 解析式为 $y = (n-3)(x+1)$,

设直线 AD 与抛物线对称轴交于点 E , 则 $E(1, 2n-6)$,



$$\therefore S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} CE \cdot (x_D - x_A) = \frac{1}{2} \times [2n - 6 - (-4)] \times (n+1) = n^2 - 1,$$

$\therefore \triangle ACD$ 的面积与 $\triangle ABD$ 的面积相等,

$$\therefore -2n^2 + 4n + 6 = n^2 - 1, \text{ 解得 } n_1 = -1, n_2 = \frac{7}{3},$$

$$\therefore \text{点 } D\left(\frac{7}{3}, -\frac{20}{9}\right),$$

过点 D 作 $DH \perp AB$ 于点 H , 则 $BH = 3 - \frac{7}{3} = \frac{2}{3}, DH = \frac{20}{9}$,

$$\text{则 } \tan \angle ABD = \frac{DH}{BH} = \frac{10}{3};$$

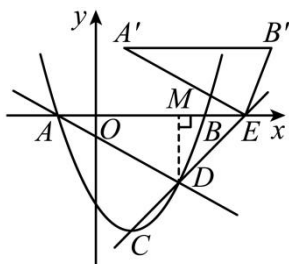
【小问 3 详解】

设 $D(n, an^2 - 2an - 3a)$, 直线 AD 解析式为 $y = k_1(x+1)$,

则 $an^2 - 2an - 3a = k_1(n+1)$, 解得 $k_1 = an - 3a$,

那么直线 AD 解析式为 $y = a(n-3)(x+1)$,

过点 D 作 $DM \perp AB$, 如图,



则 $AM = n+1, DM = -an^2 + 2an + 3a$,

$\therefore AD = DE$,

$\therefore EM = n+1$,

$\therefore$ 将 $\triangle ADB$ 沿 DE 方向平移得到 $\triangle A'EB'$, $A(-1, 0), B(3, 0)$,

$\therefore A'(n, -an^2 + 2an + 3a), B'(n+4, -an^2 + 2an + 3a)$,

由题意知抛物线 L 平移得到抛物线 L' , 设抛物线 L' 解析式为 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$,

∵ 点 A' , B' 都落在抛物线 L' 上

$$\therefore \begin{cases} -an^2 + 2an + 3a = an^2 + bn + c \\ -an^2 + 2an + 3a = a(n+4)^2 + b(n+4) + c \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} b = -2an - 4a \\ c = 6an + 3a \end{cases},$$

则抛物线 L' 解析式为 $y = ax^2 + (-2an - 4a)x + 6an + 3a$

$$\therefore ax^2 - 2ax - 3a = ax^2 + (-2an - 4a)x + 6an + 3a$$

整理得 $(n+1)x = 3n+3$, 解得 $x = 3$,

∴ 抛物线 L' 与 L 交于定点 $(3, 0)$.

【点睛】 本题主要考查二次函数的性质、两点之间的距离、一次函数的性质、求正切值、二次函数的平移、等腰三角形的性质和抛物线过定点，解题的关键是熟悉二次函数的性质和平移过程中数形结合思想的应用.

26. 数学活动课上，同学们将两个全等的三角形纸片完全重合放置，固定一个顶点，然后将其中一个纸片绕这个顶点旋转，来探究图形旋转的性质. 已知三角形纸片 ABC 和 ADE 中， $AB = AD = 3$, $BC = DE = 4$, $\angle ABC = \angle ADE = 90^\circ$.

【初步感知】

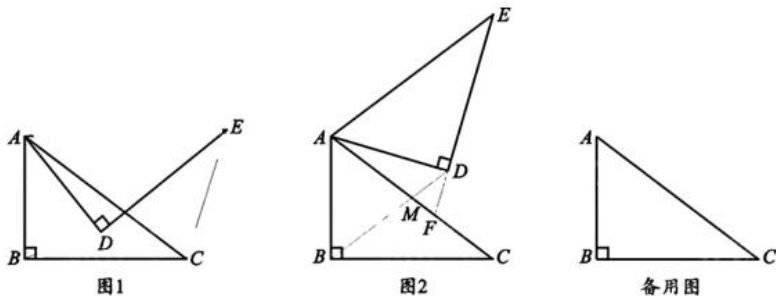
(1) 如图 1，连接 BD , CE ，在纸片 ADE 绕点 A 旋转过程中，试探究 $\frac{BD}{CE}$ 的值.

【深入探究】

(2) 如图 2，在纸片 ADE 绕点 A 旋转过程中，当点 D 恰好落在 $\triangle ABC$ 的中线 BM 的延长线上时，延长 ED 交 AC 于点 F ，求 CF 的长.

【拓展延伸】

(3) 在纸片 ADE 绕点 A 旋转过程中，试探究 C , D , E 三点能否构成直角三角形. 若能，直接写出所有直角三角形 CDE 的面积；若不能，请说明理由.



【答案】 (1) $\frac{BD}{CE}$ 的值为 $\frac{3}{5}$; (2) $CF = \frac{70}{39}$; (3) 直角三角形 CDE 的面积分别为 4, 16, 12, $\frac{48}{13}$

【解析】

【分析】(1) 根据 $AB = AD = 3$, $BC = DE = 4$, $\angle ABC = \angle ADE = 90^\circ$. 证明 $\triangle ADE \cong \triangle ABC$,

$$AC = AE = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{AD^2 + DE^2} = 5, \text{ 继而得到 } \angle DAE = \angle BAC,$$

$$\angle DAE - \angle DAC = \angle BAC - \angle DAC \text{ 即 } \angle CAE = \angle BAD, \text{ 再证明 } \triangle CAE \sim \triangle BAD, \text{ 得到 } \frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}.$$

(2) 连接 CE , 延长 BM 交 CE 于点 Q , 根据(1)得 $\triangle CAE \sim \triangle BAD$, 得到 $\angle ABD = \angle ACE$, 根据中线 BM 得到 $BM = AM = CM = \frac{1}{2}AC = \frac{5}{2}$, 继而得到 $\angle MBC = \angle MCB$, 结合 $\angle ABD + \angle MBC = 90^\circ$, 得到

$$\angle ACE + \angle MCB = 90^\circ \text{ 即 } \angle BCE = 90^\circ, \text{ 得到 } AB \parallel CQ, \text{ 再证明 } \triangle ABM \cong \triangle CQM, \text{ 得证矩形 } ABCQ,$$

再利用勾股定理, 三角形相似的判定和性质计算即可.

(3) 运用分类思想解答即可.

【详解】(1) $\because AB = AD = 3$, $BC = DE = 4$, $\angle ABC = \angle ADE = 90^\circ$.

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle ABC (\text{SAS}),$$

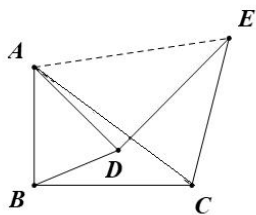
$$\therefore AC = AE = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{AD^2 + DE^2} = 5, \angle DAE = \angle BAC,$$

$$\therefore \angle DAE - \angle DAC = \angle BAC - \angle DAC \text{ 即 } \angle CAE = \angle BAD,$$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = 1$$

$$\therefore \triangle CAE \sim \triangle BAD,$$

$$\therefore \frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}.$$



(2) 连接 CE , 延长 BM 交 CE 于点 Q , 根据(1)得 $\triangle CAE \sim \triangle BAD$,

$$\therefore \angle ABD = \angle ACE,$$

$\because BM$ 是中线

$$\therefore BM = AM = CM = \frac{1}{2}AC = \frac{5}{2},$$

$$\therefore \angle MBC = \angle MCB,$$

$$\therefore \angle ABD + \angle MBC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACE + \angle MCB = 90^\circ \text{ 即 } \angle BCE = 90^\circ,$$

$$\therefore AB \parallel CQ,$$

$$\therefore \angle BAM = \angle QCM, \angle ABM = \angle CQM,$$

$$\therefore \begin{cases} \angle BAM = \angle QCM \\ \angle ABM = \angle CQM, \\ AM = CM \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BAM \cong \triangle QCM (\text{AAS}),$$

$$\therefore BM = QM,$$

$$\therefore \text{四边形 } ABCQ \text{ 是平行四边形},$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ$$

$$\therefore \text{四边形 } ABCQ \text{ 矩形},$$

$$\therefore AB = CQ = 3, BC = AQ = 4, \angle AQC = 90^\circ,$$

$$\therefore PQ \parallel CN, EQ = \sqrt{AE^2 - AQ^2} = 3,$$

$$\therefore \frac{EP}{PN} = \frac{EQ}{QC} = \frac{3}{3} = 1,$$

$$\therefore PQ = \frac{1}{2}CN,$$

$$\text{设 } PQ = x, CN = 2x, \text{ 则 } AP = 4 - x,$$

$$\therefore \begin{cases} \angle EPQ = \angle APD \\ \angle EQP = \angle ADP = 90^\circ, \\ EQ = AD = 3 \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EQP \cong \triangle ADP (\text{AAS}),$$

$$\therefore AP = EP = 4 - x,$$

$$\therefore EP^2 = PQ^2 + EQ^2,$$

$$\therefore (4 - x)^2 = x^2 + 3^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{7}{8};$$

$$\therefore AP = 4 - x = \frac{25}{8}, \quad CN = 2x = \frac{7}{4},$$

$$\therefore PQ \parallel CN, AC = 5,$$

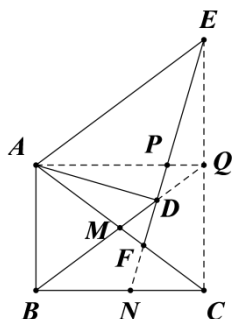
$$\therefore \triangle APF \sim \triangle CNF,$$

$$\therefore \frac{AP}{CN} = \frac{AF}{CF},$$

$$\therefore \frac{AP + CN}{CN} = \frac{AF + CF}{CF},$$

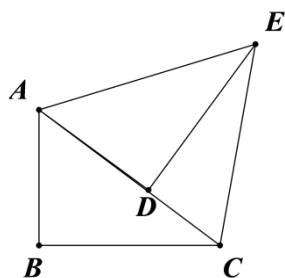
$$\therefore \frac{\frac{25}{8} + \frac{7}{4}}{\frac{7}{4}} = \frac{5}{CF},$$

$$\text{解得 } CF = \frac{70}{39}.$$



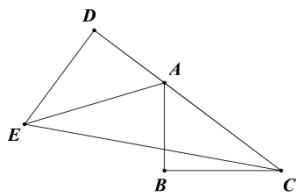
(3) 如图，当 AD 与 AC 重合时，此时 $DE \perp AC$ ，此时 $\triangle CDE$ 是直角三角形，

$$\text{故 } S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} CD \cdot DE = \frac{1}{2} \times (AC - AD) \times DE = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4;$$



如图，当 AD 在 CA 的延长线上时，此时 $DE \perp AC$ ，此时 $\triangle CDE$ 是直角三角形，

$$\text{故 } S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} CD \cdot DE = \frac{1}{2} \times (AC + AD) \times DE = \frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16;$$



如图，当 $DE \perp EC$ 时，此时 $\triangle CDE$ 是直角三角形，

过点 A 作 $AQ \perp EC$ 于点 Q ,

$$\therefore AE = AC = 5,$$

$$\therefore EQ = QC = \frac{1}{2}EC,$$

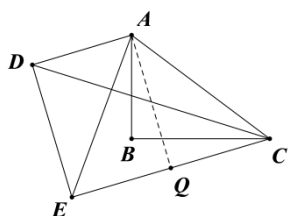
$$\therefore AQ \perp EC, DE \perp EC, DE \perp AD,$$

$\therefore$ 四边形 $ADEQ$ 是矩形,

$$\therefore AD = EQ = QC = \frac{1}{2}EC = 3,$$

$$\therefore EC = 6,$$

$$\text{故 } S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2}EC \cdot DE = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12;$$



如图, 当 $DC \perp EC$ 时, 此时 $\triangle CDE$ 是直角三角形,

过点 A 作 $AQ \perp EC$ 于点 Q , 交 DE 于点 N ,

$$\therefore EQ = QC = \frac{1}{2}EC = x, NQ \parallel CD,$$

$$\therefore \frac{EN}{DN} = \frac{EQ}{QC} = 1,$$

$$\therefore DN = EN = \frac{1}{2}DE = 2, QN = \frac{1}{2}DC,$$

$$\therefore \angle AND = \angle ENQ, \angle ADN = \angle EQN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAN = \angle QEN,$$

$$\therefore \tan \angle DAN = \tan \angle QEN,$$

$$\therefore \frac{QN}{EQ} = \frac{DN}{AD} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore QN = \frac{2}{3}x,$$

$$\therefore DC = \frac{4}{3}x, CE = 2x,$$

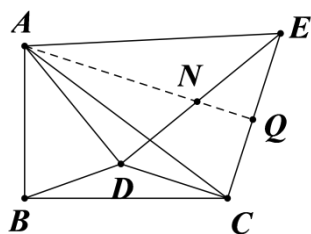
$$\because ED^2 = DC^2 + EC^2,$$

$$\therefore 4^2 = (2x)^2 + \left(\frac{4x}{3}\right)^2,$$

$$\therefore x^2 = \frac{36}{13},$$

$$\text{解得 } x = \frac{6\sqrt{13}}{13};$$

$$\text{故 } S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} EC \cdot DC = \frac{1}{2} \times 2x \times \frac{4}{3}x = \frac{4}{3}x^2 = \frac{4}{3} \times \frac{36}{13} = \frac{48}{13}.$$



【点睛】 本题考查了旋转的性质，三角形相似的判定和性质，三角形中位线定理的判定和应用，三角形全等的判定和性质，三角函数的应用，勾股定理，熟练掌握三角函数的应用，三角形相似的判定和性质，矩形的判定和性质，中位线定理是解题的关键.