

德阳市 2024 年初中学业水平考试与高中阶段学校招生考试

数学试卷

说明：1. 本试卷分第Ⅰ卷和第Ⅱ卷. 第Ⅰ卷为选择题，第Ⅱ卷为非选择题. 全卷共 6 页. 考生作答时，须将答案答在答题卡上，在本试卷、草稿纸上答题无效，考试结束后，将试卷及答题卡交回.

2. 本试卷满分 150 分，答题时间为 120 分钟.

第Ⅰ卷（选择题，共 36 分）

一、选择题（本大题共 12 个小题，每小题 3 分，共 36 分，在每小题给出的四个选项中，有且仅有一项是符合题目要求的.）

1. 下列四个数中，比 -2 小的数是（ ）

- A. 0 B. -1 C. $-\frac{1}{2}$ D. -3

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了有理数的大小比较，掌握有理数大小比较的法则是关键. 根据有理数的大小比较法则：正数 $> 0 >$ 负数；然后根据两个负数比较大小，绝对值大的反而小，即可得到答案.

【详解】解：∵ 正数 $> 0 >$ 负数， $\left| -\frac{1}{2} \right| < |-1| < |-2| < |-3|$,

$$\therefore -3 < -2 < -1 < -\frac{1}{2} < 0$$

$$\therefore -3 < -2,$$

∴ 比 -2 小的是 -3 .

故选：D.

2. 下列计算正确的是（ ）

- A. $a^2 \cdot a^3 = a^6$ B. $-(a-b) = -a+b$
C. $a(a+1) = a^2 + 1$ D. $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查整式的运算，根据同底数幂的乘法，去括号，单项式乘以多项式，完全平方公式，逐一进行判断即可.

【详解】解：A、 $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ，原选项计算错误；

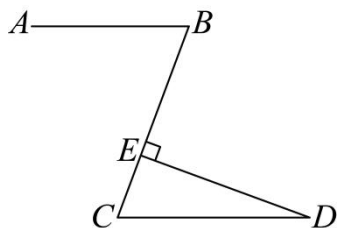
B、 $-(a-b) = -a+b$ ，原选项计算正确；

C、 $a(a+1) = a^2 + a$ ，原选项计算错误；

D、 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ，原选项计算错误；

故选 B.

3. 如图是某机械加工厂加工的一种零件的示意图，其中 $AB \parallel CD$ ， $DE \perp BC$ ， $\angle ABC = 70^\circ$ ，则 $\angle EDC$ 等于 ()



A. 10°

B. 20°

C. 30°

D. 40°

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了平行线的性质，三角形内角和定理，解答此题的关键是准确识图，熟练掌握平行线的性质. 首先根据平行线的性质得出 $\angle BCD = \angle ABC = 70^\circ$ ，再根据垂直与三角形的内角和即可求出 $\angle EDC$.

【详解】解： $\because AB \parallel CD$ ， $\angle ABC = 70^\circ$ ，

$$\therefore \angle BCD = \angle ABC = 70^\circ,$$

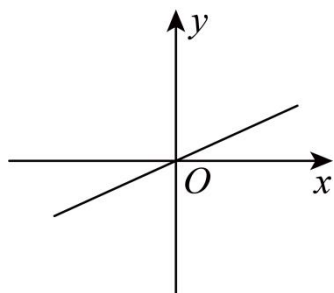
$$\because DE \perp BC,$$

$$\therefore \angle CED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EDC = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$$

故选：B.

4. 正比例函数 $y = kx$ ($k \neq 0$) 的图象如图所示，则 k 的值可能是 ()



A. $\frac{1}{2}$

B. $-\frac{1}{2}$

C. -1

D. $-\frac{1}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了正比例函数的性质：当 $k > 0$ ，图象经过第一、第三象限，在每一象限内 y 随 x 的增大而增大；当 $k < 0$ ，图象经过第二、第四象限，在每一象限内 y 随 x 的增大而减小。利用正比例函数的性质得到 $k > 0$ ，然后在此范围内进行判断即可。

【详解】解：∵ 正比例函数图象经过第一、第三象限，

∴ $k > 0$ ，

∴ 选项 A 符合题意。

故选：A。

5. 分式方程 $\frac{1}{x} = \frac{5}{x+3}$ 的解是 ()

A. 3

B. 2

C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{3}{4}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查分式方程的解法，掌握分式方程的解法与步骤是解题关键。本题考查分式方程的解法，掌握分式方程的解法与步骤是解题关键。

【详解】解： $\frac{1}{x} = \frac{5}{x+3}$ ，

去分母，得 $x+3=5x$ ，

解得 $x = \frac{3}{4}$ ，

当 $x = \frac{3}{4}$ 时， $x(x+3) \neq 0$ ，

∴ $x = \frac{3}{4}$ 是原方程的解。

故选 D

6. 为了推进“阳光体育”，学校积极开展球类运动，在一次定点投篮测试中，每人投篮 5 次，七年级某班统计全班 50 名学生投中的次数，并记录如下：

投中次数 (个)	0	1	2	3	4	5
人数 (人)	1	●	10	17	●	6

表格中有两处数据不小心被墨汁遮盖了，下列关于投中次数的统计量中可以确定的是 ()

A. 平均数

B. 中位数

C. 众数

D. 方差

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查中位数、众数、方差、平均数的意义和计算方法，解题的关键是理解各个统计量的实际意义，以及每个统计量所反应数据的特征．先求被遮住投篮成绩的人数，然后根据众数的定义求出众数，而中位数，平均数和方差与所有的数据有关，据此可得答案．

【详解】解：∵一共有 50 名同学，

∴被遮住投篮成绩的人数为 $50 - 1 - 10 - 17 - 6 = 16$ 名，

∴众数是一组数据中出现次数最多的数据，

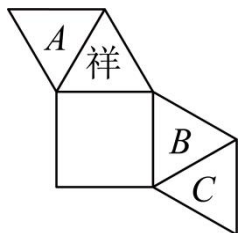
∴这 50 名学生的投篮成绩的众数为 3，出现 17 次，大于 16，与被遮盖的数据无关，

∴中位数是一组数据中处在最中间的那个数据或处在最中间的两个数据的平均数，

∴把这 50 名学生的成绩从小到大排列，第 25 名和第 26 名的投篮成绩不能确定，与被遮盖的数据有关，而平均数和方差都与被遮住的数据有关，

故选 C.

7. 走马灯，又称仙音烛，据史料记载，走马灯的历史起源于隋唐时期，盛行于宋代，是中国特色工艺品，常见于除夕、元宵、中秋等节日，在一次综合实践活动中，一同学用如图所示的纸片，沿折痕折合成一个棱锥形的“走马灯”，正方形做底，侧面有一个三角形面上写了“祥”字，当灯旋转时，正好看到“吉祥如意”的字样．则在 A、B、C 处依次写上的字可以是（ ）



A. 吉 如 意

B. 意 吉 如

C. 吉 意 如

D. 意 如 吉

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查的是简单几何体的展开图，利用四棱锥的展开图的特点可得答案．

【详解】解：由题意可得：展开图是四棱锥，

∴A、B、C 处依次写上的字可以是吉，如，意；或如，吉，意；

故选 A

8. 已知，正六边形 $ABCDEF$ 的面积为 $6\sqrt{3}$ ，则正六边形的边长为（ ）

A. 1

B. $\sqrt{3}$

C. 2

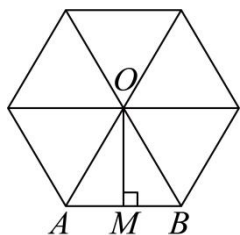
D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查正六边形的性质，正三角形的性质，设出边长去表示正三角形面积和正六边形面积即可.

【详解】解：如图：根据多边形的内角和定理可求出正六边形的一个内角为 120° ，故正六边形是由6个正三角形构成的，过 O 点作 $OM \perp AB$ 垂足是 M ，



设正六边形的边长为 a ，即 $OA = AB = a$

在正三角形 OAB 中，

$$\because OM \perp AB,$$

$$\therefore AM = BM = \frac{a}{2},$$

$$\text{在 Rt}\triangle AMO \text{ 中, } OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\text{一个正三角形的面积为: } \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OM = \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4},$$

$$\text{正六边形的面积为: } \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \times 6 = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2},$$

$$\therefore \frac{3\sqrt{3}a^2}{2} = 6\sqrt{3},$$

解得: $a = 2$,

故选: C.

9. 将一组数 $\sqrt{2}, 2, \sqrt{6}, 2\sqrt{2}, \sqrt{10}, 2\sqrt{3}, \dots, \sqrt{2n}, \dots$ ，按以下方式排列：

第一行	$\sqrt{2}$
第二行	$2 \quad \sqrt{6}$
第三行	$2\sqrt{2} \quad \sqrt{10} \quad 2\sqrt{3}$
...	...

则第八行左起第1个数是 ()

A. $7\sqrt{2}$

B. $8\sqrt{2}$

C. $\sqrt{58}$

D. $4\sqrt{7}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了数字类规律探索，正确归纳类推出一般规律是解题关键．求出第七行共有 28 个数，从而可得第八行左起第 1 个数是第 29 个数，据此求解即可得．

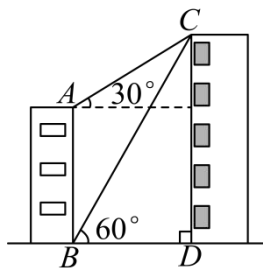
【详解】解：由图可知，第一行共有 1 个数，第二行共有 2 个数，第三行共有 3 个数，

归纳类推得：第七行共有 $1+2+3+4+5+6+7=28$ 个数，

则第八行左起第 1 个数是 $\sqrt{2 \times 29} = \sqrt{58}$ ，

故选：C．

10. 某校学生开展综合实践活动，测量一建筑物 CD 的高度，在建筑物旁边有一高度为 10 米的小楼房 AB ，小李同学在小楼房楼底 B 处测得 C 处的仰角为 60° ，在小楼房楼顶 A 处测得 C 处的仰角为 30° ．（ AB 、 CD 在同一平面内， B 、 D 在同一水平面上），则建筑物 CD 的高为（ ）米



A. 20

B. 15

C. 12

D. $10+5\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查的是解直角三角形的实际应用，如图，过 A 作 $AE \perp CD$ 于 E ，则四边形 $ABDE$ 为矩形，

设 $CE = x$ ，而 $\angle CAE = 30^\circ$ ，可得 $AE = \frac{CE}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}x = BD$ ， $CD = x + 10$ ，结合

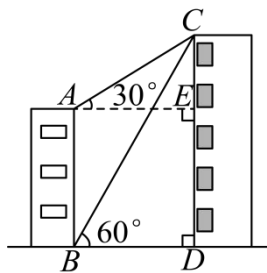
$\tan 60^\circ = \frac{CD}{BD} = \frac{x+10}{\sqrt{3}x} = \sqrt{3}$ ，再解方程即可．

【详解】解：如图，过 A 作 $AE \perp CD$ 于 E ，

依题意， $AB \perp BD$ ， $CD \perp BD$

$\therefore$ 四边形 $ABDE$ 为矩形，

$\therefore AB = DE = 10$ ， $AE = BD$ ，



设 $CE = x$ ，而 $\angle CAE = 30^\circ$ ，

$$\therefore AE = \frac{CE}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}x = BD,$$

$$\therefore CD = x + 10,$$

$$\therefore \tan 60^\circ = \frac{CD}{BD} = \frac{x+10}{\sqrt{3}x} = \sqrt{3},$$

解得： $x = 5$ ，

经检验 $x = 5$ 是原方程的解，且符合题意；

$$\therefore CD = x + 10 = 15(\text{m}),$$

故选 B

11. 宽与长的比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的矩形叫黄金矩形，黄金矩形给我们以协调的美感，世界各国许多著名建筑为取得最佳的视觉效果，都采用了黄金矩形的设计. 已知四边形 $ABCD$ 是黄金矩形. ($AB < BC$)，点 P 是边 AD 上一点，则满足 $PB \perp PC$ 的点 P 的个数为 ()

A. 3

B. 2

C. 1

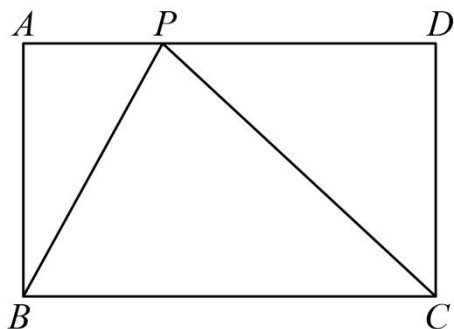
D. 0

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了矩形的性质，勾股定理，一元二次方程的解，熟练掌握勾股定理，利用判别式判断一元二次方程解的情况是解题的关键. 设 $AB = a$ ， $BC = b$ ，假设存在点 P ，且 $AP = x$ ，则 $PD = b - x$ ，利用勾股定理得到 $BP^2 = AB^2 + AP^2 = a^2 + x^2$ ， $PC^2 = PD^2 + CD^2 = (b-x)^2 + a^2$ ， $BC^2 = BP^2 + PC^2$ ，可得到方程 $x^2 - bx + a^2 = 0$ ，结合 $\frac{AB}{BC} = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，然后根据判别式的符号即可确定有几个解，由此得解.

【详解】解：如图所示，四边形 $ABCD$ 是黄金矩形， $AB < BC$ ， $\frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，



设 $AB = a$ ， $BC = b$ ，假设存在点 P ，且 $AP = x$ ，则 $PD = b - x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABP$ 中， $BP^2 = AB^2 + AP^2 = a^2 + x^2$ ，

在 $\text{Rt}\triangle PDC$ 中， $PC^2 = PD^2 + CD^2 = (b - x)^2 + a^2$ ，

$\therefore PB \perp PC$ ，

$\therefore BC^2 = BP^2 + PC^2$ ，即 $b^2 = a^2 + x^2 + (b - x)^2 + a^2$ ，

整理得 $x^2 - bx + a^2 = 0$ ，

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = b^2 - 4a^2$ ，又 $\frac{AB}{BC} = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，即 $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}b$ ，

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = b^2 - 4a^2 = b^2 - 4 \times \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}b^2 = (2\sqrt{5}-5)b^2$ ，

$\therefore 2\sqrt{5}-5 < 0$ ， $b^2 > 0$ ，

$\therefore \Delta = b^2 - 4a^2 = (2\sqrt{5}-5)b^2 < 0$ ，

$\therefore$ 方程无解，即点 P 不存在。

故选：D。

12. 一次折纸实践活动中，小王同学准备了一张边长为 4（单位：dm）的正方形纸片 $ABCD$ ，他在边 AB 和 AD 上分别取点 E 和点 M ，使 $AE = BE$ ， $AM = 1$ ，又在线段 MD 上任取一点 N （点 N 可与端点重合），再将 $\triangle EAN$ 沿 NE 所在直线折叠得到 $\triangle EA_1N$ ，随后连接 DA_1 。小王同学通过多次实践得到以下结论：

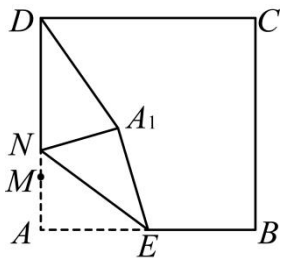
①当点 N 在线段 MD 上运动时，点 A_1 在以 E 为圆心的圆弧上运动；

②当 DA_1 达到最大值时， A_1 到直线 AD 的距离达到最大；

③ DA_1 的最小值为 $2\sqrt{5}-2$ ；

④ DA_1 达到最小值时， $MN = 5 - \sqrt{5}$ 。

你认为小王同学得到的结论正确的个数是 ()



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】由折叠可得 $A_1E = AE = BE = 2$ ，可得点 A_1 到点 E 的距离恒为 2，即可判断①；连接 DE ，由勾股定理得到在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中， $DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = 2\sqrt{5}$ ，由 $DA_1 + A_1E \geq DE$ ，即可判断③； DA_1 达到最小值时，点 A_1 在线段 DE 上，证得 $\triangle A_1DN \sim \triangle ADE$ ，得到 $\frac{A_1D}{AD} = \frac{DN}{DE}$ ，从而求得 $DN = 5 - \sqrt{5}$ ，通过 $MN = AD - DN - AM$ 即可判断④. 在 $\triangle A_1DE$ 中， A_1D 随着 $\angle DEA_1$ 的增大而增大，而当 $\angle NEA$ 最大时， $\angle DEA_1$ 有最大值， A_1G 有最大值，此时点 N 与点 D 重合. 过点 A_1 作 $A_1G \perp AD$ 于点 G ，作 $A_1P \perp AB$ 于点 P ，可得四边形 AGA_1P 是矩形，因此 $A_1G = AP = AE + EP$ ，当 A_1D 取得最大值时， $\angle A_1EP$ 有最小值，在 $\text{Rt}\triangle A_1EP$ 中， $EP = A_1E \cdot \cos \angle A_1EP$ 有最大值， $A_1G = AP = AE + EP$ 有最大值，即可判断②.

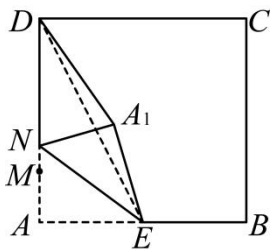
【详解】解：∵ 正方形纸片 $ABCD$ 的边长为 4dm， $AE = BE$

$$\therefore AE = BE = \frac{1}{2}AB = 2,$$

由折叠的性质可知， $A_1E = AE = 2$ ，

∴ 当点 N 在线段 MD 上运动时，点 A_1 在以 E 为圆心的圆弧上运动. 故①正确.

连接 DE ，



∴ 在正方形 $ABCD$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $AD = 4$ ， $AE = 2$ ，

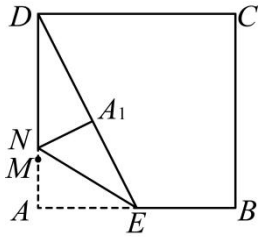
$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle ADE \text{ 中， } DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore DA_1 + A_1E \geq DE,$$

$$\therefore DA_1 \geq DE - A_1E = 2\sqrt{5} - 2,$$

$$\therefore DA_1 \text{ 的最小值为 } 2\sqrt{5} - 2. \text{ 故③正确;}$$

如图,



DA_1 达到最小值时, 点 A_1 在线段 DE 上,

由折叠可得 $\angle NA_1E = \angle A = 90^\circ$,

$$\therefore \angle DA_1N = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DA_1N = \angle A,$$

$$\therefore \angle A_1DN = \angle ADE,$$

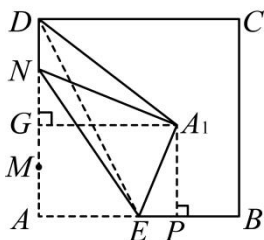
$$\therefore \triangle A_1DN \sim \triangle ADE,$$

$$\therefore \frac{A_1D}{AD} = \frac{DN}{DE},$$

$$\therefore \frac{2\sqrt{5}-2}{4} = \frac{DN}{2\sqrt{5}},$$

$$\therefore DN = 5 - \sqrt{5},$$

$$\therefore MN = AD - DN - AM = 4 - (5 - \sqrt{5}) - 1 = \sqrt{5} - 2. \text{ 故④错误.}$$



在 $\triangle A_1DE$ 中, $DE = 2\sqrt{5}$, $A_1E = AE = 2$,

$\therefore A_1D$ 随着 $\angle DEA_1$ 的增大而增大,

$$\therefore \angle DEA_1 = \angle NEA_1 - \angle NED = \angle NEA - \angle NED = \angle NEA - (\angle AED - \angle NEA) = 2\angle NEA - \angle AED,$$

∴ 当 $\angle NEA$ 最大时, $\angle DEA_1$ 有最大值, A_1G 有最大值, 此时, 点 N 与点 D 重合,

过点 A_1 作 $A_1G \perp AD$ 于点 G , 作 $A_1P \perp AB$ 于点 P ,

∵ $\angle A = 90^\circ$,

∴ 四边形 AGA_1P 是矩形,

∴ $A_1G = AP = AE + EP$,

当 A_1D 取得最大值时, $\angle AEN = \angle A_1EN$ 也是最大值,

∴ $\angle A_1EP = 180^\circ - \angle AEN - \angle A_1EN = 180^\circ - 2\angle AEN$,

∴ $\angle A_1EP$ 有最小值,

∴ 在 $\text{Rt}\triangle A_1EP$ 中, $EP = A_1E \cdot \cos \angle A_1EP$ 有最大值,

即 $A_1G = AP = AE + EP$ 有最大值,

∴ 点 A_1 到 AD 的距离最大. 故②正确.

综上所述, 正确的共有 3 个.

故选: C

【点睛】 本题考查轴对称图形的性质, 勾股定理, 相似三角形的判定及性质, 锐角三角形函数的性质, 综合运用相关知识是解题的关键.

第 II 卷 (非选择题, 共 114 分)

二、填空题 (本大题共 6 个小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 将答案填在答题卡对应的题号后的横线上)

13. 化简: $\sqrt{(-3)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 3

【解析】

【分析】 根据二次根式的性质 “ $\sqrt{a^2} = |a|$ ” 进行计算即可得.

【详解】 解: $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$,

故答案为: 3.

【点睛】 本题考查了化简二次根式, 解题的关键是掌握二次根式的性质.

14. 若一个多项式加上 $y^2 + 3xy - 4$, 结果是 $3xy + 2y^2 - 5$, 则这个多项式为_____.

【答案】 $y^2 - 1$

【解析】

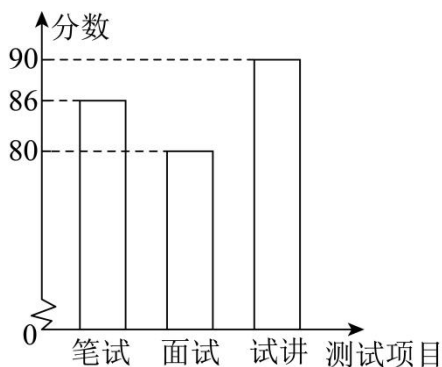
【分析】 本题考查整式的加减运算，根据题意“一个多项式加上 $y^2 + 3xy - 4$ ，结果是 $3xy + 2y^2 - 5$ ”，进行列出式子： $(3xy + 2y^2 - 5) - (y^2 + 3xy - 4)$ ，再去括号合并同类项即可.

【详解】 解：依题意这个多项式为

$$\begin{aligned} & (3xy + 2y^2 - 5) - (y^2 + 3xy - 4) \\ &= 3xy + 2y^2 - 5 - y^2 - 3xy + 4 \\ &= y^2 - 1. \end{aligned}$$

故答案为： $y^2 - 1$

15. 某校拟招聘一名优秀的数学教师，设置了笔试、面试、试讲三项水平测试，综合成绩按照笔试占30%，面试占30%，试讲占40%进行计算，小徐的三项测试成绩如图所示，则她的综合成绩为_____分.



【答案】 85.8

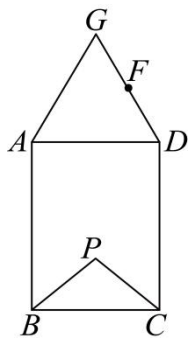
【解析】

【分析】 本题考查了加权平均数，解题关键是熟记加权平均数公式，准确进行计算. 利用加权平均数公式计算即可.

【详解】 解：她的综合成绩为 $86 \times 30\% + 80 \times 30\% + 90 \times 40\% = 85.8$ (分)；

故答案为： 85.8 .

16. 如图，四边形 $ABCD$ 是矩形， $\triangle ADG$ 是正三角形，点 F 是 GD 的中点，点 P 是矩形 $ABCD$ 内一点，且 $\triangle PBC$ 是以 BC 为底的等腰三角形，则 $\triangle PCD$ 的面积与 $\triangle FCD$ 的面积的比值是_____.



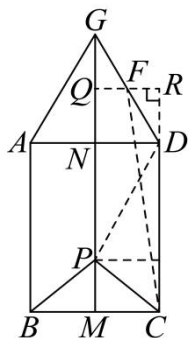
【答案】 2

【解析】

【分析】本题考查矩形的性质，正三角形的性质，等腰三角形的性质等知识点，正确设出边长表示出两个面积是解题的关键。

作辅助线如图, 设 $BC = a$, $CD = b$, 根据性质和图形表示出面积即可得到答案.

【详解】解：如图，找 BC ， AD 中点为 M ， N ，连接 MN ， GN ，连接 PD ， FC ，过 F 作 $FR \perp CD$ 交 CD 的延长线于 R 点，延长 RF ，与 GN 交于 Q 点.



设 $BC = a$, $CD = b$,

$\therefore \triangle PBC$ 是以 BC 为底的等腰三角形,

$\therefore P$ 在 MN 上,

$\therefore P$ 到 CD 的距离即为 $\frac{1}{2}a$,

$$\therefore S_{\Delta PCD} = \frac{1}{2} \times b \times \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}ab,$$

在 $\triangle GQF$ 和 $\triangle DRF$ 中

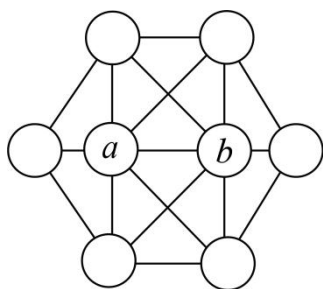
$$\begin{cases} GF = DF \\ \angle GFQ = \angle DFR \\ \angle FQG = \angle FRD = 90^\circ \end{cases},$$

$$\therefore \Delta GQF \cong_{\Delta} DRF \text{ (AAS)},$$

$$\begin{aligned}\therefore QF &= RF = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} a = \frac{1}{4} a, \\ \therefore S_{\triangle FCD} &= \frac{1}{2} \cdot CD \cdot FR = \frac{1}{2} \times b \times \frac{1}{4} a = \frac{1}{8} ab, \\ \therefore \frac{S_{\triangle PCD}}{S_{\triangle FCD}} &= \frac{\frac{1}{4} ab}{\frac{1}{8} ab} = 2,\end{aligned}$$

故答案为：2.

17. 数学活动课上，甲组同学给乙组同学出示了一个探究问题：把数字 1 至 8 分别填入如图的八个圆圈内，使得任意两个有线段相连的圆圈内的数字之差的绝对值不等于 1. 经过探究后，乙组的小高同学填出了图中两个中心圆圈的数字 a 、 b ，你认为 a 可以是_____（填上一个数字即可）.



【答案】1##8

【解析】

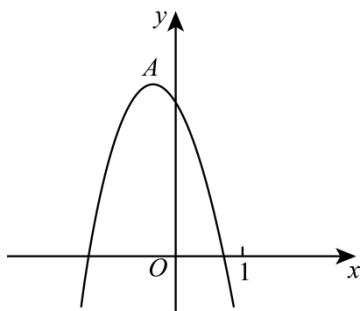
【分析】本题考查了数字规律，理解题意是解题的关键. 由于两个中心圆圈有 6 根连线，数字 1 至 8，共有 8 个数字，若 2, 3, 4, 5, 6, 7，其中任何一个数字填在中心位置，那么与其相邻的 2 个数字均不能出现在与中心圆圈相连的 6 个圆圈中，否则不满足任意两个有线段相连的圆圈内的数字之差的绝对值不等于 1，故只剩下 5 个数字可选，不满足 6 个空的圆圈需要填入，故中心圆圈只能是 1 或者 8.

【详解】解：∵ 两个中心圆圈分别有 6 根连线，数字 1 至 8，共有 8 个数字，若 2, 3, 4, 5, 6, 7，其中任何一个数字填在中心位置，那么与其相邻的 2 个数字均不能出现在与中心圆圈相连的 6 个圆圈中，故只剩下 5 个数字可选，不满足 6 个空的圆圈需要填入.

∴ 位于两个中心圆圈的数字 a 、 b ，只可能是 1 或者 8.

故答案为：1（或 8）.

18. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点 A 的坐标为 $\left(-\frac{1}{3}, n\right)$ ，与 x 轴的一个交点位于 0 和 1 之间，则以下结论：① $abc > 0$ ；② $5b + 2c < 0$ ；③若抛物线经过点 $(-6, y_1), (5, y_2)$ ，则 $y_1 > y_2$ ；④若关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 4$ 无实数根，则 $n < 4$. 其中正确结论是_____（请填写序号）.



【答案】①②④

【解析】

【分析】本题考查了二次函数的图象与系数的关系，根的判别式，二次函数图象上点的坐标特征，解题的关键是掌握二次函数的图象与性质．①利用抛物线的顶点坐标和开口方向即可判断；②利用抛物线的对称

轴求出 $a = \frac{3}{2}b$ ，根据图象可得当 $x = 1$ 时， $y = a + b + c < 0$ ，即可判断；③利用抛物线的对称轴，设

$(-6, y_1), (5, y_2)$ 两点横坐标与对称轴的距离为 d_1, d_2 ，求出距离，根据图象可得，距离对称轴越近的点的函数值越大，即可判断；④根据图象即可判断．

【详解】解：① $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点 A 的坐标为 $\left(-\frac{1}{3}, n\right)$ ，

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{b}{2a} = \frac{1}{3} > 0, \text{ 即 } ab > 0,$$

由图可知，抛物线开口方向向下，即 $a < 0$ ，

$$\therefore b < 0,$$

当 $x = 0$ 时， $y = c > 0$ ，

$\therefore abc > 0$ ，故①正确，符合题意；

② $\because$ 直线 $x = -\frac{1}{3}$ 是抛物线的对称轴，

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{b}{2a} = \frac{1}{3} > 0,$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}b$$

由图象可得：当 $x = 1$ 时， $y = a + b + c < 0$ ，

$\therefore \frac{5}{2}b + c < 0$ ，即 $5b + 2c < 0$ ，故②正确，符合题意；

③ $\because$ 直线 $x = -\frac{1}{3}$ 是抛物线的对称轴，

设 $(-6, y_1), (5, y_2)$ 两点横坐标与对称轴的距离为 d_1, d_2 ，

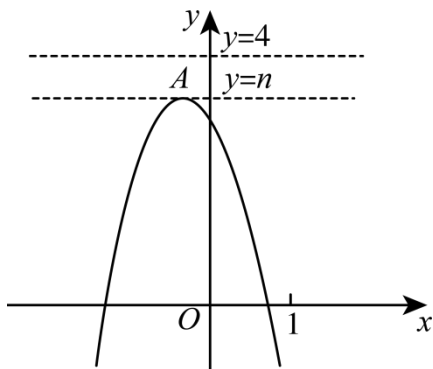
$$\text{则 } d_1 = \left| -6 - \left(-\frac{1}{3} \right) \right| = \frac{17}{3}, \quad d_2 = \left| 5 - \left(-\frac{1}{3} \right) \right| = \frac{16}{3},$$

$$\therefore d_2 < d_1,$$

根据图象可得，距离对称轴越近的点的函数值越大，

$\therefore y_1 < y_2$ ，故③错误，不符合题意；

④如图，



$\because$ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 4$ 无实数根，

$\therefore n < 4$ ，故④正确，符合题意.

故答案为：①②④

三、解答题（本大题共 7 小题，共 90 分. 解答应写出文字说明、证明过程或推演步骤）

19. (1) 计算： $\sqrt[3]{-8} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - 2\cos 60^\circ$ ；

(2) 解不等式组：
$$\begin{cases} -2x + 3 \leq -5 & \text{①} \\ \frac{x-1}{2} < \frac{x}{4} + 1 & \text{②} \end{cases}$$

【答案】 (1) 1, (2) $4 \leq x < 6$

【解析】

【分析】 (1) 先计算立方根、负整数指数幂、锐角三角函数，再进行实数的加减混合运算即可.

(2) 分别求出不等式的解集，再根据“同大取大，同小取小，大小小大中间找，大大小小找不到”的确定

不等式组的解集即可.

【详解】(1) 原式: $\sqrt[3]{-8} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - 2\cos 60^\circ$

$$= -2 + (2^{-1})^{-2} - 2 \times \frac{1}{2}$$

$$= -2 + 2^2 - 1$$

$$= -3 + 4$$

$$= 1.$$

(2) 解:
$$\begin{cases} -2x + 3 \leq -5 & \text{①} \\ \frac{x-1}{2} < \frac{x}{4} + 1 & \text{②} \end{cases}$$

由① $-2x + 3 \leq -5$, 得 $x \geq 4$,

由② $\frac{x-1}{2} < \frac{x}{4} + 1$, 得 $x < 6$,

$\therefore$ 不等式组的解集为 $4 \leq x < 6$.

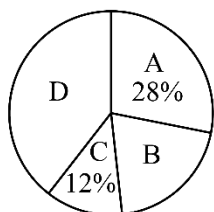
【点睛】本题考查实数的混合运算、立方根、负整数指数幂、特殊角的锐角三角函数、解一元一次不等式组, 熟练掌握立方根、负整数指数幂、特殊角的锐角三角函数和解一元一次不等式组的方法是解题的关键.

20. 2024 年中国龙舟公开赛 (四川·德阳站), 在德阳旌湖沱江桥水域举行, 预计来自全国各地 1000 余名选手将参赛. 旌湖两岸高颜值的绿色生态景观绿化带“德阳之窗”将迎接德阳市民以及来自全国各地的朋友近距离的观看比赛. 比赛设置男子组、女子组、本地组三个组别, 其中男子组将进行 A: 100 米直道竞速赛, B: 200 米直道竞速赛, C: 500 米直道竞速赛, D: 3000 米绕标赛. 为了了解德阳市民对于这四个比赛项目的关注程度, 随机对部分市民进行了问卷调查 (参与问卷调查的每位市民只能选择其中一个项目), 将调查得到的数据绘制成数据统计表和扇形统计图 (表、图都未完全制作完成):

市民最关注的比赛项目人数统计表

比赛项目	A	B	C	D
关注人数	42	30	a	b

市民最关注的比赛项目
人数分布扇形统计图



(1) 直接写出 a 、 b 的值和 D 所在扇形圆心角的度数;

(2) 若当天观看比赛的市民有 10000 人，试估计当天观看比赛的市民中关注哪个比赛项目的人数最多？大约有多少人？

(3) 为了缓解比赛当天城市交通压力，维护交通秩序，德阳交警旌阳支队派出 4 名交警（2 男 2 女）对该路段进行值守，若在 4 名交警中任意抽取 2 名交警安排在同一路口执勤，请用列举法（画树状图或列表）求出恰好抽到的两名交警性别相同的概率。

【答案】(1) $a = 18$, $b = 60$, 144°

(2) D , 4000 (3) $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】本题考查统计表和扇形统计图，用样本估计总体，树状图求概率等知识，正确识图是解题的关键。根据两个图标识图求解即可。

【小问 1 详解】

解：根据两图中 A 的数据可得总人数为： $42 \div 28\% = 150$ （人），

$a = 150 \times 12\% = 18$ （人），

$b = 150 - 42 - 30 - 18 = 60$ （人），

D 所在扇形圆心角的度数为： $\frac{60}{150} \times 100\% \times 360^\circ = 144^\circ$

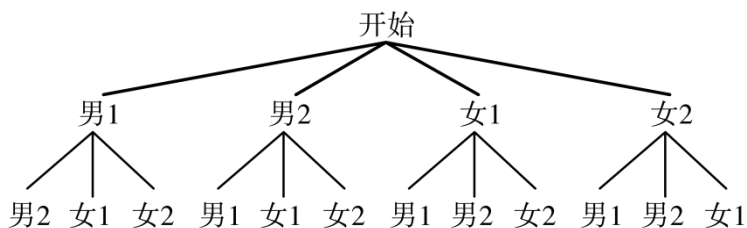
【小问 2 详解】

D ：3000 米绕标赛的关注人数最多，为 $\frac{60}{150} \times 100\% \times 10000 = 4000$ （人）

答：估计当天观看比赛的市民中关注 D ：3000 米绕标赛比赛项目的人数最多，大约有 4000 人。

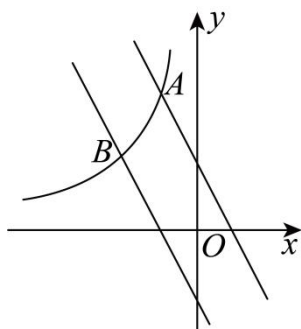
【小问 3 详解】

解：根据题意，画出树状图如下图：



根据树状图可得，共有 12 种等可能得结果，其中恰好抽到的两名交警性别相同的概率为： $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ 。

21. 如图，一次函数 $y = -2x + 2$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x < 0)$ 的图象交于点 $A(-1, m)$ 。



(1) 求 m 的值和反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的解析式;

(2) 将直线 $y = -2x + 2$ 向下平移 h 个单位长度 ($h > 0$) 后得直线 $y = ax + b$, 若直线 $y = ax + b$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x < 0)$ 的图象的交点为 $B(n, 2)$, 求 h 的值, 并结合图象求不等式 $\frac{k}{x} < ax + b$ 的解集.

【答案】(1) $m = 4$; 反比例函数的解析式为 $y = -\frac{4}{x}$

(2) $h = 4$; 不等式 $\frac{k}{x} < ax + b$ 的解集为 $x < -2$

【解析】

【分析】 本题主要考查反比例函数与一次函数的交点问题:

(1) 把 $A(-1, m)$ 代入 $y = -2x + 2$ 求出 $m = 4$, 得 $A(-1, 4)$, 从而可求出 k 的值;

(2) 由平移得直线 $y = ax + b$ 与直线 $y = -2x + 2$ 平行, 得 $y = -2x + b$, 把点 $B(n, 2)$ 代入 $y = -\frac{4}{x}$ 得 $n = -2$, 得 $B(-2, 2)$, 代入 $y = -2x + b$, 求出 $b = -2$, 得出 $h = 2 - (-2) = 4$; 由图象得当 $x < -2$ 时, $y = \frac{k}{x}$

在直线 $y = ax + b$ 的下方, 故可求出不等式 $\frac{k}{x} < ax + b$ 的解集.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 一次函数 $y = -2x + 2$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x < 0)$ 的图象交于点 $A(-1, m)$,

$$\therefore m = -2 \times (-1) + 2 = 2 + 2 = 4;$$

$$\therefore A(-1, 4),$$

$$\text{把 } A(-1, 4) \text{ 代入 } y = \frac{k}{x}, \text{ 得: } 4 = \frac{k}{-1},$$

$$\therefore k = -4,$$

∴ 反比例函数的解析式为： $y = -\frac{4}{x}$ ；

【小问 2 详解】

解： ∵ 直线 $y = ax + b$ 是将直线 $y = -2x + 2$ 向下平移 h 个单位长度 ($h > 0$) 后得到的，

∴ 直线 $y = ax + b$ 与直线 $y = -2x + 2$ 平行，

∴ $a = -2$ ，

∴ $y = -2x + b$ ，

∵ 直线 $y = ax + b$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x < 0)$ 的图象的交点为 $B(n, 2)$ ，

把 $B(n, 2)$ 代入 $y = -\frac{4}{x}$ 得， $2 = -\frac{4}{n}$ ，

解得， $n = -2$ ，

∴ $B(-2, 2)$ ，

把 $B(-2, 2)$ 代入 $y = -2x + b$ ， 得： $2 = -2 \times (-2) + b$ ，

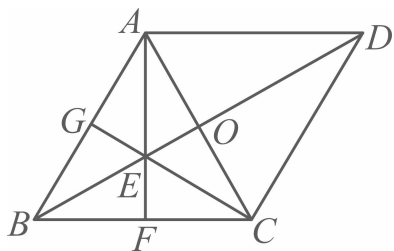
∴ $b = -2$ ，

∴ $h = 2 - (-2) = 4$ ；

由图象知， 当 $x < -2$ 时， $y = \frac{k}{x}$ 在直线 $y = ax + b$ 的下方，

∴ 不等式 $\frac{k}{x} < ax + b$ 的解集为 $x < -2$

22. 如图， 在菱形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = 60^\circ$ ， 对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， 点 F 为 BC 的中点， 连接 AF 与 BD 相交于点 E ， 连接 CE 并延长交 AB 于点 G 。



(1) 证明： $\triangle BEF \sim \triangle BCO$ ；

(2) 证明： $\triangle BEG \cong \triangle AEG$ 。

【答案】 (1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】本题考查了菱形的性质、等边三角形的判定与性质、相似三角形的判定、三角形全等的判定等知识，熟练掌握菱形的性质和相似三角形的判定是解题关键.

(1) 先根据菱形的性质可得 $AB = BC, AC \perp BD$ ，再证出 $\triangle ABC$ 是等边三角形，根据等边三角形的性质可得 $AF \perp BC$ ，然后根据相似三角形的判定即可得证；

(2) 先根据等边三角形的性质可得 $CG \perp AB$ ，从而可得 $AG = BG$ ，再根据 SAS 定理即可得证.

【小问 1 详解】

证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore AB = BC, AC \perp BD,$$

$$\therefore \angle ABC = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\because$ 点 F 为 BC 的中点，

$$\therefore AF \perp BC,$$

$$\therefore \angle BFE = \angle BOC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle EBF = \angle CBO,$$

$$\therefore \triangle BEF \sim \triangle BCO.$$

【小问 2 详解】

证明： $\because \triangle ABC$ 是等边三角形， $AF \perp BC$ ， $AC \perp BD$ ，

$$\therefore CG \perp AB,$$

$$\therefore \angle AGE = \angle BGE = 90^\circ$$

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$$\therefore AG = BG,$$

在 $\triangle BEG$ 和 $\triangle AEG$ 中，

$$\begin{cases} AG = BG \\ \angle AGE = \angle BGE = 90^\circ, \\ GE = GE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BEG \cong \triangle AEG (\text{SAS}).$$

23. 罗江糯米咸鹅蛋是德阳市非物质文化遗产之一，至今有 200 多年历史，采用罗江当地林下养殖的鹅产的散养鹅蛋，经过传统秘方加以糯米、青豆等食材以 16 道工序手工制作而成. 为了迎接端午节，进一步提升糯米咸鹅蛋的销量，德阳某超市将购进的糯米咸鹅蛋和肉粽进行组合销售，有 A 、 B 两种组合方式，其中 A 组合有 4 枚糯米咸鹅蛋和 6 个肉粽， B 组合有 6 枚糯米咸鹅蛋和 10 个肉粽. A 、 B 两种组合的进价和售价如下表：

价格	A	B
进价(元/件)	94	146
售价(元/件)	120	188

(1) 求每枚糯米咸鸭蛋和每个肉粽的进价分别为多少？

(2) 根据市场需求，超市准备的 B 种组合数量是 A 种组合数量的 3 倍少 5 件，且两种组合的总件数不超过 95 件，假设准备的两种组合全部售出，为使利润最大，该超市应准备多少件 A 种组合？最大利润为多少？

【答案】(1) 16 元， 6 元

(2) 25 件， 3590 元

【解析】

【分析】本题考查二元一次方程组的应用、不等式的应用和一次函数的性质，根据题意列出式子是本题的关键.

(1) 根据表格与“ A 组合有 4 枚糯米咸鸭蛋和 6 个肉粽， B 组合有 6 枚糯米咸鸭蛋和 10 个肉粽”即可列方程求解；

(2) 设 A 种组合的数量，表示出 B 种组合数量，根据“两种组合的总件数不超过 95 件”列不等式求出 A 种组合的数量的最大值，再根据题意表示出利润的表达式，根据一次函数的性质即可求得结果.

【小问 1 详解】

解：设每枚糯米咸鸭蛋的进价 x 元，每个肉粽的进价 y 元.

根据题意可得：

$$\begin{cases} 4x + 6y = 94 \\ 6x + 10y = 146 \end{cases},$$

解得：

$$\begin{cases} x = 16 \\ y = 6 \end{cases},$$

答：每枚糯米咸鸭蛋的进价 16 元，每个肉粽的进价 6 元.

【小问 2 详解】

解：设该超市应准备 m 件 A 种组合，则 B 种组合数量是 $(3m-5)$ 件，利润为 W 元，

根据题意得： $m + (3m-5) \leq 95$,

解得： $m \leq 25$,

则利润 $W = (120 - 94)m + (188 - 146)(3m - 5) = 152m - 210$,

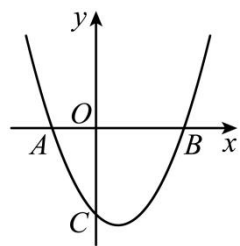
可以看出利润 W 是 m 的一次函数, W 随着 m 的增大而增大,

$\therefore$ 当 m 最大时, W 最大,

即当 $m = 25$ 时, $W = 152 \times 25 - 210 = 3590$,

答: 为使利润最大, 该超市应准备 25 件 A 种组合, 最大利润 3590 元.

24. 如图, 抛物线 $y = x^2 - x + c$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 和点 B , 与 y 轴交于点 C .



(1) 求抛物线的解析式;

(2) 当 $0 < x \leq 2$ 时, 求 $y = x^2 - x + c$ 的函数值的取值范围;

(3) 将抛物线的顶点向下平移 $\frac{3}{4}$ 个单位长度得到点 M , 点 P 为抛物线的对称轴上一动点, 求 $PA + \frac{\sqrt{5}}{5}PM$

的最小值.

【答案】(1) $y = x^2 - x - 2$

(2) $-\frac{9}{4} \leq y \leq 0$

(3) $PA + \frac{\sqrt{5}}{5}PM$ 的最小值为: $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】(1) 直接利用待定系数法求解二次函数的解析式即可;

(2) 求解 $y = x^2 - x - 2$ 的对称轴为直线 $x = -\frac{-1}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$, 而 $0 < x \leq 2$, 再利用二次函数的性质可得答案;

(3) 求解 $C(0, -2)$, $B(2, 0)$, 可得 $AB = 3$, 求解直线 AC 为 $y = -2x - 2$, 及 $M\left(\frac{1}{2}, -3\right)$, 证明 M 在直

线 AC 上, 如图, 过 P 作 $PG \perp AC$ 于 G , 连接 MB , 过 P 作 $PH \perp MB$ 于 H , 可得 $AC = \sqrt{5}$,

$\sin \angle ACO = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 证明 $\angle AMP = \angle ACO$, 可得 $PG = \frac{\sqrt{5}}{5}PM$, 可得

$$PA + \frac{\sqrt{5}}{5} PM = PA + PG = PA + PH \leq AH, \text{ 再进一步求解即可.}$$

【小问 1 详解】

解： $\because$ 抛物线 $y = x^2 - x + c$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$,

$$\therefore 1 + 1 + c = 0,$$

解得： $c = -2$,

$$\therefore \text{抛物线的解析式为: } y = x^2 - x - 2;$$

【小问 2 详解】

解： $\because y = x^2 - x - 2$ 的对称轴为直线 $x = -\frac{-1}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$, 而 $0 < x \leq 2$,

$$\therefore \text{函数最小值为: } y = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{9}{4},$$

当 $x = 0$ 时, $y = -2$,

当 $x = 2$ 时, $y = 4 - 2 - 2 = 0$,

$$\therefore \text{函数值的范围为: } -\frac{9}{4} \leq y \leq 0;$$

【小问 3 详解】

解： $\because y = x^2 - x - 2$,

当 $x = 0$ 时, $y = -2$,

$$\therefore C(0, -2),$$

当 $y = x^2 - x - 2 = 0$ 时,

解得: $x_1 = -1, x_2 = 2$,

$$\therefore B(2, 0),$$

$$\therefore AB = 3,$$

设直线 AC 为 $y = kx - 2$,

$$\therefore -k - 2 = 0,$$

$$\therefore k = -2,$$

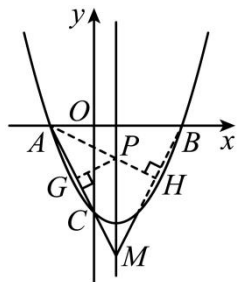
$\therefore$ 直线 AC 为 $y = -2x - 2$,

$\therefore$ 抛物线的顶点向下平移 $\frac{3}{4}$ 个单位长度得到点 M ，而顶点为 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ ，

$$\therefore M\left(\frac{1}{2}, -3\right),$$

$\therefore M$ 在直线 AC 上，

如图，过 P 作 $PG \perp AC$ 于 G ，连接 MB ，过 P 作 $PH \perp MB$ 于 H ，



$$\therefore A(-1, 0), C(0, -2),$$

$$\therefore AC = \sqrt{5}, \sin \angle ACO = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$\therefore$ 对称轴与 y 轴平行，

$$\therefore \angle AMP = \angle ACO,$$

$$\therefore \sin \angle AMP = \frac{PG}{PM} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore PG = \frac{\sqrt{5}}{5} PM,$$

由抛物线的对称性可得： $PG = PH$ ， $\angle MAB = \angle MBA$ ，

$$\therefore PA + \frac{\sqrt{5}}{5} PM = PA + PG = PA + PH \leq AH,$$

当 A, P, H 三点共线时取等号，

$$\therefore \sin \angle MAB = \frac{OC}{AC} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \sin \angle ABH = \frac{AH}{AB},$$

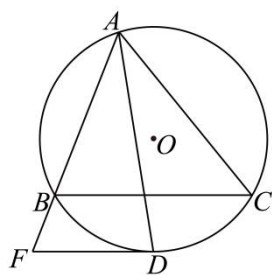
$$\therefore \frac{AH}{3} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore AH = \frac{6\sqrt{5}}{5},$$

即 $PA + \frac{\sqrt{5}}{5} PM$ 的最小值为: $\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

【点睛】 本题考查的是利用待定系数法求解二次函数的解析式，二次函数的性质，利用轴对称的性质求解线段和的最小值，锐角三角函数的应用，做出合适的辅助线是解本题的关键.

25. 已知 $\odot O$ 的半径为 5, B 、 C 是 $\odot O$ 上两定点, 点 A 是 $\odot O$ 上一动点, 且 $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle BAC$ 的平分线交 $\odot O$ 于点 D .



(1) 证明: 点 D 为 $\widehat{BC}$ 上一定点;

(2) 过点 D 作 BC 的平行线交 AB 的延长线于点 F .

①判断 DF 与 $\odot O$ 的位置关系, 并说明理由;

②若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 求 DF 的取值范围.

【答案】 (1) 证明见解析

(2) ① DF 与 $\odot O$ 相切, 理由见解析; ② DF 的取值范围为 $\frac{5\sqrt{3}}{2} < DF < 5\sqrt{3}$.

【解析】

【分析】 (1) 由 $\angle BAC$ 的平分线交 $\odot O$ 于点 D , $\angle BAC = 60^\circ$, 可得 $\widehat{BD} = \widehat{CD}$, 结合 B 、 C 是 $\odot O$ 上两定点, 可得结论;

(2) ①如图, 连接 OD , 证明 $OD \perp BC$, 结合 $BC \parallel DF$, 可得 $OD \perp DF$, 从而可得结论;

②分情况讨论: 如图, 当 $\angle ABC = 90^\circ$ 时, 可得 $DF = BQ = \frac{5\sqrt{3}}{2}$; 如图, 连接 BD , 当 $\angle ACB = 90^\circ$, 可

得 $DF = 2BQ = 5\sqrt{3}$, 从而可得答案.

【小问 1 详解】

证明: $\because \angle BAC$ 的平分线交 $\odot O$ 于点 D , $\angle BAC = 60^\circ$,

$\therefore \angle BAD = \angle CAD = 30^\circ$,

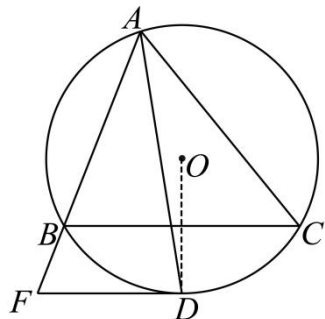
$\therefore \widehat{BD} = \widehat{CD}$,

$\because B, C$ 是 $\odot O$ 上两定点,

$\therefore$ 点 D 为 $\widehat{BC}$ 的中点, 是一定点;

【小问 2 详解】

解: ①如图, 连接 OD ,



$$\because \widehat{BD} = \widehat{CD},$$

$$\therefore OD \perp BC,$$

$$\because BC \parallel DF,$$

$$\therefore OD \perp DF,$$

$$\because OD \text{ 为半径,}$$

$$\therefore DF \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线;}$$

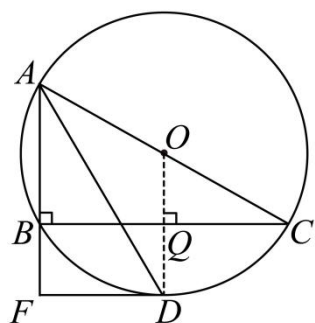
②如图, 当 $\angle ABC = 90^\circ$ 时,

$$\therefore AC \text{ 为直径, } AC = 10,$$

$$\because \angle BAC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = 30^\circ,$$

$$\therefore AB = 5, \quad BC = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3},$$



$$\because OD \perp BC,$$

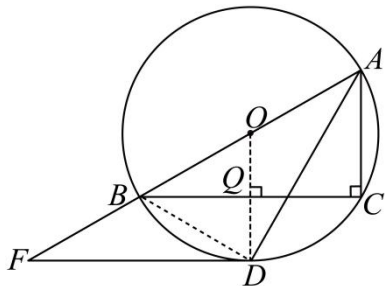
$$\therefore BQ = CQ = \frac{5\sqrt{3}}{2},$$

$$\because \angle BQD = 90^\circ = \angle FQD = \angle ABC = \angle FBQ,$$

$\therefore$ 四边形 $BFDQ$ 为矩形,

$$\therefore DF = BQ = \frac{5\sqrt{3}}{2};$$

如图, 连接 BD , 当 $\angle ACB = 90^\circ$,



$$\because \angle ACB = 90^\circ, \quad OD \perp BC,$$

$$\therefore OD \parallel AC,$$

$$\therefore \angle BOD = \angle BAC = 60^\circ,$$

$$\because OB = OD,$$

$\therefore \triangle BOD$ 为等边三角形,

$$\therefore OQ = QD,$$

同理可得: $BQ = \frac{5\sqrt{3}}{2}$,

$$\therefore BC \parallel DT,$$

$$\therefore \triangle OBQ \sim \triangle OFD,$$

$$\therefore \frac{OQ}{OD} = \frac{BQ}{DF} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore DF = 2BQ = 5\sqrt{3},$$

∴ 当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, DF 的取值范围为 $\frac{5\sqrt{3}}{2} < DF < 5\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查的是勾股定理的应用，圆周角定理的应用，切线的判定与性质，相似三角形的判定与性质，做出合适的辅助线，清晰的分类讨论是解本题的关键.