

广安市 2024 年初中学业水平考试试题

数学

注意事项：

1. 本试卷分为试题卷（1-4 页）和答题卡两部分。考试时间 120 分钟，满分 120 分。
2. 考生答题前，请先将姓名、准考证号等信息用黑色墨迹签字笔填写在答题卡上的指定位置，待监考教师粘贴条形码后，认真核对条形码上的姓名、准考证号与自己准考证上的信息是否一致。
3. 请将选择题答案用 2B 铅笔填涂在答题卡上的相应位置，非选择题用 0.5 毫米黑色字迹签字笔答在答题卡上的相应位置。超出答题区域书写的答案无效，在草稿纸、试题卷上答题无效；作图题应先用铅笔画，确定不修改后，再用黑色字迹签字笔描黑。
4. 考试结束，监考人员必须将缺考学生和参考学生的答题卡、试题卷一并收回。

一、选择题（每小题只有一个选项符合题意，请将所选选项填涂在答题卡相应位置上。本大题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 下列各数最大的是（ ）

- A. -2 B. $-\frac{1}{2}$ C. 0 D. 1

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了有理数的大小比较，一般地，正数大于零，零大于负数，两个负数，绝对值大的反而小。把选项中的 4 个数按从小到大排列，即可得出最大的数。

【详解】解：∵ $-2 < -\frac{1}{2} < 0 < 1$,

∴ 最大的数是 1

故选：D.

2. 代数式 $-3x$ 的意义可以是（ ）

- A. -3 与 x 的和 B. -3 与 x 的差 C. -3 与 x 的积 D. -3 与 x 的商

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了代数式的意义，用语言表达代数式的意义，一定要理清代数式中含有的各种运算及其顺序。根据 $-3x$ 中的运算关系解答即可。

【详解】解：代数式 $-3x$ 的意义可以是 -3 与 x 的积。

故选 C.

3. 下列运算中，正确的是 ()

A. $a^2 + a^3 = a^5$ B. $(-2a^2)^3 = -8a^6$ C. $(a-1)^2 = a^2 - 1$ D. $a^8 \div a^4 = a^2$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查整式的运算，根据合并同类项法则、积的乘方运算法则、完全平方公式和同底数幂的除法运算法则逐项判断即可解答.

【详解】解：A、 a^2 和 a^3 不是同类项，不能加减，故原计算错误，不符合题意；

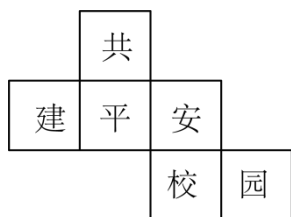
B、 $(-2a^2)^3 = -8a^6$ ，计算正确，符合题意；

C、 $(a-1)^2 = a^2 - 2a + 1$ ，故原计算错误，不符合题意；

D、 $a^8 \div a^4 = a^4$ ，故原计算错误，不符合题意；

故选：B.

4. 将“共建平安校园”六个汉字分别写在某正方体的表面上，下图是它的一种展开图，则在原正方体上，与“共”字所在面相对的面上的汉字是 ()



A. 校 B. 安 C. 平 D. 园

【答案】A

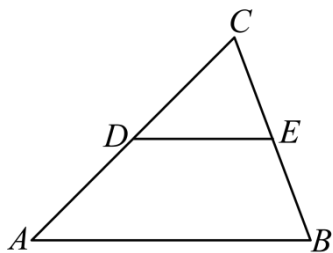
【解析】

【分析】此题考查正方体相对面上的字. 根据正方体相对面之间间隔一个正方形解答.

【详解】解：与“共”字所在面相对面上的汉字是“校”，

故选：A.

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D ， E 分别是 AC ， BC 的中点，若 $\angle A = 45^\circ$ ， $\angle CED = 70^\circ$ ，则 $\angle C$ 的度数为 ()



- A. 45° B. 50° C. 60° D. 65°

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了三角形中位线定理、平行线的性质定理，三角形的内角和定理，熟记性质并准确识图是解题的关键。先证明 $DE \parallel AB$ ，可得 $\angle CDE = \angle A = 45^\circ$ ，再利用三角形的内角和定理可得答案。

【详解】解： $\because$ 点 D ， E 分别是 AC ， BC 的中点，

$$\therefore DE \parallel AB,$$

$$\therefore \angle A = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE = \angle A = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CED = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 180^\circ - 45^\circ - 70^\circ = 65^\circ,$$

故选 D

6. 下列说法正确的是（ ）

A. 将 580000 用科学记数法表示为： 5.8×10^4

B. 在 8，6，3，5，8，8 这组数据中，中位数和众数都是 8

C. 甲乙两组同学参加“环保知识竞赛”，若甲乙两组同学的平均成绩相同，甲组同学成绩的方差 $S_{\text{甲}}^2 = 1.2$ ，乙组同学成绩的方差 $S_{\text{乙}}^2 = 0.05$ ，则甲组同学的成绩较稳定

D. “五边形的内角和是 540° ” 是必然事件

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了多边形的内角和定理，科学记数法，众数和中位数的定义，方差的意义等知识。根据多边形的内角和定理，科学记数法，众数和中位数的定义，方差的意义判断即可。

【详解】解：A、将 580000 用科学记数法表示为： 5.8×10^5 ，故本选项不符合题意；

B、这列数据从小到大排列为 3，5，6，8，8，8 中，8 出现了 3 次，故众数是 8，中位数是 $\frac{6+8}{2} = 7$ ，

故本选项不符合题意；

C、 $0.05 < 1.2$ ，则 $S_{乙}^2 < S_{甲}^2$ ，则乙组同学的成绩较稳定，故本选项不符合题意；

D、“五边形的内角和是 540° ”是必然事件，故本选项符合题意.

故选：D.

7. 若关于 x 的一元二次方程 $(m+1)x^2 - 2x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，则 m 的取值范围是 ()

A. $m < 0$ 且 $m \neq -1$

B. $m \geq 0$

C. $m \leq 0$ 且 $m \neq -1$

D. $m < 0$

【答案】A

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程根的判别式，对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ，若 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ，则方程有两个不相等的实数根，若 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ，则方程有两个相等的实数根，若 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ，则方程没有实数根. 由关于 x 的一元二次方程 $(m+1)x^2 - 2x + 1 = 0$ 两个不相等的实数根，可得 $\Delta > 0$ 且 $m+1 \neq 0$ ，解此不等式组即可求得答案.

【详解】 解： $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $(m+1)x^2 - 2x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4(m+1) > 0,$$

解得： $m < 0$,

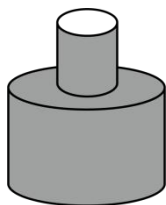
$\because m+1 \neq 0$,

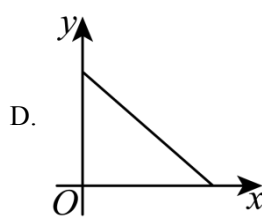
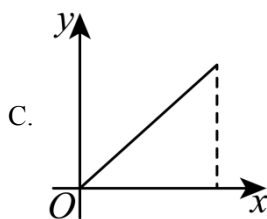
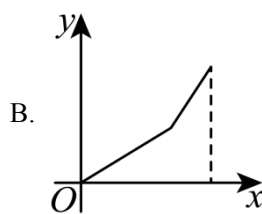
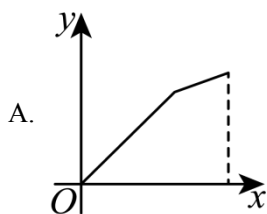
$\therefore m \neq -1$,

$\therefore m$ 的取值范围是： $m < 0$ 且 $m \neq -1$.

故选：A.

8. 向如图所示的空容器内匀速注水，从水刚接触底部时开始计时，直至把容器注满. 在注水过程中，设容器内底部所受水的压强为 y (单位：帕)，时间为 x (单位：秒)，则 y 关于 x 的函数图象大致为 ()





【答案】B

【解析】

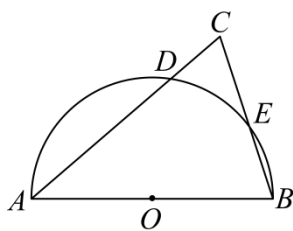
【分析】此题主要考查了函数图象. 由于压强与水面的高度成正比, 而上下两个容器粗细不同, 那么水面高度 h 随时间 x 变化而分两个阶段.

【详解】解: 最下面的容器较粗, 那么第一个阶段的函数图象水面高度 h 随时间 x 的增大而增长缓慢, 用时较长, 即压强 y 随时间 x 的增大而增长缓慢, 用时较长,

最上面容器最小, 则压强 y 随时间 x 的增大而增长变快, 用时最短.

故选: B.

9. 如图, 在等腰三角形 ABC 中, $AB = AC = 10$, $\angle C = 70^\circ$, 以 AB 为直径作半圆, 与 AC , BC 分别相交于点 D , E , 则 $\widehat{DE}$ 的长度为 ()



A. $\frac{\pi}{9}$

B. $\frac{5\pi}{9}$

C. $\frac{10\pi}{9}$

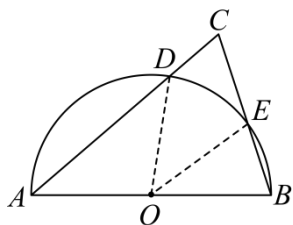
D. $\frac{25\pi}{9}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了求弧长. 根据等腰三角形的性质和三角形的内角和定理求得 $\angle A$ 的度数, 证明 $OE \parallel AC$, 再由 $OA = OD$, 再由等腰三角形的性质和平行线的性质求得 $\angle DOE$ 的度数, 利用弧长公式即可求解.

【详解】解: 连接 OD , OE ,



$$\therefore AB = AC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle C = 70^\circ,$$

$$\therefore OE = OB,$$

$$\therefore \angle OEB = \angle B = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle OEB = \angle C = 70^\circ$$

$$\therefore OE \parallel AC,$$

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A + \angle ABC + \angle C = 180^\circ$,

$$\therefore \angle A = 180^\circ - \angle ABC - \angle C = 180^\circ - 70^\circ - 70^\circ = 40^\circ,$$

$$\text{又 } OA = OD = \frac{1}{2} AB = 5,$$

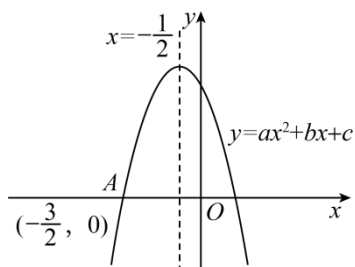
$$\therefore OE \parallel AC$$

$$\therefore \angle A = \angle ADO = 40^\circ = \angle DOE,$$

$$\therefore \widehat{DE} \text{ 的长度为 } \frac{40\pi \times 5}{180} = \frac{10\pi}{9},$$

故选: C.

10. 如图, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, $a \neq 0$) 的图象与 x 轴交于点 $A\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$, 对称轴是直线 $x = -\frac{1}{2}$, 有以下结论: ① $abc < 0$; ②若点 $(-1, y_1)$ 和点 $(2, y_2)$ 都在抛物线上, 则 $y_1 < y_2$; ③ $am^2 + bm \leq \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b$ (m 为任意实数); ④ $3a + 4c = 0$. 其中正确的有 ()



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】B

【解析】

【分析】根据二次函数图像的性质、二次函数图像与系数的关系以及与 x 轴交点问题逐项分析判断即可.

【详解】解：由图可知，二次函数开口方向向下，与 y 轴正半轴交于一点，

$$\therefore a < 0, c > 0.$$

$$\therefore -\frac{b}{2a} < 0,$$

$$\therefore b < 0.$$

$$\therefore abc > 0. \text{故①错误;}$$

$$\therefore \text{对称轴是直线 } x = -\frac{1}{2}, \text{ 点 } (-1, y_1) \text{ 和点 } (2, y_2) \text{ 都在抛物线上,}$$

$$\text{而 } -\frac{1}{2} - (-1) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} < 2 - \left(-\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{2},$$

$$\therefore y_1 > y_2. \text{故②错误;}$$

$$\text{当 } x = m \text{ 时, } y = am^2 + bm + c,$$

$$\text{当 } x = -\frac{1}{2} \text{ 时, 函数取最大值 } \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}b + c,$$

$$\therefore \text{对于任意实数 } m \text{ 有:}$$

$$am^2 + bm + c \leq \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}b + c,$$

$$\therefore am^2 + bm \leq \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b, \text{ 故③正确;}$$

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore b = a.$$

$$\text{当 } x = -\frac{3}{2} \text{ 时, } y = 0,$$

$$\therefore \frac{9}{4}a - \frac{3}{2}b + c = 0.$$

$$\therefore 9a - 6b + 4c = 0, \text{ 即 } 3a + 4c = 0,$$

$$\text{故④正确.}$$

综上所述，正确的有③④.

故选：B.

【点睛】本题考查了二次函数图像与系数之间的关系，解题的关键在于通过图像判断对称轴，开口方向以及坐标轴的交点.

二、填空题（请把最简答案填写在答题卡相应位置. 本大题共 6 个小题，每小题 3 分，共 18 分）

11. $3 - \sqrt{9} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 0

【解析】

【分析】 本题考查的是实数的混合运算，先计算算术平方根，再计算减法运算即可.

【详解】 解： $3 - \sqrt{9} = 3 - 3 = 0$,

故答案为： 0

12. 分解因式： $a^3 - 9a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $a(a+3)(a-3)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了分解因式，先提取公因式 a 再利用公式法即可得到答案.

【详解】 解： $a^3 - 9a = a(a+3)(a-3)$,

故答案为： $a(a+3)(a-3)$.

13. 若 $x^2 - 2x - 3 = 0$ ，则 $2x^2 - 4x + 1 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 7

【解析】

【分析】 本题考查了求代数式的值. 对已知等式变形得到 $2x^2 - 4x = 6$ ，再整体代入计算求解即可.

【详解】 解： $\because x^2 - 2x - 3 = 0$,

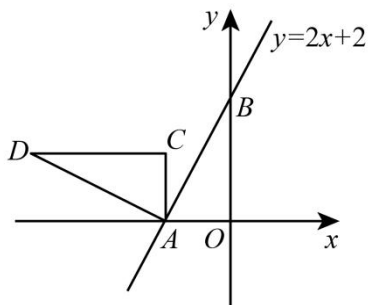
$$\therefore x^2 - 2x = 3,$$

$$\therefore 2x^2 - 4x = 6,$$

$$\therefore 2x^2 - 4x + 1 = 6 + 1 = 7,$$

故答案为： 7.

14. 如图，直线 $y = 2x + 2$ 与 x 轴、 y 轴分别相交于点 A ， B ，将 $\triangle AOB$ 绕点 A 逆时针方向旋转 90° 得到 $\triangle ACD$ ，则点 D 的坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

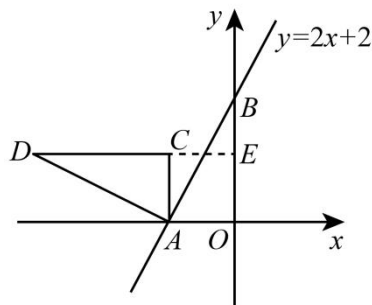


【答案】 $(-3,1)$

【解析】

【分析】 本题考查一次函数图象与坐标轴的交点，旋转的性质，正方形的判定和性质等，延长 DC 交 y 轴于点 E ，先求出点 A 和点 B 的坐标，再根据旋转的性质证明四边形 $OACE$ 是正方形，进而求出 DE 和 OE 的长度即可求解.

【详解】 解：如图，延长 DC 交 y 轴于点 E ，



$\because y = 2x + 2$ 中，令 $x = 0$ ，则 $y = 2$ ，令 $y = 2x + 2 = 0$ ，解得 $x = -1$ ，

$\therefore A(-1,0)$ ， $B(0,2)$ ，

$\therefore OA = 1$ ， $OB = 2$ ，

$\because \triangle AOB$ 绕点 A 逆时针方向旋转 90° 得到 $\triangle ACD$ ，

$\therefore \angle ACD = \angle AOB = \angle OAC = 90^\circ$ ， $OA = OC = 1$ ， $OB = CD = 2$ ，

$\therefore$ 四边形 $OACE$ 是正方形.

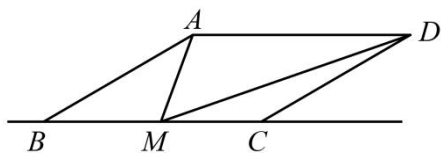
$\therefore CE = OE = OA = 1$ ，

$\therefore DE = CD + CE = 2 + 1 = 3$ ，

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(-3,1)$.

故答案为： $(-3,1)$.

15. 如图，在 $ABCD$ 中， $AB = 4$ ， $AD = 5$ ， $\angle ABC = 30^\circ$ ，点 M 为直线 BC 上一动点，则 $MA + MD$ 的最小值为_____.



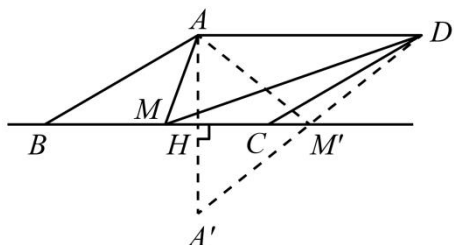
【答案】 $\sqrt{41}$

【解析】

【分析】如图，作A关于直线BC的对称点A'，连接A'D交BC于M'，则AH = A'H，AH ⊥ BC，AM' = A'M'，当M, M'重合时，MA + MD最小，最小值为A'D，再进一步结合勾股定理求解即可。

【详解】解：如图，作A关于直线BC的对称点A'，连接A'D交BC于M'，则AH = A'H，AH ⊥ BC，AM' = A'M'，

∴当M, M'重合时，MA + MD最小，最小值为A'D，



∵ AB = 4，∠ABC = 30°，在ABCD中，

∴ AH = $\frac{1}{2}$ AB = 2，AD // BC，

∴ AA' = 2AH = 4，AA' ⊥ AD，

∵ AD = 5，

∴ A'D = $\sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$ ，

故答案为： $\sqrt{41}$

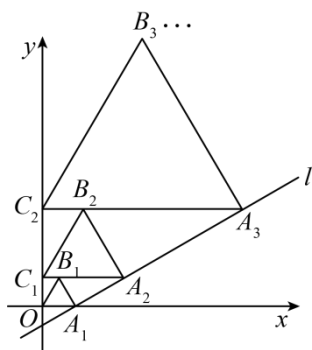
【点睛】此题考查了平行四边形的性质，勾股定理，轴对称的性质，求最小值问题，正确理解各性质及掌握各知识点是解题的关键。

16. 已知，直线 $l: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$ 与x轴相交于点A₁，以OA₁为边作等边三角形OA₁B₁，点B₁在第一象限

内，过点B₁作x轴的平行线与直线l交于点A₂，与y轴交于点C₁，以C₁A₂为边作等边三角形C₁A₂B₂（点B₂

在点B₁的上方），以同样的方式依次作等边三角形C₂A₃B₃，等边三角形C₃A₄B₄⋯，则点A₂₀₂₄的横坐标为

_____.



【答案】 $\left(\frac{5}{2}\right)^{2023}$

【解析】

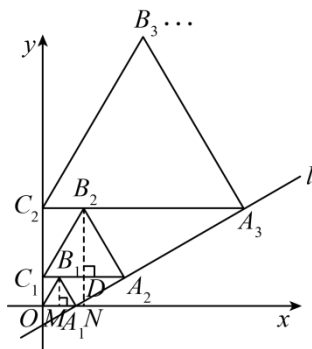
【分析】 直线 $l: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$ 可知，点 A_1 坐标为 $(1, 0)$ ，可得 $OA_1 = 1$ ，由于 $\triangle OA_1B_1$ 是等边三角形，可得点 $B_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，把 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 代入直线解析式即可求得 A_2 的横坐标，可得 $A_2C_1 = \frac{5}{2}$ ，由于 $\triangle B_2A_2B_1$ 是等边三角形，可得点 $A_2\left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ；同理， $A_3\left(\frac{25}{4}, \frac{7\sqrt{3}}{4}\right)$ ，发现规律即可得解，准确发现坐标与字母的序号之间的规律是解题的关键.

【详解】 解： $\because$ 直线 $l: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$ 与 x 轴负半轴交于点 A_1 ，

$\therefore$ 点 A_1 坐标为 $(1, 0)$ ，

$\therefore OA_1 = 1$ ，

过 B_1, B_2 ，作 $B_1M \perp x$ 轴交 x 轴于点 M ， $B_2N \perp x$ 轴交 A_2B_1 于点 D ，交 x 轴于点 N ，



$\because \triangle A_1B_1O$ 为等边三角形，

$\therefore \angle OB_1M = 30^\circ$

$$\therefore MO = \frac{1}{2} A_1 O = \frac{1}{2},$$

$$\therefore B_1 M = \sqrt{B_1 O^2 - OM^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore B_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

$$\text{当 } y = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 时, } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 解得: } x = \frac{5}{2},$$

$$\therefore A_2 C_1 = \frac{5}{2}, \quad A_2 \left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

$$\therefore C_1 D = \frac{1}{2} A_2 C_1 = \frac{5}{4},$$

$$\therefore B_2 D = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{5\sqrt{3}}{4},$$

$$\therefore B_2 N = \frac{5\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{4},$$

$$\therefore \text{当 } y = \frac{7\sqrt{3}}{4} \text{ 时, } \frac{7\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 解得: } x = \frac{25}{4},$$

$$\therefore A_3 \left(\frac{25}{4}, \frac{7\sqrt{3}}{4} \right),$$

$$\text{而 } \frac{25}{4} = \left(\frac{5}{2}\right)^2,$$

$$\text{同理可得: } A_4 \text{ 的横坐标为 } \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{8},$$

$$\therefore \text{点 } A_{2024} \text{ 的横坐标为 } \left(\frac{5}{2}\right)^{2023},$$

$$\text{故答案为: } \left(\frac{5}{2}\right)^{2023}.$$

【点睛】 本题主要考查了一次函数图象上点的坐标的特征，勾股定理的应用，等边三角形的性质，特殊图形点的坐标的规律，掌握探究的方法是解本题的关键.

三、解答题（本大题共 4 个小题，第 17 小题 5 分，第 18、19、20 小题各 6 分，共 23 分）

17. 计算: $\left(\frac{\pi}{2}-3\right)^0 + 2\sin 60^\circ + |\sqrt{3}-2| - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$.

【答案】 1

【解析】

【分析】 先计算零次幂，代入特殊角的三角函数值，化简绝对值，计算负整数指数幂，再合并即可.

【详解】 解: $\left(\frac{\pi}{2}-3\right)^0 + 2\sin 60^\circ + |\sqrt{3}-2| - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

$$= 1 + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 - \sqrt{3} - 2$$

$$= 1 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} - 2$$

$$= 1$$

【点睛】 本题考查的是含特殊角的三角函数值的混合运算，零次幂，负整数指数幂的含义，化简绝对值，掌握相应的运算法则是解本题的关键.

18. 先化简 $\left(a+1-\frac{3}{a-1}\right) \div \frac{a^2+4a+4}{a-1}$ ，再从 $-2, 0, 1, 2$ 中选取一个适合的数代入求值.

【答案】 $\frac{a-2}{a+2}$ ， $a=0$ 时，原式 $= -1$ ， $a=2$ 时，原式 $= 0$.

【解析】

【分析】 本题考查的是分式的化简求值，先计算括号内分式的加减运算，再计算分式的除法运算，再结合分式有意义的条件代入计算即可.

【详解】 解: $\left(a+1-\frac{3}{a-1}\right) \div \frac{a^2+4a+4}{a-1}$

$$= \left(\frac{a^2-1}{a-1} - \frac{3}{a-1}\right) \div \frac{(a+2)^2}{a-1}$$

$$= \frac{(a+2)(a-2)}{a-1} \cdot \frac{a-1}{(a+2)^2}$$

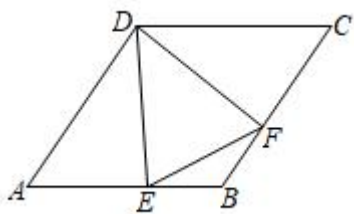
$$= \frac{a-2}{a+2}$$

$$\because a \neq 1 \text{ 且 } a \neq -2$$

$\therefore$ 当 $a=0$ 时，原式 $= -1$ ；

当 $a=2$ 时，原式 $= 0$.

19. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，点 E, F 分别是边 AB 和 BC 上的点，且 $BE=BF$. 求证: $\angle DEF = \angle DFE$.



【答案】见解析

【解析】

【分析】根据菱形的性质可得 $AB=BC=CD=AD$ ， $\angle A=\angle C$ ，再由 $BE=BF$ ，可推出 $AE=CF$ ，即可利用 SAS 证明 $\triangle ADE \cong \triangle CDF$ 得到 $DE=DF$ ，则 $\angle DEF=\angle DFE$ 。

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore AB=BC=CD=AD, \quad \angle A=\angle C,$$

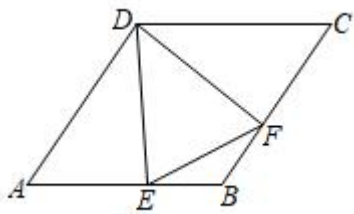
$$\because BE=BF,$$

$$\therefore AB-BE=BC-BF, \quad \text{即 } AE=CF,$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDF \quad (SAS),$$

$$\therefore DE=DF,$$

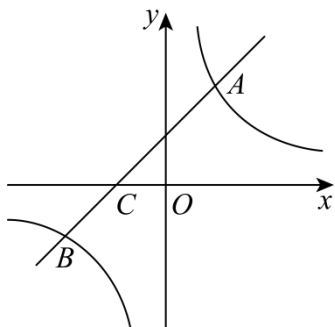
$$\therefore \angle DEF=\angle DFE.$$



【点睛】本题主要考查了菱形的性质，全等三角形的性质与判定，等腰三角形的性质与判定，解题的关键在于能够熟练掌握菱形的性质。

20. 如图，一次函数 $y=ax+b$ (a, b 为常数, $a \neq 0$) 的图象与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ (k 为常数, $k \neq 0$)

的图象交于 $A(2,4)$, $B(n,-2)$ 两点.



(1) 求一次函数和反比例函数的解析式.

(2) 直线 AB 与 x 轴交于点 C , 点 $P(m,0)$ 是 x 轴上的点, 若 $\triangle PAC$ 的面积大于 12, 请直接写出 m 的取值范围.

【答案】 (1) $y = x + 2$, $y = \frac{8}{x}$

(2) $m > 4$ 或 $m < -8$

【解析】

【分析】 (1) 将 A 点坐标代入反比例函数解析式求得反比例函数, 再把 B 点坐标代入所求得的反比例函数解析式, 求得 m , 进而把 A 、 B 的坐标代入一次函数解析式便可求得一次函数的解析式;

(2) 由一次函数的解析式求得与 x 轴的交点 C 的坐标, 然后 $\triangle PAC$ 的面积大于 12, 再建立不等式即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because A(2,4)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象上,

$$\therefore k = 2 \times 4 = 8,$$

$$\therefore \text{反比例函数的解析式为: } y = \frac{8}{x},$$

把 $B(n, -2)$ 代入 $y = \frac{8}{x}$, 得 $n = -4$,

$$\therefore B(-4, -2),$$

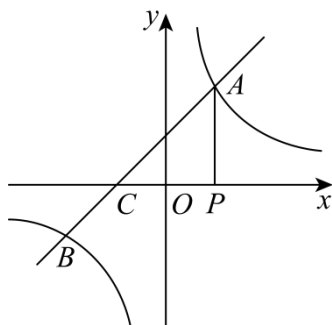
把 $A(2,4)$, $B(-4, -2)$ 都代入一次函数 $y = ax + b$, 得 $\begin{cases} 2a + b = 4 \\ -4a + b = -2 \end{cases}$,

$$\text{解得 } \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{一次函数的解析式为: } y = x + 2;$$

【小问 2 详解】

解: 如图,



对于 $y = x + 2$ ，当 $y = x + 2 = 0$ ，解得 $x = -2$ ，

$$\therefore C(-2, 0),$$

$$\therefore P(m, 0),$$

$$\therefore CP = |m + 2|,$$

$\therefore \triangle PAC$ 的面积大于 12，

$$\therefore \frac{1}{2} \times 4|m + 2| > 12, \text{ 即 } |m + 2| > 6,$$

当 $m \geq -2$ 时，则 $m + 2 > 6$ ，

解得： $m > 4$ ，

当 $m < -2$ 时，则 $-m - 2 > 6$ ，

解得： $m < -8$ ；

$\therefore m > 4$ 或 $m < -8$ 。

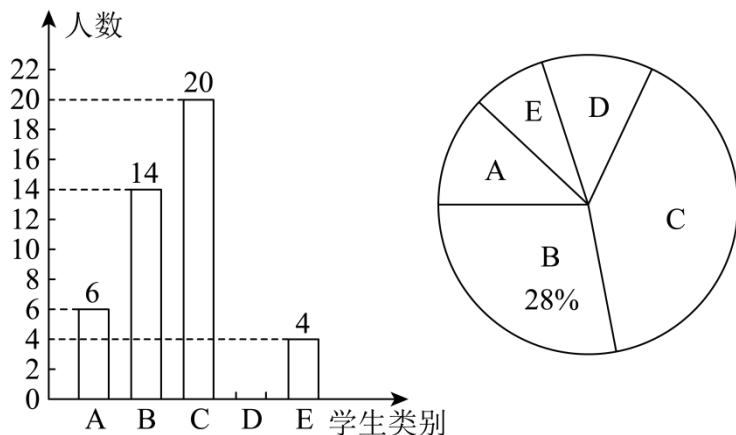
【点睛】 本题考查了一次函数和反比例函数的交点问题，反比例函数图象上点的坐标特征，三角形的面积等，求得交点坐标是解题的关键。

四、实践应用题 (本大题共 4 个小题，第 21 小题 6 分，第 22、23、24 小题各 8 分，共 30 分)

21. 睡眠管理作为“五项管理”中的重要内容之一，也是学校教育重点关注的内容。某校为了解学生平均每天睡眠时间，随机抽取该校部分学生进行问卷调查，并将结果进行了统计和整理，绘制成如下统计表和不完整的统计图。

学 生 类 别	学生平均每天睡眠时间 x (单位: 小时)
A	$7 \leq x < 7.5$
B	$7.5 \leq x < 8$
C	$8 \leq x < 8.5$

D	$8.5 \leq x < 9$
E	$x \geq 9$



- (1) 本次抽取调查的学生共有_____人，扇形统计图中表示 C 类学生平均每天睡眠时间的扇形的圆心角度数为_____。
- (2) 请补全条形统计图。
- (3) 被抽取调查的 E 类 4 名学生中有 2 名女生，2 名男生。从这 4 人中随机抽取 2 人进行电话回访，请用画树状图或列表的方法，求恰好抽到 2 名男生的概率。

【答案】(1) 50; 144°

(2) 见解析 (3) $\frac{1}{6}$

【解析】

【分析】本题主要考查的是用列表法或画树状图法求概率。列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，列表法适用于两步完成是事件，树状图法适合两步或两步以上完成的事件。用到的知识点为：概率 = 所求情况数与总情况数之比。也考查了条形统计图和扇形统计图。

- (1) 根据 B 类人数和人数占比即可求出本次被调查的学生人数；用 360 度乘以 C 类的人数占比即可求出 C 类学生平均每天睡眠时间的扇形的圆心角度数；
- (2) 根据 (1) 所求，求出 D 类的人数即可补全统计图；
- (3) 先画出树状图得到所有的等可能性的结果数，再找到所选的 2 人恰好都是男生的结果数，最后依据概率计算公式求解即可。

【小问 1 详解】

解： $14 \div 28\% = 50$ (人)；

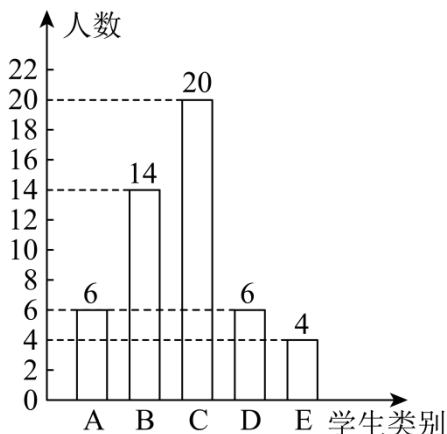
$$360^\circ \times \frac{20}{50} = 144^\circ;$$

故答案为：50; 144° ；

【小问 2 详解】

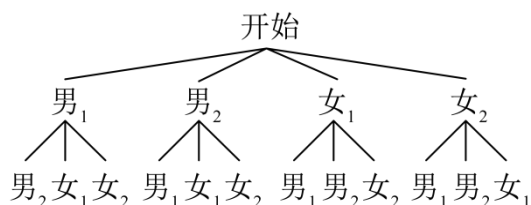
解：D 类的人数为 $50 - 6 - 14 - 20 - 4 = 6$ （人），

补全条形统计图，如图，



【小问 3 详解】

解：画树状图如下：



共有 12 种等可能结果，其中两人恰好是 2 名男生的结果有 2 种.

$$\therefore P_{(\text{抽到2男})} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

22. 某小区物管中心计划采购 A, B 两种花卉用于美化环境. 已知购买 2 株 A 种花卉和 3 株 B 种花卉共需要 21 元; 购买 4 株 A 种花卉和 5 株 B 种花卉共需要 37 元.

(1) 求 A, B 两种花卉的单价.

(2) 该物管中心计划采购 A, B 两种花卉共计 10000 株, 其中采购 A 种花卉的株数不超过 B 种花卉株数的 4 倍, 当 A, B 两种花卉分别采购多少株时, 总费用最少? 并求出最少总费用.

【答案】(1) A 种花卉的单价为 3 元/株, B 种花卉的单价为 5 元/株

(2) 当购进 A 种花卉 8000 株, B 种花卉 2000 株时, 总费用最少, 最少费用为 34000 元

【解析】

【分析】本题考查了二元一次方程组的应用, 一元一次不等式的应用, 一次函数的应用, 根据题意列出方程组, 不等式以及一次函数关系式是解题的关键.

(1) 设 A 种花卉的单价为 x 元/株, B 种花卉的单价为 y 元/株, 根据题意列出二元一次方程组, 解方程组即可求解;

(2) 设采购 A 种花卉 m 株, 则 B 种花卉 $(10000 - m)$ 株, 总费用为 W 元, 根据题意列出不等式, 得出

$m \leq 8000$ ，进而根据题意，得到 $W = 3m + 5(10000 - m)$ ，根据一次函数的性质即可求解。

【小问 1 详解】

解：设 A 种花卉的单价为 x 元/株，B 种花卉的单价为 y 元/株，

$$\text{由题意得：} \begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ 4x + 5y = 37 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases},$$

答：A 种花卉的单价为 3 元/株，B 种花卉的单价为 5 元/株。

【小问 2 详解】

解：设采购 A 种花卉 m 株，则 B 种花卉 $(10000 - m)$ 株，总费用为 W 元，

$$\text{由题意得：} W = 3m + 5(10000 - m) = -2m + 50000,$$

$$\therefore m \leq 4(10000 - m),$$

$$\text{解得：} m \leq 8000,$$

$$\text{在 } W = -2m + 50000 \text{ 中,}$$

$$\therefore -2 < 0,$$

$\therefore W$ 随 m 的增大而减小，

$\therefore$ 当 $m = 8000$ 时 W 的值最小，

$$W_{\text{最小}} = -2 \times 8000 + 50000 = 34000,$$

$$\text{此时 } 10000 - m = 2000.$$

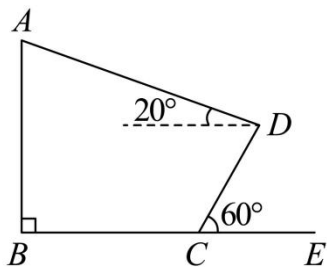
答：当购进 A 种花卉 8000 株，B 种花卉 2000 株时，总费用最少，最少费用为 34000 元。

23. 风电项目对于调整能源结构和转变经济发展方式具有重要意义. 某电力部门在某地安装了一批风力发电机，如图（1）某校实践活动小组对其中一架风力发电机的塔杆高度进行了测量，图（2）为测量示意图（点 A，B，C，D 都在同一平面内， $AB \perp BC$ ）。已知斜坡 CD 长为 20 米，斜坡 CD 的坡角为 60° ，在斜坡顶部 D 处测得风力发电机塔杆顶端 A 点的仰角为 20° ，坡底与塔杆底的距离 $BC = 30$ 米，求该风力发电机塔杆 AB 的高度。

（结果精确到个位；参考数据： $\sin 20^\circ \approx 0.34$ ， $\cos 20^\circ \approx 0.94$ ， $\tan 20^\circ \approx 0.36$ ， $\sqrt{3} \approx 1.73$ ）



(1)



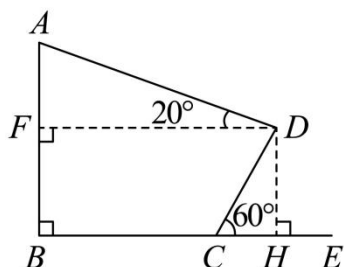
(2)

【答案】 32m

【解析】

【分析】 本题考查的是矩形的判定与性质，解直角三角形的实际应用，过点 D 作 $DF \perp AB$ 于点 F ，作 $DH \perp BE$ 于点 H ，先求解 $CH = CD \cdot \cos 60^\circ = 10\text{m}$ ， $DH = CD \sin 60^\circ \approx 17.3\text{m}$ ，再证明 $BH = BC + CH = 40\text{m}$ ，再利用锐角的正切可得 $AF = FD \cdot \tan 20^\circ = 14.4\text{m}$ ，从而可得答案.

【详解】 解：过点 D 作 $DF \perp AB$ 于点 F ，作 $DH \perp BE$ 于点 H



由题意得： $DC = 20\text{m}$ ， $\angle DCH = 60^\circ$

在 $\text{Rt}\triangle DCH$ 中，

$$\because \cos 60^\circ = \frac{CH}{CD}, \quad \sin 60^\circ = \frac{DH}{CD}$$

$$\therefore CH = CD \cdot \cos 60^\circ = 10\text{m},$$

$$DH = CD \sin 60^\circ = 10\sqrt{3}\text{m} \approx 17.3\text{m}$$

$$\because \angle DFB = \angle B = \angle DHB = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $DFBH$ 为矩形，

$$\therefore BH = FD, \quad BF = DH,$$

$$\because BH = BC + CH = (30 + 10)\text{m} = 40\text{m},$$

$$\therefore FD = 40\text{m}$$

在 $\triangle AFD$ 中.

$$\because \frac{AF}{FD} = \tan 20^\circ,$$

$$\therefore AF = FD \cdot \tan 20^\circ \approx 40 \times 0.36 = 14.4\text{m}$$

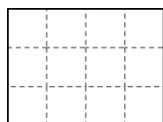
$$\therefore AB = AF + BF \approx (17.3 + 14.4)\text{m} = 31.7\text{m} \approx 32\text{m}$$

答：该风力发电机塔杆 AB 的高度为 32m 。

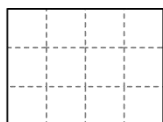
24. 如图，矩形纸片的长为 4，宽为 3，矩形内已用虚线画出网格线，每个小正方形的边长均为 1，小正方形的顶点称为格点，现沿着网格线对矩形纸片进行剪裁，使其分成两块纸片。请在下列备用图中，用实线画出符合相应要求的剪裁线。

注：①剪裁过程中，在格点处剪裁方向可发生改变但仍须沿着网格线剪裁；

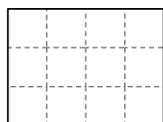
②在各种剪法中，若剪裁线通过旋转、平移或翻折后能完全重合则视为同一情况。



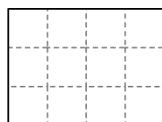
两块纸片
是全等形



两块纸片
是全等形



两块纸片
是全等形



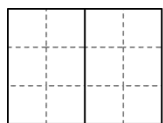
两块纸片不是全等形
但面积相等

【答案】见解析

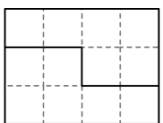
【解析】

【分析】本题考查的是矩形的性质，全等图形的定义与性质，同时考查了学生实际的动手操作能力，根据全等图形的性质分别画出符合题意的图形即可。

【详解】解：如图，



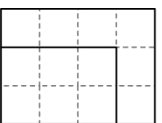
两块纸片
是全等形



两块纸片
是全等形



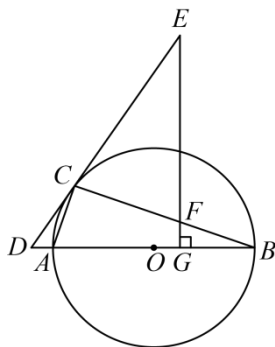
两块纸片
是全等形



两块纸片不是全等形
但面积相等

五、推理论证题 (9 分)

25. 如图，点 C 在以 AB 为直径的 $\odot O$ 上，点 D 在 BA 的延长线上， $\angle DCA = \angle CBA$ 。



(1) 求证： DC 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 点 G 是半径 OB 上的点，过点 G 作 OB 的垂线与 BC 交于点 F ，与 DC 的延长线交于点 E ，若 $\sin D = \frac{4}{5}$ ，

$DA = FG = 2$ ，求 CE 的长。

【答案】(1) 见解析 (2) 14

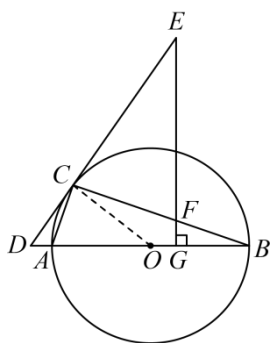
【解析】

【分析】(1) 连接 OC ，由圆周角定理求得 $\angle ACB = 90^\circ$ ，再利用等角的余角相等求得 $\angle OCD = 90^\circ$ ，据此即可证明 DC 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 利用三角函数的定义求得 $OC = OA = 8$ ，在 $\text{Rt}\triangle OCD$ 中，利用勾股定理求得 $CD = 6$ ，再证明 $\triangle DOC \sim \triangle DEG$ ，利用相似三角形的性质列式计算即可求解。

【小问 1 详解】

证明：连接 OC ，



$$\because OB = OC,$$

$$\therefore \angle OBC = \angle OCB,$$

$$\because \angle DCA = \angle OBC,$$

$$\therefore \angle DCA = \angle OCB,$$

而 AB 是 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DCA + \angle OCA = \angle OCA + \angle OCB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OCD = 90^\circ,$$

$\therefore DC$ 是 $\odot O$ 的切线；

【小问 2 详解】

解：设 $OC = OA = r$ ，

$$\because \sin D = \frac{OC}{OD} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore \frac{r}{r+2} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore r = 8,$$

$$\therefore OC = OA = 8,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle OCD \text{ 中, } CD = \sqrt{OD^2 - OC^2} = \sqrt{(8+2)^2 - 8^2} = 6,$$

$$\because \angle DCA + \angle ECF = \angle BFG + \angle CBA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ECF = \angle BFG,$$

$$\text{又} \because \angle BFG = \angle EFC,$$

$$\therefore \angle ECF = \angle EFC,$$

$$\therefore EC = EF,$$

$$\text{设 } EC = EF = x,$$

$$\because \angle D = \angle D, \quad \angle DCO = \angle DGE,$$

$$\therefore \triangle DOC \sim \triangle DEG,$$

$$\therefore \frac{DO}{DE} = \frac{OC}{EG}, \quad \text{则 } \frac{10}{x+6} = \frac{8}{x+2},$$

$$\text{解得: } x = 14$$

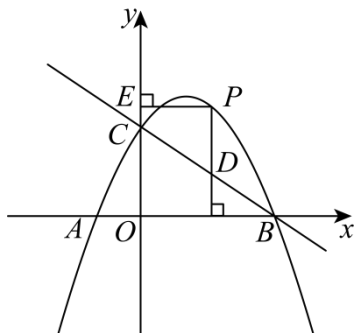
经检验 $x = 14$ 是所列方程的解,

$$\therefore CE = 14.$$

【点睛】本题考查了切线的判定与相似三角形的判定与性质，三角函数的定义，勾股定理. 正确证明 $\triangle DOC \sim \triangle DEG$ 是解决本题的关键.

六、拓展探究题 (10 分)

26. 如图，抛物线 $y = -\frac{2}{3}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A, B 两点，与 y 轴交于点 C ，点 A 坐标为 $(-1, 0)$ ，点 B 坐标为 $(3, 0)$.



(1) 求此抛物线的函数解析式.

(2) 点 P 是直线 BC 上方抛物线上一个动点，过点 P 作 x 轴的垂线交直线 BC 于点 D ，过点 P 作 y 轴的垂线，垂足为点 E ，请探究 $2PD + PE$ 是否有最大值？若有最大值，求出最大值及此时 P 点的坐标；若没有最大值，请说明理由.

(3) 点 M 为该抛物线上的点，当 $\angle MCB = 45^\circ$ 时，请直接写出所有满足条件的点 M 的坐标.

【答案】(1) $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2$

(2) $2PD + PE$ 的最大值为 $\frac{75}{16}$, P 点的坐标为 $\left(\frac{15}{8}, \frac{69}{32}\right)$

(3) 点 M 的坐标为 $\left(\frac{17}{10}, \frac{117}{50}\right)$ 或 $\left(\frac{19}{2}, -\frac{91}{2}\right)$

【解析】

【分析】(1) 直接利用抛物线的交点式可得抛物线的解析式;

(2) 先求解 $C(0, 2)$, 及直线 BC 为 $y = -\frac{2}{3}x + 2$, 设 $P\left(x, -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2\right)$, 可得 $D\left(x, -\frac{2}{3}x + 2\right)$, 再建立二次函数求解即可;

(3) 如图, 以 CB 为对角线作正方形 $CTBK$, 可得 $\angle BCK = \angle BCT = 45^\circ$, CK, CT 与抛物线的另一个交点即为 M , 如图, 过 T 作 x 轴的平行线交 y 轴于 Q , 过 B 作 $BG \perp TQ$ 于 G , 则 $OB = GQ = 3$, 设 $TQ = GB = m$, 则 $CQ = TG = 3 - m$, 求解 $T(m, m - 1)$, 进一步求解直线 CT 为: $y = -5x + 2$, 直线 CK 为 $y = \frac{1}{5}x + 2$, 再求解函数的交点坐标即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 抛物线 $y = -\frac{2}{3}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A, B 两点, 与 y 轴交于点 C , 点 A 坐标为 $(-1, 0)$, 点 B 坐标为 $(3, 0)$.

$$\therefore y = -\frac{2}{3}(x+1)(x-3) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2;$$

【小问 2 详解】

解: 当 $x = 0$ 时, $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2 = 2$,

$$\therefore C(0, 2),$$

设直线 BC 为 $y = kx + 2$,

$$\therefore 3k + 2 = 0, \text{ 解得: } k = -\frac{2}{3},$$

$$\therefore \text{直线 } BC \text{ 为 } y = -\frac{2}{3}x + 2,$$

$$\text{设 } P\left(x, -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2\right),$$

$$\therefore D\left(x, -\frac{2}{3}x + 2\right),$$

$$\therefore 2PD + PE$$

$$= 2\left(-\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2 + \frac{2}{3}x - 2\right) + x$$

$$= -\frac{4}{3}x^2 + 5x;$$

$$\text{当 } x = -\frac{5}{2 \times \left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{15}{8} \text{ 时, 有最大值 } \frac{75}{16};$$

$$\text{此时 } P\left(\frac{15}{8}, \frac{69}{32}\right);$$

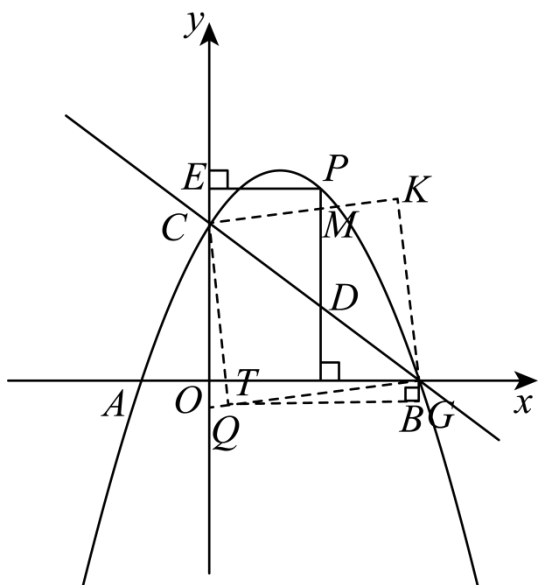
【小问3详解】

解：如图，以 CB 为对角线作正方形 $CTBK$ ，

$$\therefore \angle BCK = \angle BCT = 45^\circ,$$

$\therefore CK, CT$ 与抛物线的另一个交点即为 M ，

如图，过 T 作 x 轴的平行线交 y 轴于 Q ，过 B 作 $BG \perp TQ$ 于 G ，则 $OB = GQ = 3$ ，



$$\therefore \angle CTB = 90^\circ = \angle CQT = \angle QGB,$$

$$\therefore \angle QCT + \angle CTQ = 90^\circ = \angle CTQ + \angle BTG,$$

$$\therefore \angle QCT = \angle BTG,$$

$$\therefore CT = BT,$$

$$\therefore \triangle CQT \cong \triangle TGB,$$

$$\therefore QT = GB, \quad CQ = TG,$$

$$\text{设 } TQ = GB = m, \text{ 则 } CQ = TG = 3 - m,$$

$$\therefore QO = 3 - m - 2 = 1 - m,$$

$$\therefore T(m, m-1),$$

由 $TC = TB$ 可得:

$$\therefore m^2 + (m-3)^2 = (m-3)^2 + (m-1)^2,$$

$$\text{解得: } m = \frac{1}{2},$$

$$\therefore T\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right),$$

设 CT 为: $y = nx + 2$,

$$\therefore \frac{1}{2}n + 2 = -\frac{1}{2}, \text{ 解得: } n = -5,$$

$$\therefore \text{直线 } CT \text{ 为: } y = -5x + 2,$$

$$\therefore \begin{cases} y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2 \\ y = -5x + 2 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = \frac{19}{2} \\ y = -\frac{91}{2} \end{cases},$$

$$\therefore M\left(\frac{19}{2}, -\frac{91}{2}\right),$$

$$\therefore T\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad C(0, 2), \quad B(3, 0), \text{ 正方形 } CTBK,$$

$$\therefore K\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right),$$

同理可得: 直线 CK 为 $y = \frac{1}{5}x + 2$,

$$\therefore \begin{cases} y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2 \\ y = \frac{1}{5}x + 2 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = \frac{17}{10} \\ y = \frac{117}{50} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases},$$

$$\therefore M\left(\frac{17}{10}, \frac{117}{50}\right),$$

综上：点 M 的坐标为 $\left(\frac{17}{10}, \frac{117}{50}\right)$ 或 $\left(\frac{19}{2}, -\frac{91}{2}\right)$.

【点睛】 本题考查的是利用待定系数法求解抛物线的解析式，抛物线的性质，正方形的性质，作出合适的辅助线是解本题的关键.