

广元市 2024 年初中学业水平考试暨高中阶段学校招生考试

数 学

说明：1. 全卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。

2. 本试卷分为第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共三个大题 26 个小题。

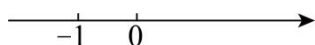
3. 考生必须在答题卡上答题，写在试卷上的答案无效。选择题必须使用 2B 铅笔填涂答案，非选择题必须使用 0.5 毫米黑色墨迹签字笔答题。

4. 考试结束，将答题卡和试卷一并交回。

第 I 卷 选择题（共 30 分）

一、选择题（每小题给出的四个选项中，只有一个符合题意。每小题 3 分，共 30 分）

1. 将 -1 在数轴上对应的点向右平移 2 个单位，则此时该点对应的数是（ ）



A. -1

B. 1

C. -3

D. 3

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了数轴上的动点问题，正确理解有理数所表示的点左右移动后得到的点所表示的数是解题的关键。将 -1 在数轴上对应的点向右平移 2 个单位，在数轴上找到这个点，即得这个点所表示的数。

【详解】根据题意：数轴上 -1 所对应的点向右平移 2 个单位，则此时该点对应的数是 1。

故选 B。

2. 下列计算正确的是（ ）

A. $a^3 + a^3 = a^6$

B. $a^6 \div a^3 = a^2$

C. $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

D. $(ab^2)^2 = a^2b^4$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了合并同类项，同底数幂的除法，完全平方公式，积的乘方运算，正确的计算是解题的关键。根据合并同类项，同底数幂的除法，完全平方公式，积的乘方运算法则逐项分析判断即可求解。

【详解】解：A. $a^3 + a^3 = 2a^3$ ，故该选项不正确，不符合题意；

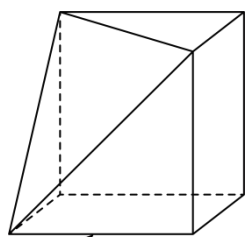
B. $a^6 \div a^3 = a^3$ ，故该选项不正确，不符合题意；

C. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ，故该选项不正确，不符合题意；

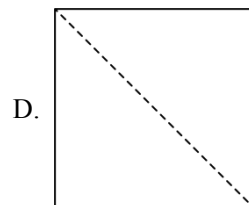
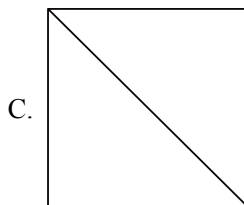
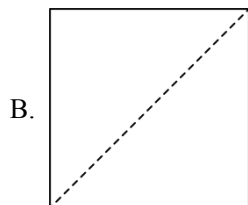
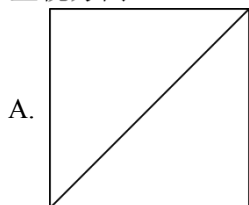
D. $(ab^2)^2 = a^2b^4$ ，故该选项正确，符合题意。

故选：D。

3. 一个几何体如图水平放置，它的俯视图是（ ）



主视方向

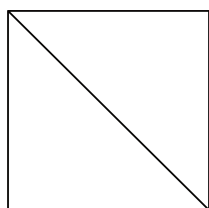


【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了组合体的三视图，解题的关键是根据从上面看到的图形是几何体的俯视图即可解答.

【详解】解：从上面看，如图所示：



故选：C.

4. 在“五·四”文艺晚会节目评选中，某班选送的节目得分如下：91，96，95，92，94，95，95，分析这组数据，下列说法错误的是（ ）

A. 中位数是 95

B. 方差是 3

C. 众数是 95

D. 平均数是 94

【答案】B

【解析】

【分析】此题考查了平均数，中位数，众数，方差的定义及计算，根据各定义及计算公式分别判断，正确掌握各定义及计算方法是解题的关键

【详解】解：将数据从小到大排列为 91，92，94，95，95，95，96，共 7 个数据，居中的一个数据是 95，
 $\therefore$ 中位数是 95，故 A 选项正确；

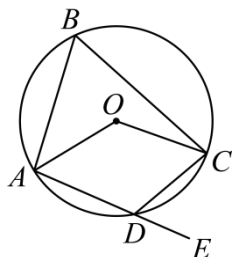
这组数据中出现次数最多的数据是 95，故众数是 95，故 C 选项正确；

这组数据的平均数是 $\frac{1}{7}(91+92+94+95+95+95+96) = 94$ ，故 D 选项正确；

这组数据的方差为 $\frac{1}{7}[(91-94)^2 + (92-94)^2 + (94-94)^2 + (95-94)^2 \times 3 + (96-94)^2] = \frac{20}{7}$ ，故 B 选项错误；

故选：B

5. 如图，已知四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形， E 为 AD 延长线上一点， $\angle AOC = 128^\circ$ ，则 $\angle CDE$ 等于（ ）



A. 64°

B. 60°

C. 54°

D. 52°

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了圆周角定理，圆内接四边形的性质，熟练掌握以上知识点是解题的关键. 根据同弧所对的圆心角等于圆周角的 2 倍可求得 $\angle ABC$ 的度数，再根据圆内接四边形对角互补，可推出 $\angle CDE = \angle ABC$ ，即可得到答案.

【详解】解： $\because \angle ABC$ 是圆周角，与圆心角 $\angle AOC$ 对相同的弧，且 $\angle AOC = 128^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \times 128^\circ = 64^\circ,$$

又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形，

$$\therefore \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle CDE + \angle ADC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE = \angle ABC = 64^\circ,$$

故选：A.

6. 如果单项式 $-x^{2m}y^3$ 与单项式 $2x^4y^{2-n}$ 的和仍是一个单项式，则在平面直角坐标系中点 (m, n) 在（ ）

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查同类项和确定点的坐标，根据同类项的性质求出 m, n 的值，再确定点 (m, n) 的位置即可

【详解】解：∵单项式 $-x^{2m}y^3$ 与单项式 $2x^4y^{2-n}$ 的和仍是一个单项式，

∴单项式 $-x^{2m}y^3$ 与单项式 $2x^4y^{2-n}$ 是同类项，

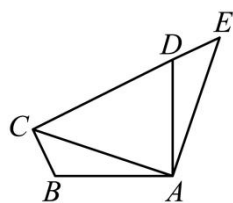
$$\therefore 2m = 4, 2 - n = 3,$$

解得， $m = 2, n = -1$ ，

∴点 (m, n) 在第四象限，

故选：D

7. 如图，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle ADE$ ，点 B, C 的对应点分别为点 D, E ，连接 CE ，点 D 恰好落在线段 CE 上，若 $CD = 3$ ， $BC = 1$ ，则 AD 的长为（ ）



A. $\sqrt{5}$

B. $\sqrt{10}$

C. 2

D. $2\sqrt{2}$

【答案】A

【解析】

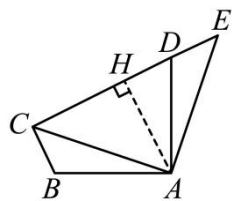
【分析】此题考查了旋转的性质，等腰直角三角形的判定和性质，勾股定理，由旋转得 $AC = AE$ ， $\angle CAE = 90^\circ$ ， $DE = BC = 1$ ，推出 $\triangle ACE$ 是等腰直角三角形， $CE = 4$ ，过点 A 作 $AH \perp CE$ 于点 H ，得到 $HD = 1$ ，利用勾股定理求出 AD 的长.

【详解】解：由旋转得 $\triangle ABC \cong \triangle ADE$ ， $\angle CAE = 90^\circ$ ，

$$\therefore AC = AE, \angle CAE = 90^\circ, DE = BC = 1,$$

$$\therefore \triangle ACE \text{ 是等腰直角三角形, } CE = CD + DE = 3 + 1 = 4,$$

过点 A 作 $AH \perp CE$ 于点 H ，



$$\therefore AH = \frac{1}{2}CE = CH = HE = 2,$$

$$\therefore HD = HE - DE = 2 - 1 = 1,$$

$$\therefore AD = \sqrt{AH^2 + HD^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5},$$

故选：A.

8. 我市把提升城市园林绿化水平作为推进城市更新行动的有效抓手，从 2023 年开始通过拆违建绿、见缝插绿等方式在全域打造多个小而美的“口袋公园”. 现需要购买 A、B 两种绿植，已知 A 种绿植单价是 B 种绿植单价的 3 倍，用 6750 元购买的 A 种绿植比用 3000 元购买的 B 种绿植少 50 株. 设 B 种绿植单价是 x 元，则可列方程是 ()

A. $\frac{6750}{3x} - 50 = \frac{3000}{x}$

B. $\frac{3000}{3x} - 50 = \frac{6750}{x}$

C. $\frac{6750}{3x} + 50 = \frac{3000}{x}$

D. $\frac{3000}{3x} + 50 = \frac{6750}{x}$

【答案】C

【解析】

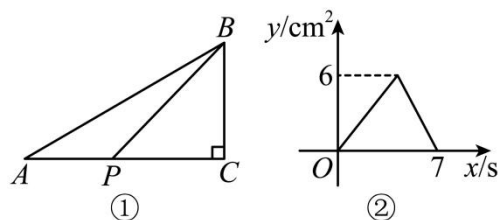
【分析】本题主要考查了分式方程的应用，设 B 种绿植单价是 x 元，则 A 种绿植单价是 $3x$ 元，根据用 6750 元购买的 A 种绿植比用 3000 元购买的 B 种绿植少 50 株，列出方程即可.

【详解】解：设 B 种绿植单价是 x 元，则 A 种绿植单价是 $3x$ 元，根据题意得：

$$\frac{6750}{3x} + 50 = \frac{3000}{x},$$

故选：C.

9. 如图①，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 P 从点 A 出发沿 $A \rightarrow C \rightarrow B$ 以 1 cm/s 的速度匀速运动至点 B，图②是点 P 运动时， $\triangle ABP$ 的面积 $y(\text{cm}^2)$ 随时间 $x(\text{s})$ 变化的函数图象，则该三角形的斜边 AB 的长为 ()



A. 5

B. 7

C. $3\sqrt{2}$

D. $2\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查根据函数图象获取信息，完全平方公式，勾股定理，

由图象可知， $\triangle ABP$ 面积最大值为 6，此时当点 P 运动到点 C，得到 $\frac{1}{2} AC \cdot BC = 6$ ，由图象可知 $AC + BC = 7$ ，根据勾股定理，结合完全平方公式即可求解.

【详解】解：由图象可知， $\triangle ABP$ 面积最大值为 6

由题意可得，当点 P 运动到点 C 时， $\triangle ABP$ 的面积最大，

$$\therefore \frac{1}{2} AC \cdot BC = 6, \text{ 即 } AC \cdot BC = 12,$$

由图象可知, 当 $x = 7$ 时, $y = 0$, 此时点 P 运动到点 B ,

$$\therefore AC + BC = 7,$$

$$\therefore \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2 = (AC + BC)^2 - 2AC \cdot BC = 7^2 - 2 \times 12 = 25,$$

$$\therefore AB = 5.$$

故选: A

10. 如图, 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 $C(0, -2)$ 与 x 轴交点的横坐标分别为 x_1, x_2 , 且 $-1 < x_1 < 0$, $2 < x_2 < 3$, 则下列结论:

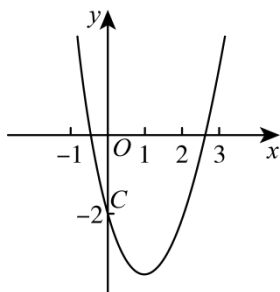
① $a - b + c < 0$;

② 方程 $ax^2 + bx + c + 2 = 0$ 有两个不相等的实数根;

③ $a + b > 0$;

④ $a > \frac{2}{3}$;

⑤ $b^2 - 4ac > 4a^2$. 其中正确的结论有 ()



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查的是二次函数的图象与性质, 熟练的利用数形结合的方法解题是关键; 由当 $x = -1$ 时, $y = a - b + c > 0$, 可判断①, 由函数的最小值 $y < -2$, 可判断②, 由抛物线的对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a}$, 且 $\frac{1}{2} < -\frac{b}{2a} < \frac{3}{2}$, 可判断③, 由 $x = 1$ 时, $y = a - b + c > 0$, 当 $x = 3$ 时, $y = 9a + 3b + c > 0$, 可判断④, 由根与系数的关系可判断⑤;

【详解】 解: ① $\because$ 抛物线开口向上, $-1 < x_1 < 0$, $2 < x_2 < 3$,

∴ 当 $x = -1$ 时, $y = a - b + c > 0$, 故①不符合题意;

② ∵ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 $C(0, -2)$,

∴ 函数的最小值 $y < -2$,

∴ $ax^2 + bx + c = -2$ 有两个不相等的实数根;

∴ 方程 $ax^2 + bx + c + 2 = 0$ 有两个不相等的实数根; 故②符合题意;

③ ∵ $-1 < x_1 < 0$, $2 < x_2 < 3$,

∴ 抛物线的对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a}$, 且 $\frac{1}{2} < -\frac{b}{2a} < \frac{3}{2}$,

∴ $1 < -\frac{b}{a} < 3$, 而 $a > 0$,

∴ $-3a < b < -a$,

∴ $a + b < 0$, 故③不符合题意;

④ ∵ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 $C(0, -2)$,

∴ $c = -2$,

∵ $x = 1$ 时, $y = a - b + c > 0$,

即 $3a - 3b + 3c > 0$,

当 $x = 3$ 时, $y = 9a + 3b + c > 0$,

∴ $12a + 4c > 0$,

∴ $12a > 8$,

∴ $a > \frac{2}{3}$, 故④符合题意;

⑤ ∵ $-1 < x_1 < 0$, $2 < x_2 < 3$,

∴ $x_2 - x_1 > 2$,

由根与系数的关系可得: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$,

$$\begin{aligned} \therefore \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} &= \frac{1}{4} \times \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{c}{a} \\ &= \frac{1}{4} (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2]$$

$$= \frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 > \frac{1}{4} \times 4 = 1$$

$$\therefore \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 1,$$

$\therefore b^2 - 4ac > 4a^2$, 故⑤符合题意;

故选: C.

第 II 卷 非选择题 (共 120 分)

二、填空题 (把正确答案直接写在答题卡对应题目的横线上, 每小题 4 分, 共 24 分)

11. 分解因式: $(a+1)^2 - 4a =$ _____.

【答案】 $(a-1)^2$ 或 $(-1+a)^2$

【解析】

【分析】 首先利用完全平方公式展开 $(a+1)^2$, 然后合并同类项, 再利用完全平方公式进行分解即可.

【详解】 $(a+1)^2 - 4a = a^2 + 1 + 2a - 4a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$.

故答案为: $(a-1)^2$.

【点睛】 此题主要考查了公式法分解因式, 关键是掌握完全平方公式: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.

12. 2023 年 10 月诺贝尔物理学奖授予三位“追光”科学家, 以表彰他们“为研究物质中的电子动力学而产生阿秒光脉冲的实验方法”. 什么是阿秒? 1 阿秒是 10^{-18} 秒, 也就是十亿分之一秒的十亿分之一. 目前世界上最短的单阿秒光学脉冲是 43 阿秒. 将 43 阿秒用科学记数法表示为_____秒.

【答案】 4.3×10^{-17}

【解析】

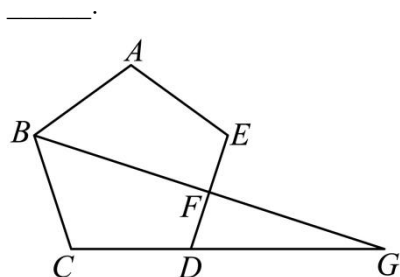
【分析】 本题考查了用科学记数法表示较小的数, 一般形式为 $a \times 10^{-n}$, 解题的关键是熟知 $1 \leq |a| < 10$. 根据题意可知, 43 阿秒 $= 43 \times 10^{-18}$ 秒, 再根据科学记数法的表示方法表示出来即可.

【详解】 解: 根据题意 1 阿秒是 10^{-18} 秒可知,

$$43 \text{ 阿秒} = 43 \times 10^{-18} = 4.3 \times 10^{-17} \text{ 秒},$$

故答案为: 4.3×10^{-17} .

13. 点 F 是正五边形 $ABCDE$ 边 DE 的中点, 连接 BF 并延长与 CD 延长线交于点 G , 则 $\angle BGC$ 的度数为

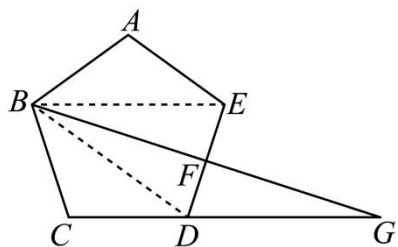


【答案】 18° ## 18 度

【解析】

【分析】连接 BD , BE , 根据正多边形的性质可证 $\triangle ABE \cong \triangle CBD$ (SAS), 得到 $BE = BD$, 进而得到 BG 是 DE 的垂直平分线, 即 $\angle DFG = 90^\circ$, 根据多边形的内角和公式可求出每个内角的度数, 进而得到 $\angle FDG = 72^\circ$, 再根据三角形的内角和定理即可解答.

【详解】解: 连接 BD , BE ,



$\because$ 五边形 $ABCDE$ 是正五边形,

$\therefore AB = BC = CD = AE$, $\angle A = \angle C$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBD$ (SAS),

$\therefore BE = BD$,

$\because$ 点 F 是 DE 的中点,

$\therefore BG$ 是 DE 的垂直平分线,

$\therefore \angle DFG = 90^\circ$,

$\because$ 在正五边形 $ABCDE$ 中, $\angle CDE = \frac{(5-2) \times 180^\circ}{5} = 108^\circ$,

$\therefore \angle FDG = 180^\circ - \angle CDE = 72^\circ$,

$\therefore \angle G = 180^\circ - \angle DFG - \angle FDG = 180^\circ - 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$.

故答案为: 18°

【点睛】本题考查正多边形的性质, 内角, 全等三角形的判定及性质, 垂直平分线的判定, 三角形的内角和定理, 正确作出辅助线, 综合运用相关知识是解题的关键.

14. 若点 $Q(x, y)$ 满足 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{xy}$, 则称点 Q 为“美好点”, 写出一个“美好点”的坐标_____.

【答案】 $(2, -1)$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】 此题考查了解分式方程, 先将方程两边同时乘以 xy 后去分母, 令 x 代入一个数值, 得到 y 的值, 以此为点的坐标即可, 正确解分式方程是解题的关键

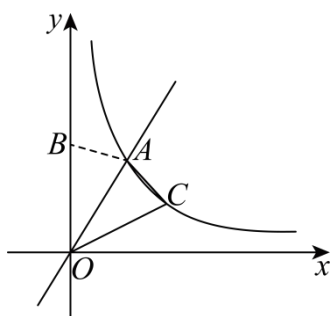
【详解】 解: 等式两边都乘以 xy , 得 $x + y = 1$,

令 $x = 2$, 则 $y = -1$,

$\therefore$ “美好点”的坐标为 $(2, -1)$,

故答案为 $(2, -1)$ (答案不唯一)

15. 已知 $y = \sqrt{3}x$ 与 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象交于点 $A(2, m)$, 点 B 为 y 轴上一点, 将 $\triangle OAB$ 沿 OA 翻折, 使点 B 恰好落在 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 上点 C 处, 则 B 点坐标为_____.



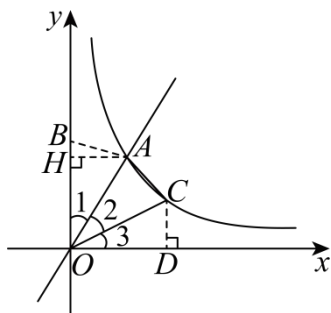
【答案】 $(0, 4)$

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数的几何综合, 折叠性质, 解直角三角形的性质, 勾股定理, 正确掌握相关性质内容是解题的关键. 先得出 $A(2, 2\sqrt{3})$ 以及 $y = \frac{4\sqrt{3}}{x} (x > 0)$, 根据解直角三角形得 $\angle 1 = 30^\circ$, 根据

折叠性质, $\angle 3 = 30^\circ$, 然后根据勾股定理进行列式, 即 $OB = OC = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$.

【详解】 解: 如图所示: 过点 A 作 $AH \perp y$ 轴, 过点 C 作 $CD \perp x$ 轴,



$\because y = \sqrt{3}x$ 与 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象交于点 $A(2, m)$,

$\therefore$ 把 $A(2, m)$ 代入 $y = \sqrt{3}x$, 得出 $m = \sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3}$,

$\therefore A(2, 2\sqrt{3})$,

把 $A(2, 2\sqrt{3})$ 代入 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$,

解得 $k = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$,

$\therefore y = \frac{4\sqrt{3}}{x} (x > 0)$,

设 $C\left(m, \frac{4\sqrt{3}}{m}\right)$,

在 $\text{Rt}\triangle AHO$, $\tan \angle 1 = \frac{AH}{OH} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore \angle 1 = 30^\circ$,

$\because$ 点 B 为 y 轴上一点, 将 $\triangle OAB$ 沿 OA 翻折,

$\therefore \angle 2 = \angle 1 = 30^\circ$, $OC = OB$,

$\therefore \angle 3 = 90^\circ - \angle 1 - \angle 2 = 30^\circ$,

则 $\frac{CD}{OD} = \tan \angle 3 = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{m}}{m}$,

解得 $m = 2\sqrt{3}$ (负值已舍去),

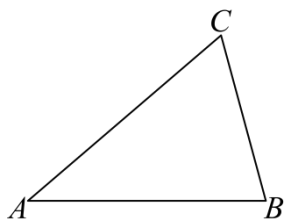
$\therefore C(2\sqrt{3}, 2)$,

$\therefore OB = OC = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(0, 4)$,

故答案为：(0,4) .

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 5$ ， $\tan \angle C = 2$ ，则 $AC + \frac{\sqrt{5}}{5}BC$ 的最大值为_____.



【答案】 $5\sqrt{2}$

【解析】

【分析】过点 B 作 $BD \perp AC$ ，垂足为 D ，如图所示，利用三角函数定义得到 $AC + \frac{\sqrt{5}}{5}BC = AC + DC$ ，

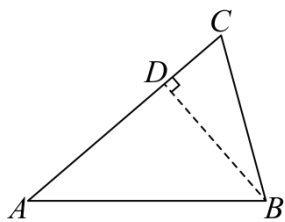
延长 DC 到 E ，使 $EC = CD = x$ ，连接 BE ，如图所示，从而确定

$AC + \frac{\sqrt{5}}{5}BC = AC + DC = AC + CE = AE$ ， $\angle E = 45^\circ$ ，再由辅助圆-定弦定角模型得到点 E 在 $\odot O$ 上

运动， AE 是 $\odot O$ 的弦，求 $AC + \frac{\sqrt{5}}{5}BC$ 的最大值就是求弦 AE 的最大值，即 AE 是直径时，取到最大值，

由圆周角定理及勾股定理求解即可得到答案.

【详解】解：过点 B 作 $BD \perp AC$ ，垂足为 D ，如图所示：



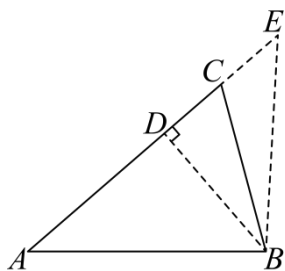
$\because \tan \angle C = 2$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中，设 $DC = x$ ，则 $BD = 2x$ ，由勾股定理可得 $BC = \sqrt{5}x$ ，

$\therefore \frac{DC}{BC} = \frac{x}{\sqrt{5}x} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，即 $\frac{\sqrt{5}}{5}BC = DC$ ，

$\therefore AC + \frac{\sqrt{5}}{5}BC = AC + DC$ ，

延长 DC 到 E ，使 $EC = CD = x$ ，连接 BE ，如图所示：

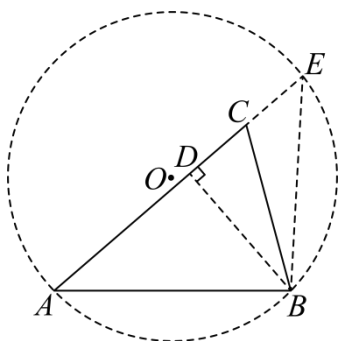


$$\therefore AC + \frac{\sqrt{5}}{5}BC = AC + DC = AC + CE = AE,$$

$$\because BD \perp DE, \quad DE = 2x = BD,$$

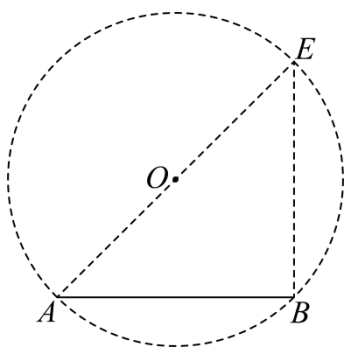
$\therefore \triangle BDE$ 是等腰直角三角形, 则 $\angle E = 45^\circ$,

在 $\triangle ABE$ 中, $AB = 5$, $\angle E = 45^\circ$, 由辅助圆-定弦定角模型, 作 $\triangle ABE$ 的外接圆, 如图所示:



$\therefore$ 由圆周角定理可知, 点 E 在 $\odot O$ 上运动, AE 是 $\odot O$ 的弦, 求 $AC + \frac{\sqrt{5}}{5}BC$ 的最大值就是求弦 AE 的最

大值, 根据圆的性质可知, 当弦 AE 过圆心 O , 即 AE 是直径时, 弦最大, 如图所示:



$\because AE$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ABE = 90^\circ,$$

$$\because \angle E = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle ABE$ 是等腰直角三角形,

$$\because AB = 5,$$

$\therefore BE = AB = 5$ ，则由勾股定理可得 $AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = 5\sqrt{2}$ ，即 $AC + \frac{\sqrt{5}}{5}BC$ 的最大值为 $5\sqrt{2}$ ，

故答案为： $5\sqrt{2}$ 。

【点睛】本题考查动点最值问题，涉及解三角形、勾股定理、等腰直角三角形的判定与性质、圆的性质、圆周角定理、动点最值问题-定弦定角模型等知识，熟练掌握动点最值问题-定弦定角模型的解法是解决问题的关键。

三、解答题（要求写出必要的解答步骤或证明过程，共 96 分）

17. 计算： $(2024 - \pi)^0 + |\sqrt{3} - 2| + \tan 60^\circ - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ 。

【答案】 -1

【解析】

【分析】此题考查了实数的混合运算，特殊的三角函数值，零次幂及负指数幂计算，正确掌握各计算法则是解题的关键。

【详解】解：原式 $= 1 + 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 4 = 3 - 4 = -1$ 。

18. 先化简，再求值： $\frac{a}{a-b} \div \frac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ab + b^2} - \frac{a-b}{a+b}$ ，其中 a, b 满足 $b - 2a = 0$ 。

【答案】 $\frac{b}{a+b}, \frac{2}{3}$

【解析】

【分析】本题考查了分式的化简求值，熟练掌握分式的化简求值是解题的关键。先将分式的分子分母因式分解，然后将除法转化为乘法计算，再计算分式的加减得到 $\frac{b}{a+b}$ ，最后将 $b - 2a = 0$ 化为 $b = 2a$ ，代入 $\frac{b}{a+b}$ 即得答案。

【详解】原式 $= \frac{a}{a-b} \div \frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)^2} - \frac{a-b}{a+b}$

$$= \frac{a}{a-b} \times \frac{(a-b)^2}{(a+b)(a-b)} - \frac{a-b}{a+b}$$

$$= \frac{a}{a+b} - \frac{a-b}{a+b}$$

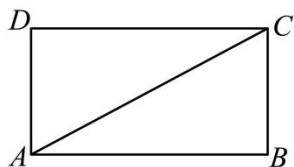
$$= \frac{b}{a+b}$$

$\because b - 2a = 0,$

$\therefore b = 2a,$

$$\therefore \text{原式} = \frac{2a}{a+2a} = \frac{2}{3}.$$

19. 如图, 已知矩形 $ABCD$.



- (1) 尺规作图: 作对角线 AC 的垂直平分线, 交 CD 于点 E , 交 AB 于点 F ; (不写作法, 保留作图痕迹)
- (2) 连接 AE 、 CF . 求证: 四边形 $AFCE$ 是菱形.

【答案】(1) 见解析;

(2) 见解析.

【解析】

【分析】本题主要考查矩形的性质, 垂直平分线的画法及性质, 三角形全等的判定与性质, 菱形的判定.

(1) 根据垂直平分线的画法即可求解;

(2) 由直线 EF 是线段 AC 的垂直平分线, 得到 $EA = EC$, $FA = FC$, $\angle COE = \angle AOF = 90^\circ$, $OA = OC$, 根据矩形的性质可证 $\triangle COE \cong \triangle AOF$ (ASA), 可得 $EC = FA$, 即可得到 $EA = EC = FA = FC$, 即可求证.

【小问 1 详解】

解: 如图 1 所示, 直线 EF 为所求;

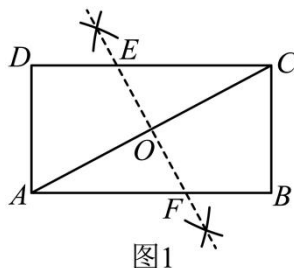


图1

【小问 2 详解】

证明: 如图 2, 设 EF 与 AC 的交点为 O ,

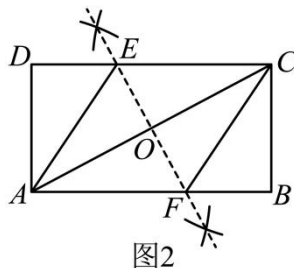


图2

由 (1) 可知, 直线 EF 是线段 AC 的垂直平分线.

$$\therefore EA = EC, FA = FC, \angle COE = \angle AOF = 90^\circ, OA = OC,$$

又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore CD \parallel AB,$$

$$\therefore \angle ECO = \angle FAO,$$

$$\therefore \triangle COE \cong \triangle AOF (\text{ASA}),$$

$$\therefore EC = FA,$$

$$\therefore EA = EC = FA = FC,$$

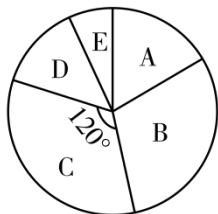
$\therefore$ 四边形 $AFCE$ 是菱形.

20. 广元市开展“蜀道少年”选拔活动，旨在让更多的青少年关注蜀道、了解蜀道、热爱蜀道、宣传蜀道，进一步挖掘和传承古蜀道文化、普及蜀道知识. 为此某校开展了“蜀道文化知识竞赛”活动，并从全校学生中抽取了若干学生的竞赛成绩进行整理、描述和分析（竞赛成绩用 x 表示，总分为 100 分，共分成五个等级： $A: 90 \leq x \leq 100$ ； $B: 80 \leq x < 90$ ； $C: 70 \leq x < 80$ ； $D: 60 \leq x < 70$ ； $E: 50 \leq x < 60$ ），并绘制了如下尚不完整的统计图.

抽取学生成绩等级人数统计表

等级	A	B	C	D	E
人数	m	27	30	12	6

抽取学生成绩等级扇形统计图



其中扇形图中 C 等级区域所对应的扇形的圆心角的度数是 120° .

- (1) 样本容量为____， $m =$ ____；
- (2) 全校 1200 名学生中，请估计 A 等级的人数；
- (3) 全校有 5 名学生得满分，七年级 1 人，八年级 2 人，九年级 2 人，从这 5 名学生中任意选择两人在国旗下分享自己与蜀道的故事，请你用画树状图或列表的方法，求这两人来自同一个年级的概率.

【答案】(1) 90, 15;

(2) 200; (3) $\frac{1}{5}$.

【解析】

【分析】(1) 利用 C 等级的人数及其扇形圆心角度数求出总人数，用总人数减去其他等级的人数即可得到 m 的值;

(2) 用总人数 1200 乘以抽样调查中的 A 等级的比例即可得到 A 等级的人数;

(3) 列树状图求解即可.

【小问 1 详解】

解: 样本容量为 $30 \div \frac{120}{360} = 90$, $m = 90 - 27 - 30 - 12 - 6 = 15$,

故答案为: 90, 15

【小问 2 详解】

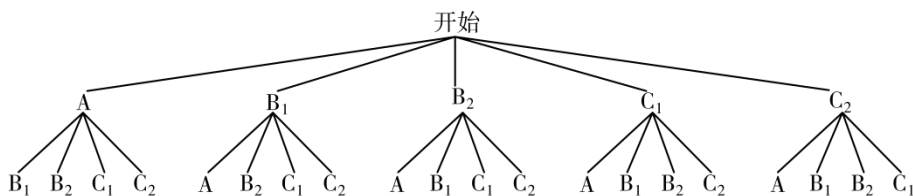
$$1200 \times \frac{15}{90} = 200 \text{ (名)}$$

答: 全校 1200 名学生中, 估计 A 等级的人数有 200 名.

【小问 3 详解】

设七年级学生为 A , 八年级学生为 B_1, B_2 , 九年级学生为 C_1, C_2

画树状图如下:



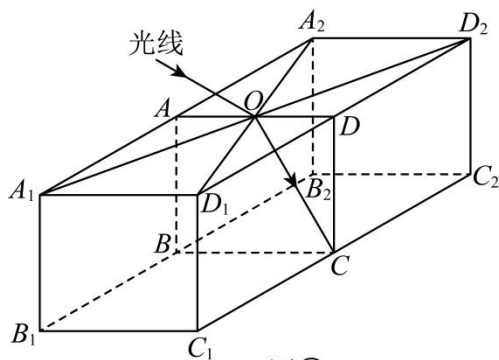
由树状图可知一共有 20 种等可能的结果, 其中两人来自同一个年级的结果有 4 种,

$$\therefore P(\text{选择的两人来自同一个年级}) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

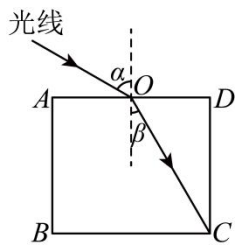
【点睛】此题考查了扇形统计图与统计表, 列树状图求概率, 利用个体比例求总体中的数量, 正确理解统计图表得到相关信息是解题的关键.

21. 小明从科普读物中了解到, 光从真空射入介质发生折射时, 入射角 α 的正弦值与折射角 β 的正弦值的

比值 $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ 叫做介质的“绝对折射率”, 简称“折射率”. 它表示光在介质中传播时, 介质对光作用的一种特征.



图①



图②

- (1) 若光从真空射入某介质，入射角为 α ，折射角为 β ，且 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ ， $\beta = 30^\circ$ ，求该介质的折射率；
- (2) 现有一块与 (1) 中折射率相同的长方体介质，如图①所示，点 A, B, C, D 分别是长方体棱的中点，若光线经真空从矩形 $A_1D_1D_2A_2$ 对角线交点 O 处射入，其折射光线恰好从点 C 处射出. 如图②，已知 $\alpha = 60^\circ$ ， $CD = 10\text{cm}$ ，求截面 $ABCD$ 的面积.

【答案】(1) $\frac{3}{2}$;

(2) $100\sqrt{2}\text{cm}^2$.

【解析】

【分析】 本题主要考查了解直角三角形的应用，勾股定理等知识，

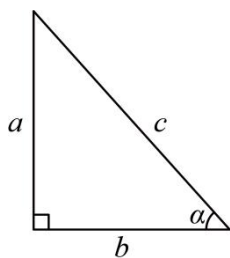
(1) 根据 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ ，设 $b = \sqrt{7}x$ ，则 $c = 4x$ ，利用勾股定理求出 $a = \sqrt{(4x)^2 - (\sqrt{7}x)^2} = 3x$ ，进而可得 $\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}$ ，问题即可得解；

(2) 根据折射率与 (1) 的材料相同，可得折射率为 $\frac{3}{2}$ ，根据 $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin \beta} = \frac{3}{2}$ ，可得 $\sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，则有 $\sin \angle OCD = \sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，在 $\text{Rt} \triangle ODC$ 中，设 $OD = \sqrt{3}x$ ， $OC = 3x$ ，问题随之得解.

【小问 1 详解】

$$\because \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4},$$

$\therefore$ 如图,



设 $b = \sqrt{7}x$ ，则 $c = 4x$ ，由勾股定理得， $a = \sqrt{(4x)^2 - (\sqrt{7}x)^2} = 3x$ ，

$$\therefore \sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4},$$

又 $\because \beta = 30^\circ$ ，

$$\therefore \sin \beta = \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{折射率为: } \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}.$$

【小问 2 详解】

根据折射率与 (1) 的材料相同，可得折射率为 $\frac{3}{2}$ ，

$\therefore \alpha = 60^\circ$ ，

$$\therefore \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin \beta} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，点 O 是 AD 中点，

$\therefore AD = 2OD$ ， $\angle D = 90^\circ$ ，

又 $\because \angle OCD = \beta$ ，

$$\therefore \sin \angle OCD = \sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

在 $\text{Rt}\triangle ODC$ 中，设 $OD = \sqrt{3}x$ ， $OC = 3x$ ，

由勾股定理得， $CD = \sqrt{(3x)^2 - (\sqrt{3}x)^2} = \sqrt{6}x$ ，

$$\therefore \tan \beta = \frac{OD}{CD} = \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{6}x} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

又 $\because CD = 10\text{cm}$ ，

$$\therefore \frac{OD}{10} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\therefore OD = 5\sqrt{2}\text{cm},$$

$$\therefore AD = 10\sqrt{2}\text{cm},$$

$$\therefore \text{截面 } ABCD \text{ 的面积为: } 10\sqrt{2} \times 10 = 100\sqrt{2}\text{cm}^2.$$

22. 近年来, 中国传统服饰备受大家的青睐, 走上国际时装周舞台, 大放异彩. 某服装店直接从工厂购进长、短两款传统服饰进行销售, 进货价和销售价如下表:

价格/类别	短款	长款
进货价 (元/件)	80	90
销售价 (元/件)	100	120

- (1) 该服装店第一次用 4300 元购进长、短两款服装共 50 件, 求两款服装分别购进的件数;
- (2) 第一次购进的两款服装售完后, 该服装店计划再次购进长、短两款服装共 200 件 (进货价和销售价都不变), 且第二次进货总价不高于 16800 元. 服装店这次应如何设计进货方案, 才能获得最大销售利润, 最大销售利润是多少?

【答案】 (1) 长款服装购进 30 件, 短款服装购进 20 件;

(2) 当购进 120 件短款服装, 80 件长款服装时有最大利润, 最大利润是 4800 元.

【解析】

【分析】 本题考查了二元一次方程的实际应用, 一元一次不等式的实际应用, 列出正确的等量关系和不等关系是解题的关键.

(1) 设购进服装 x 件, 购进长款服装 y 件, 根据“用 4300 元购进长、短两款服装共 50 件,” 列二元一次方程组计算求解;

(2) 设第二次购进 m 件短款服装, 则购进 $(200-m)$ 件长款服装, 根据“第二次进货总价不高于 16800 元”列不等式计算求解, 然后结合一次函数的性质分析求最值.

【小问 1 详解】

解: 设购进短款服装 x 件, 购进长款服装 y 件,

$$\text{由题意可得} \begin{cases} x + y = 50 \\ 80x + 90y = 4300 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 20 \\ y = 30 \end{cases},$$

答：长款服装购进 30 件，短款服装购进 20 件.

【小问 2 详解】

解：设第二次购进 m 件短款服装，则购进 $(200-m)$ 件长款服装，

由题意可得 $80m + 90(200-m) \leq 16800$,

解得： $m \geq 120$,

设利润为 w 元，则 $w = (100-80)m + (120-90)(200-m) = -10m + 6000$,

$\therefore -10 < 0$,

$\therefore w$ 随 m 的增大而减小，

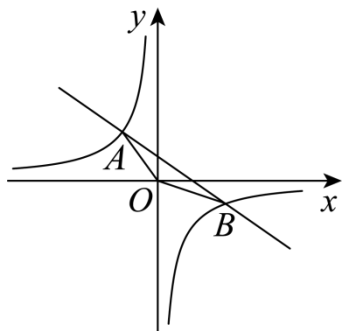
$\therefore$ 当 $m = 120$ 时，

$\therefore w_{\text{最大}} = -10 \times 120 + 6000 = 4800$ (元).

答：当购进 120 件短款服装，80 件长款服装时有最大利润，最大利润是 4800 元.

23. 如图，已知反比例函数 $y_1 = \frac{k}{x}$ 和一次函数 $y_2 = mx + n$ 的图象相交于点 $A(-3, a)$ ， $B\left(a + \frac{3}{2}, -2\right)$ 两点，

O 为坐标原点，连接 OA ， OB .



(1) 求 $y_1 = \frac{k}{x}$ 与 $y_2 = mx + n$ 的解析式；

(2) 当 $y_1 > y_2$ 时，请结合图象直接写出自变量 x 的取值范围；

(3) 求 $\triangle AOB$ 的面积.

【答案】(1) $y_1 = -\frac{9}{x}$; $y_2 = -\frac{2}{3}x + 1$

(2) $-3 < x < 0$ 或 $x > \frac{9}{2}$

$$(3) \frac{15}{4}$$

【解析】

【分析】(1) 根据题意可得 $-3a = -2\left(a + \frac{3}{2}\right)$ ，即有 $a = 3$ ，问题随之得解；

(2) $y_1 > y_2$ 表示反比例函数 $y_1 = \frac{k}{x}$ 的图象在一次函数 $y_2 = mx + n$ 的图象上方时，对应的自变量的取值范围，据此数形结合作答即可；

(3) 若 AB 与 y 轴相交于点 C ，可得 $C(0,1)$ ，则 $OC = 1$ ，根据 $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2}OC(x_B - x_A)$ ，问题即可得解。

【小问 1 详解】

$$\text{由题知 } -3a = -2\left(a + \frac{3}{2}\right),$$

$$\therefore a = 3,$$

$$\therefore A(-3,3), B\left(\frac{9}{2}, -2\right),$$

$$\therefore y_1 = -\frac{9}{x},$$

$$\text{把 } A(-3,3), B\left(\frac{9}{2}, -2\right) \text{ 代入 } y_2 = mx + n \text{ 得 } \begin{cases} -3m + n = 3 \\ \frac{9}{2}m + n = -2 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} m = -\frac{2}{3} \\ n = 1 \end{cases},$$

$$\therefore y_2 = -\frac{2}{3}x + 1;$$

【小问 2 详解】

由图象可知自变量 x 的取值范围为 $-3 < x < 0$ 或 $x > \frac{9}{2}$

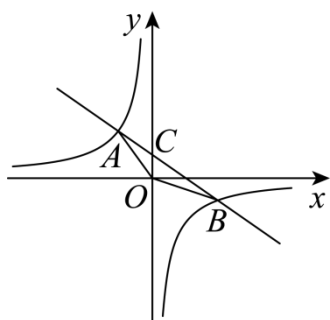
【小问 3 详解】

若 AB 与 y 轴相交于点 C ，

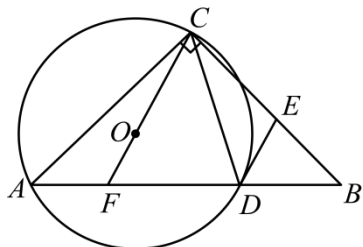
$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } y_2 = -\frac{2}{3}x + 1 = 1,$$

$\therefore C(0,1)$, 即: $OC=1$,

$$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2}OC(x_B - x_A) = \frac{1}{2} \times 1 \times \left(\frac{9}{2} + 3\right) = \frac{15}{4}.$$



24. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=BC$, $\angle ACB=90^\circ$, $\odot O$ 经过 A 、 C 两点, 交 AB 于点 D , CO 的延长线交 AB 于点 F , $DE \parallel CF$ 交 BC 于点 E .



- (1) 求证: DE 为 $\odot O$ 的切线;
- (2) 若 $AC=4$, $\tan \angle CFD=2$, 求 $\odot O$ 的半径.

【答案】(1) 证明见解析;

$$(2) r = \frac{2\sqrt{10}}{3}.$$

【解析】

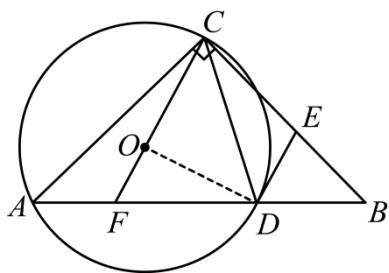
【分析】(1) 连接 OD , 根据等腰三角形的性质可得 $\angle COD = 2\angle CAB = 90^\circ$, 再根据 $DE \parallel CF$, 可得 $\angle EDO = 180^\circ - \angle COD = 90^\circ$, 问题得证;

(2) 过点 C 作 $CH \perp AB$ 于点 H , 根据等腰直角三角形的性质有 $CH = AH = 2\sqrt{2}$, 结合 $\tan \angle CFD = 2$, 可得 $\frac{CH}{FH} = 2$, 即 $FH = \sqrt{2}$, 利用勾股定理可得 $CF = \sqrt{10}$. 在 $\text{Rt}\triangle FOD$ 中, 根据 $\tan \angle CFD = \frac{OD}{OF} = 2$,

设半径为 r , 即有 $\frac{r}{\sqrt{10}-r} = 2$, 问题得解.

【小问 1 详解】

证明: 连接 OD .



$$\because AC = BC, \angle ACB = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle ACB$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore \angle CAB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle COD = 2\angle CAB = 90^\circ,$$

$$\because DE \parallel CF,$$

$$\therefore \angle COD + \angle EDO = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle EDO = 180^\circ - \angle COD = 90^\circ,$$

$\therefore DE$ 为 $\odot O$ 的切线.

【小问 2 详解】

过点 C 作 $CH \perp AB$ 于点 H ,

$\because \triangle ACB$ 为等腰直角三角形, $AC = 4$,

$$\therefore AB = 4\sqrt{2},$$

$$\therefore CH = AH = 2\sqrt{2},$$

$$\because \tan \angle CFD = 2,$$

$$\therefore \frac{CH}{FH} = 2,$$

$$\therefore FH = \sqrt{2},$$

$$\because CF^2 = CH^2 + FH^2,$$

$$\therefore CF = \sqrt{10}.$$

$$\text{在 Rt}\triangle FOD \text{ 中, } \because \tan \angle CFD = \frac{OD}{OF} = 2,$$

$$\text{设半径为 } r, \therefore \frac{r}{\sqrt{10} - r} = 2,$$

$$\therefore r = \frac{2\sqrt{10}}{3}.$$

【分析】(1) 根据题意，由 $\angle ACD = \angle B$ ， $\angle A = \angle A$ ，利用两个三角形相似的判定定理即可得到 $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ ，再由相似性质即可得证；

(2) 设 $AD = BD = m$ ，由 (1) 中相似，代值求解得到 $AC = \sqrt{2}m$ ，从而根据 $\triangle ACD$ 与 $\triangle ABC$ 的相似比为 $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 求解即可得到答案；

(3) 过点 C 作 EB 的平行线交 AB 的延长线于点 H ，如图 1 所示，设 $CE = DE = a$ ，过点 B 作 $BF \perp EC$ 于点 F ，如图 2 所示，利用含 30° 的直角三角形性质及勾股定理即可得到相关角度与线段长，再由三角形相似的判定与性质得到 $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AH} = \frac{CD}{CH} = \frac{2a}{2\sqrt{7}a} = \frac{1}{\sqrt{7}}$ ，代值求解即可得到答案。

【小问 1 详解】

证明： $\because \angle ACD = \angle B$ ， $\angle A = \angle A$ ，

$\therefore \triangle ACD \sim \triangle ABC$ ，

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC},$$

$$\therefore AC^2 = AD \cdot AB;$$

【小问 2 详解】

解： $\because$ 点 D 为 AB 中点，

$\therefore$ 设 $AD = BD = m$ ，

由 (1) 知 $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ ，

$$\therefore AC^2 = AD \cdot AB = m \cdot 2m = 2m^2,$$

$$\therefore AC = \sqrt{2}m,$$

$$\therefore \triangle ACD \text{ 与 } \triangle ABC \text{ 的相似比为 } \frac{AD}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\therefore \frac{CD}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\therefore BC = 4$$

$$\therefore CD = 2\sqrt{2};$$

【小问 3 详解】

解：过点 C 作 EB 的平行线交 AB 的延长线于点 H ，过 C 作 $CY \perp AB$ ，如图 1 所示：

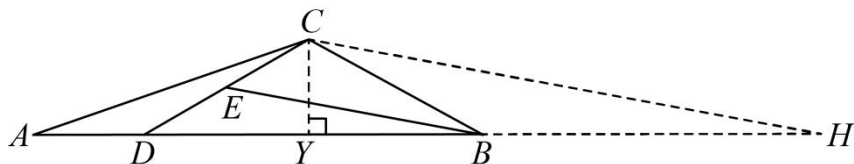


图 1

$\because$ 点 E 为 CD 中点,

$\therefore$ 设 $CE = DE = a$,

$\because \angle CDB = \angle CBD = 30^\circ$,

$\therefore CB = CD = 2a$, $\angle DCB = 120^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle BCY$ 中, $CY = \frac{1}{2}CD = a$, 则由勾股定理可得 $BD = 2\sqrt{3}a$,

过点 B 作 $BF \perp EC$ 于点 F , 如图 2 所示:

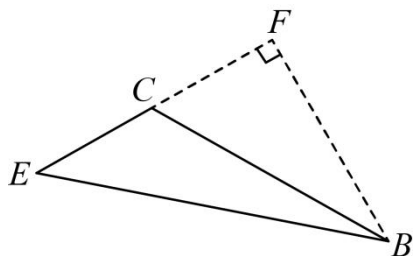


图 2

$\therefore \angle FCB = 60^\circ$,

$\therefore \angle CBF = 30^\circ$,

$\therefore CF = \frac{1}{2}BC$,

$\therefore CF = a$, $BF = \sqrt{3}a$,

$\therefore EF = 2a$,

$\therefore BE = \sqrt{7}a$,

$\because CH \parallel BE$, 点 E 为 CD 中点,

$\therefore CH = 2BE = 2\sqrt{7}a$, $DH = 2DB = 4\sqrt{3}a$, $\angle EBD = \angle H$,

又 $\because \angle ACD = \angle EBD$,

$\therefore \angle ACD = \angle H$, $\triangle ACD \sim \triangle AHC$,

$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AH} = \frac{CD}{CH} = \frac{2a}{2\sqrt{7}a} = \frac{1}{\sqrt{7}}$,

又 $\because AC = 2\sqrt{7}$,

$$\therefore AD = 2, \quad AH = 14,$$

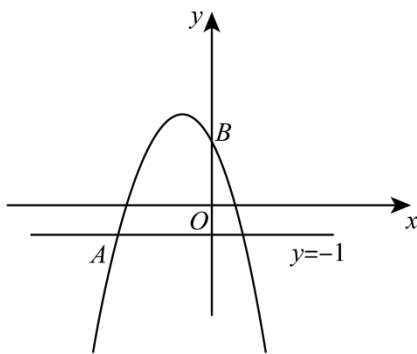
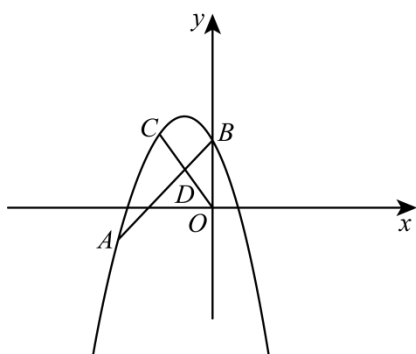
$$\therefore DH = 12, \quad \text{即 } 4\sqrt{3}a = 12,$$

$$\therefore a = \sqrt{3},$$

$$\therefore BE = \sqrt{7}a = \sqrt{21}.$$

【点睛】本题考查几何综合，涉及相似三角形的判定与性质、含 30° 的直角三角形性质、勾股定理等知识，熟练掌握三角形相似的判定与性质是解决问题的关键。

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $F: y = -x^2 + bx + c$ 经过点 $A(-3, -1)$ ，与 y 轴交于点 $B(0, 2)$ 。



(1) 求抛物线的函数表达式；

(2) 在直线 AB 上方抛物线上有一动点 C ，连接 OC 交 AB 于点 D ，求 $\frac{CD}{OD}$ 的最大值及此时点 C 的坐标；

(3) 作抛物线 F 关于直线 $y = -1$ 上一点的对称图象 F' ，抛物线 F 与 F' 只有一个公共点 E （点 E 在 y 轴右侧）， G 为直线 AB 上一点， H 为抛物线 F' 对称轴上一点，若以 B, E, G, H 为顶点的四边形是平行四边形，求 G 点坐标。

【答案】(1) $y = -x^2 - 2x + 2$ ；

(2) 最大值为 $\frac{9}{8}$ ， C 的坐标为 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{11}{4}\right)$ ；

(3) 点 G 的坐标为 $(-2, 0)$ ， $(2, 4)$ ， $(4, 6)$ 。

【解析】

【分析】(1) 本题考查了待定系数法解抛物线解析式，根据题意将点 A, B 坐标分别代入抛物线解析式，解方程即可；

(2) 根据题意证明 $\triangle CDM \sim \triangle ODB$ ，再设 AB 的解析式为 $y = mx + n$ ，求出 AB 的解析式，再设 $C(t, -t^2 - 2t + 2)$ ，则 $M(t, t + 2)$ ，再表示出 $\frac{CD}{OD}$ 利用最值即可得到本题答案；

(3) 根据题意求出 $E(1, -1)$ ，再分情况讨论当 BE 为对角线时，当 BE 为边时继而得到本题答案.

【小问 1 详解】

解： $A(-3, -1)$ ， $B(0, 2)$ 代入 $y = -x^2 + bx + c$ ，

$$\text{得：} \begin{cases} -9 - 3b + c = -1 \\ c = 2 \end{cases}, \text{解得：} \begin{cases} b = -2 \\ c = 2 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的函数表达式为 $y = -x^2 - 2x + 2$.

【小问 2 详解】

解：如图 1，过点 C 作 x 轴的垂线交 AB 于点 M .

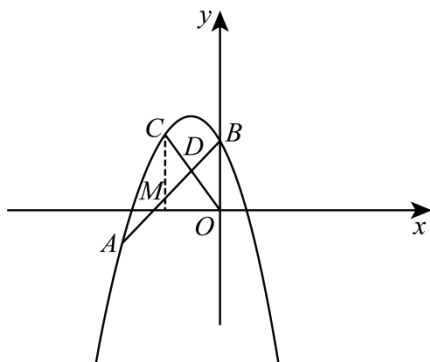


图1

$\therefore CM \parallel y$ 轴,

$\therefore \triangle CDM \sim \triangle ODB$,

$$\therefore \frac{CD}{OD} = \frac{CM}{OB} = \frac{CM}{2},$$

设 AB 的解析式为 $y = mx + n$,

$$\text{把 } A(-3, -1), B(0, 2) \text{ 代入解析式得 } \begin{cases} -3m + n = -1 \\ n = 2 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} m = 1 \\ n = 2 \end{cases},$$

$\therefore y = x + 2$.

设 $C(t, -t^2 - 2t + 2)$ ，则 $M(t, t + 2)$ ，

$$\therefore CM = -t^2 - 3t = -\left(t + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4},$$

$\therefore -3 < t < 0, -1 < 0$,

$$\therefore \text{当 } t = -\frac{3}{2} \text{ 时, } CM \text{ 最大, 最大值为 } CM = \frac{9}{4}.$$
$$\therefore \frac{CD}{OD} \text{ 的最大值为 } \frac{9}{8}, \text{ 此时点 } C \text{ 的坐标为 } \left(-\frac{3}{2}, \frac{11}{4}\right).$$

【小问 3 详解】

解: 由中心对称可知, 抛物线 F 与 F' 的公共点 E 为直线 $y = -1$ 与抛物线 F 的右交点,

$$\therefore -x^2 - 2x + 2 = -1,$$

$$\therefore x_1 = -3 \text{ (舍)}, \quad x_2 = 1,$$

$$\therefore E(1, -1).$$

∵ 抛物线 $F: y = -x^2 - 2x + 2$ 的顶点坐标为 $(-1, 3)$,

$\therefore$ 抛物线 F' 的顶点坐标为 $(3, -5)$,

$\therefore$ 抛物线 F' 的对称轴为直线 $x=3$.

如图 2, 当 BE 为对角线时, 由题知 $x_E - x_G = x_H - x_B = 3$,

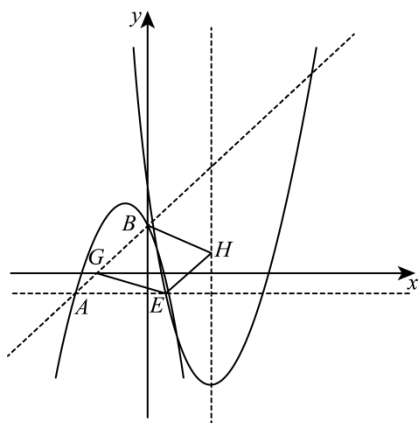


图3

$$\therefore x_G = -2,$$

$$\therefore G(-2, 0).$$

如图 3, 当 BE 为边时, 由题知 $x_H - x_G = x_E - x_B = 1$,

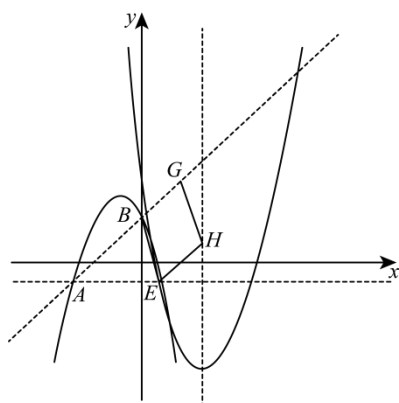


图3

$$\therefore x_G = 2,$$

$$\therefore G(2, 4).$$

如图 4, 由题知 $x_G - x_H = x_E - x_B = 1$,

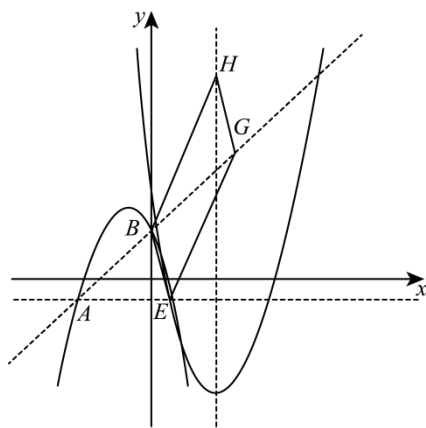


图4

$$\therefore x_G = 4,$$

$$\therefore G(4, 6),$$

综上: 点 G 的坐标为 $(-2, 0)$, $(2, 4)$, $(4, 6)$.