

宜宾市 2024 年初中学业水平考试暨高中阶段学校招生考试

数学

(考试时间：120 分钟，全卷满分：150 分)

注意事项：

1. 答题前，务必将自己的姓名、座位号、准考证号填写在答题卡指定的位置并将答题卡背面座位号对应标号涂黑。
2. 答选择题时，务必使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时，务必使用 0.5 毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡规定的位置上作答，在试卷上答题无效。

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 4 分，共 48 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

1. 2 的绝对值是 ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. -2 D. 2

【答案】D

【解析】

【分析】根据绝对值的意义即可求解。

【详解】解：2 的绝对值是 2，

故选：D。

【点睛】本题考查了绝对值的计算，掌握正数的绝对值是它本身，零的绝对值是零，负数的绝对值是它的相反数，是解题的关键。

2. 下列计算正确的是 ()

- A. $a + a = a^2$ B. $5a - 3a = 2$ C. $3x \cdot 2x = 6x^2$ D. $(-x)^3 \div (-x)^2 = x$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了同底数幂的运算法则，合并同类项。根据同底数幂的运算法则以及合并同类项的法则，逐个进行计算，即可解答。

【详解】解：A、 $a + a = 2a \neq a^2$ ，故本选项不符合题意；

B、 $5a - 3a = 2a \neq 2$ ，故本选项不符合题意；

C、 $3x \cdot 2x = 6x^2$ ，故本选项符合题意；

D、 $(-x)^3 \div (-x)^2 = -x \neq x$ ，故本选项不符合题意；

故选：C.

3. 某校为了解九年级学生在校的锻炼情况，随机抽取 10 名学生，记录他们某一天在校的锻炼时间（单位：分钟）：65, 67, 75, 65, 75, 80, 75, 88, 78, 80. 对这组数据判断正确的是（ ）

- A. 方差为 0 B. 众数为 75 C. 中位数为 77.5 D. 平均数为 75

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查方差，众数，中位数和平均数，分别根据相关定义求解即可.

【详解】解：这组数据的平均数为： $\frac{65+67+75+65+75+80+75+88+78+80}{10} = 74.8$ ，故选项 D 错误，

不符合题意；

方差为

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{10} \left[(65-74.8)^2 + (67-74.8)^2 + (75-74.8)^2 + \cdots + (88-74.8)^2 + (78-74.8)^2 + (80-74.8)^2 \right] \\ &= \frac{1}{10} \times (96.4 + 60.84 + 0.04 + 96.4 + 0.04 + 27.04 + 0.04 + 174.24 + 10.24 + 27.04) \\ &= \frac{1}{10} \times 492.32 \\ &= 49.232, \text{ 故选项 A 错误, 不符合题意;} \end{aligned}$$

这组数据中，75 出现次数最多，共出现 3 次，故众数是 75，故选项 B 正确，符合题意；

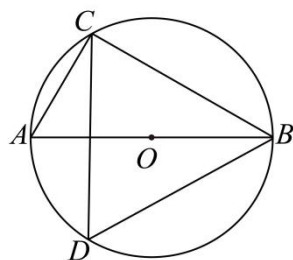
这组数据按大小顺序排列为：65, 65, 67, 75, 75, 75, 78, 80, 80, 88.

最中间的两个数是 75, 75,

故中位数为 $\frac{75+75}{2} = 75$ ，故项 C 错误，不符合题意，

故选：B.

4. 如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，若 $\angle CDB = 60^\circ$ ，则 $\angle ABC$ 的度数等于（ ）



- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了直径所对的圆周角为直角，同弧或等弧所对的圆周角相等. 根据直径所对的圆周角为

直角得到 $\angle ACB = 90^\circ$ ，同弧或等弧所对的圆周角相等得到 $\angle CDB = \angle A = 60^\circ$ ，进一步计算即可解答.

【详解】解： $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\because \angle CDB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle CDB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ - \angle A = 30^\circ,$$

故选：A.

5. 元朝朱世杰所著的《算学启蒙》中，记载了这样一道题：“良马日行二百四十里，驽马日行一百五十里，驽马先行一十二日，问良马几何日追及之？”其大意是：快马每天行 240 里，慢马每天行 150 里，慢马先行 12 天，问快马几天可追上慢马？则快马追上慢马的天数是（ ）

A. 5 天

B. 10 天

C. 15 天

D. 20 天

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了一元一次方程的应用. 设快马 x 天可以追上慢马，根据快马和慢马所走的路程相等建立方程，解出即可.

【详解】解：设快马 x 天可以追上慢马，

$$\text{据题意： } 240x = 150x + 12 \times 150,$$

$$\text{解得： } x = 20.$$

答：快马 20 天可以追上慢马.

故选：D.

6. 如果一个数等于它的全部真因数（含单位 1，不含它本身）的和，那么这个数称为完美数. 例如：6 的真因数是 1、2、3，且 $6 = 1 + 2 + 3$ ，则称 6 为完美数. 下列数中为完美数的是（ ）

A. 8

B. 18

C. 28

D. 32

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查新定义，解题的关键是正确读懂新定义. 根据新定义逐个判断即可得到答案.

$$\text{【详解】解： } \because 8 = 1 \times 8 = 2 \times 4, \quad 1 + 2 + 4 = 7 \neq 8,$$

$\therefore 8$ 不是完美数，故选项 A 不符合题意；

$$\because 18 = 1 \times 18 = 2 \times 9 = 3 \times 6, \quad 1 + 2 + 3 + 6 + 9 = 21 \neq 18,$$

$\therefore 18$ 不是完美数，故选项 B 不符合题意；

$$\because 28 = 1 \times 28 = 2 \times 14 = 4 \times 7, \quad 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28,$$

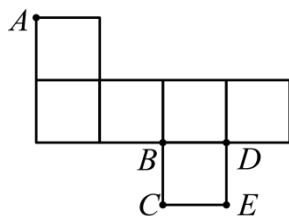
∴ 28 是完美数，故选项 C 符合题意；

∴ $32 = 1 \times 32 = 2 \times 16 = 4 \times 8$, $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31 \neq 32$,

∴ 32 不是完美数，故选项 D 不符合题意；

故选：C

7. 如图是正方体表面展开图. 将其折叠成正方体后, 距顶点 A 最远的点是 ()



A. B 点

B. C 点

C. D 点

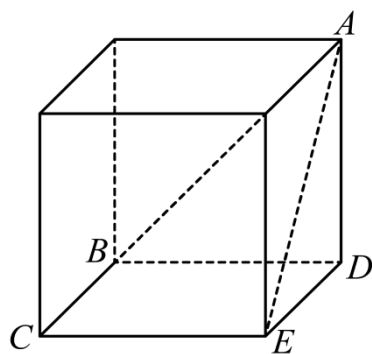
D. E 点

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了平面图形和立体图形, 把图形围成立体图形求解.

【详解】解: 把图形围成立方体如图所示:



所以与顶点 A 距离最远的顶点是 C,

故选: B.

8. 某果农将采摘的荔枝分装为大箱和小箱销售, 其中每个大箱装 4 千克荔枝, 每个小箱装 3 千克荔枝. 该果农现采摘有 32 千克荔枝, 根据市场销售需求, 大小箱都要装满, 则所装的箱数最多为 ()

A. 8 箱

B. 9 箱

C. 10 箱

D. 11 箱

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查的是二元一次方程的正整数解问题, 设用 x 个大箱, y 个小箱, 利用每个大箱装 4 千克荔枝, 每个小箱装 3 千克荔枝, 建立方程, 求出方程的正整数解可得答案.

【详解】解: 设用 x 个大箱, y 个小箱,

$$\therefore 4x + 3y = 32,$$

$$\therefore x = \frac{32 - 3y}{4} = 8 - \frac{3}{4}y,$$

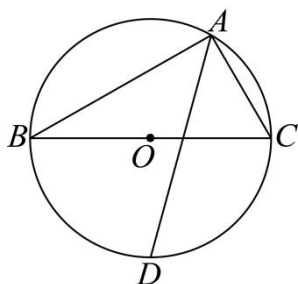
$\therefore$ 方程的正整数解为：

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 2 \\ y = 8 \end{cases},$$

$\therefore$ 所装的箱数最多为 $2 + 8 = 10$ 箱；

故选 C.

9. 如图, $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, BC 为 $\odot O$ 的直径, AD 平分 $\angle BAC$ 交 $\odot O$ 于 D . 则 $\frac{AB + AC}{AD}$ 的值为 ()



A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. $2\sqrt{2}$

D. $2\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了三角形的外接圆，特殊角的三角函数，圆周角定理，图形的旋转等知识点，合理作辅助线为解题的关键.

作辅助线如图，先证明 $BD = CD$, $\angle ACD + \angle ABD = 180^\circ$, 从而可以得到旋转后的图形，再证明 $\triangle A'DA$ 是等腰直角三角形，利用三角函数即可求得结果.

【详解】解：如图，连接 BD 、 CD ,

$\because BC$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle BAC = \angle BDC = 90^\circ,$$

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$,

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD,$$

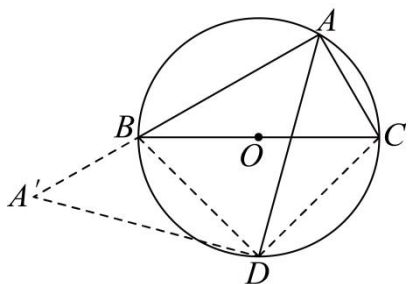
$$\therefore \widehat{BD} = \widehat{DC},$$

$$\therefore BD = CD,$$

在四边形 $ABDC$ 中, $\angle BAC = \angle BDC = 90^\circ$,

$$\therefore \angle ACD + \angle ABD = 180^\circ,$$

$\therefore \triangle ADC$ 绕 D 点逆时针旋转 90° ，如图所示



$$\therefore AB + AC = AB + A'B = AA',$$

$\therefore$ 由旋转可知 $\angle A'DB = \angle ADC$ ， $A'D = AD$

$$\therefore \angle A'DA = \angle A'DB + \angle BDA = \angle ADC + \angle BDA = \angle BDC = 90^\circ,$$

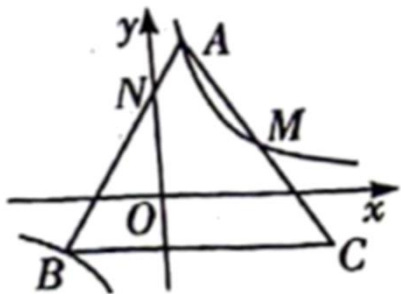
$$\therefore \text{在等腰直角三角形 } A'DA \text{ 中, } \sin \angle A' = \sin 45^\circ = \frac{AD}{AA'} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \frac{AA'}{AD} = \frac{AB + AC}{AD} = \sqrt{2}.$$

故选：A

10. 如图，等腰三角形 ABC 中， $AB = AC$ ，反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象经过点 A 、 B 及 AC 的中点

M ， $BC \parallel x$ 轴， AB 与 y 轴交于点 N 。则 $\frac{AN}{AB}$ 的值为（ ）



A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{5}$

D. $\frac{2}{5}$

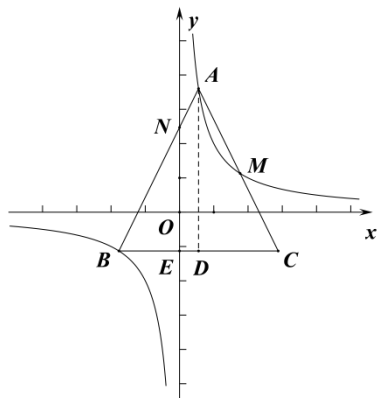
【答案】B

【解析】

【分析】本题考查反比例函数的性质，平行线分线段成比例定理，等腰三角形的性质等知识，找到坐标之间的关系是解题的关键。

作辅助线如图，利用函数表达式设出 A 、 B 两点的坐标，利用 D ， M 是中点，找到坐标之间的关系，利用平行线分线段成比例定理即可求得结果。

【详解】解：作过 A 作 BC 的垂线垂足为 D ， BC 与 y 轴交于 E 点，如图，



在等腰三角形 ABC 中, $AD \perp BC$, D 是 BC 中点,

$$\text{设 } A\left(a, \frac{k}{a}\right), B\left(b, \frac{k}{b}\right),$$

由 BC 中点为 D , $AB = AC$, 故等腰三角形 ABC 中,

$$\therefore BD = DC = a - b,$$

$$\therefore C\left(2a - b, \frac{k}{b}\right),$$

$\therefore AC$ 的中点为 M ,

$$\therefore M\left(\frac{3a - b}{2}, \frac{\frac{k}{a} + \frac{k}{b}}{2}\right), \text{ 即 } \left(\frac{3a - b}{2}, \frac{k(a + b)}{2ab}\right),$$

$$\text{由 } M \text{ 在反比例函数上得 } M\left(\frac{3a - b}{2}, \frac{k}{\frac{3a - b}{2}}\right),$$

$$\therefore \frac{k(a + b)}{2ab} = \frac{k}{\frac{3a - b}{2}},$$

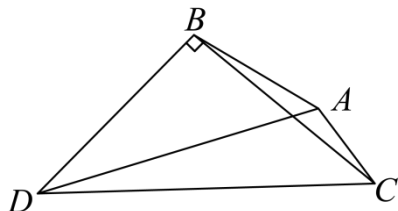
$$\text{解得: } b = -3a,$$

由题可知, $AD \parallel NE$,

$$\therefore \frac{AN}{AB} = \frac{DE}{BD} = \frac{a}{a - b} = \frac{a}{a + 3a} = \frac{1}{4}.$$

故选: B.

11. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 3\sqrt{2}$, $AC = 2$, 以 BC 为边作 $\text{Rt}\triangle BCD$, $BC = BD$, 点 D 与点 A 在 BC 的两侧, 则 AD 的最大值为 ()



A. $2+3\sqrt{2}$

B. $6+2\sqrt{2}$

C. 5

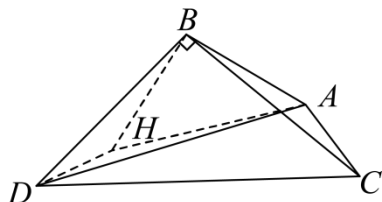
D. 8

【答案】D

【解析】

【分析】如图，把 $\triangle ABC$ 绕 B 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle HBD$ ，求解 $AH = \sqrt{AB^2 + BH^2} = 6$ ，结合 $AD \leq DH + AH$ ，（ A, H, D 三点共线时取等号），从而可得答案.

【详解】解：如图，把 $\triangle ABC$ 绕 B 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle HBD$ ，



$$\therefore AB = BH = 3\sqrt{2}, \quad AC = DH = 2, \quad \angle ABH = 90^\circ,$$

$$\therefore AH = \sqrt{AB^2 + BH^2} = 6,$$

$$\therefore AD \leq DH + AH, \quad (A, H, D \text{ 三点共线时取等号}),$$

$$\therefore AD \text{ 的最大值为 } 6 + 2 = 8,$$

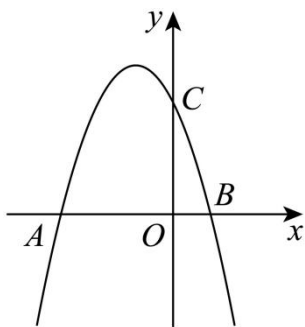
故选 D

【点睛】本题考查的是勾股定理的应用，旋转的性质，三角形的三边关系，二次根式的乘法运算，做出合适的辅助线是解本题的关键.

12. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$) 的图象交 x 轴于点 $A(-3, 0)$ 、 $B(1, 0)$ ，交 y 轴于点 C . 以下结论：

① $a + b + c = 0$ ；② $a + 3b + 2c < 0$ ；③当以点 A 、 B 、 C 为顶点的三角形是等腰三角形时， $c = \sqrt{7}$ ；④当

$c = 3$ 时，在 $\triangle AOC$ 内有一动点 P ，若 $OP = 2$ ，则 $CP + \frac{2}{3}AP$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{97}}{3}$. 其中正确结论有 ()



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】C

【解析】

【分析】根据抛物线图象经过点 $B(1,0)$ ，可得当 $x=1$ 时， $y=a+b+c=0$ ，据此可判断①；根据对称轴计算公式求出 $b=2a$ ，进而推出 $c=-3a$ ，则 $a+3b+2c=a+6a-6a=a$ ，再根据抛物线开口向下，即可判断②；对称轴为直线 $x=-1$ ，则 $AC \neq BC$ ，求出 $AB=4$ ， $OC=c$ ，再分当 $AC=AB=4$ 时，当 $BC=AB=4$ 时，两种情况求出对应的 c 的值即可判断③；当 $c=3$ 时， $C(0,3)$ ，则 $OC=3$ ，取点 $H\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$ ，连接 PH ，则 $OH=\frac{4}{3}$ ，可证明 $\triangle HOP \sim \triangle POA$ ，由相似三角形的性质可得 $PH=\frac{2}{3}PA$ ，则 $CP+\frac{2}{3}AP=CP+PH$ ，故当点 P 在线段 CH 上时， $CP+PH$ 的值最小，即此时 $CP+\frac{2}{3}AP$ 的值最小，最小值为线段 CH 的长，利用勾股定理求出 CH 即可判断④。

【详解】解：∵ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a<0$) 的图象经过点 $B(1,0)$ ，

∴ 当 $x=1$ 时， $y=a+b+c=0$ ，故①正确；

∵ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a<0$) 的图象交 x 轴于点 $A(-3,0)$ 、 $B(1,0)$ ，

∴ 抛物线对称轴为直线 $x=\frac{-3+1}{2}=-1$ ，

∴ $-\frac{b}{2a}=-1$ ，

∴ $b=2a$ ，

∴ $a+2a+c=0$ ，即 $c=-3a$ ，

∴ $a+3b+2c=a+6a-6a=a$ ，

∴ $a<0$ ，

∴ $a+3b+2c<0$ ，故②正确；

∴ 对称轴为直线 $x=-1$ ，

$$\therefore AC \neq BC;$$

$$\therefore A(-3,0)、B(1,0),$$

$$\therefore OA=3, OB=1,$$

$$\therefore AB=4;$$

在 $y = ax^2 + bx + c (a < 0)$ 中, 当 $x=0$ 时, $y=c$,

$$\therefore C(0, c),$$

$$\therefore OC=c,$$

当 $AC = AB = 4$ 时, 则由勾股定理得 $AC^2 = OA^2 + OC^2$,

$$\therefore 4^2 = 3^2 + c^2,$$

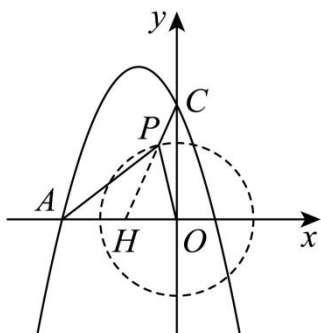
$$\therefore c = \sqrt{7} \text{ 或 } c = -\sqrt{7} \text{ (舍去);}$$

同理当 $BC = AB = 4$ 时, 可得 $c = \sqrt{15}$;

综上所述, 当以点 A 、 B 、 C 为顶点的三角形是等腰三角形时, $c = \sqrt{7}$ 或 $c = \sqrt{15}$, 故③错误;

当 $c=3$ 时, $C(0,3)$, 则 $OC=3$,

如图所示, 取点 $H\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$, 连接 PH , 则 $OH = \frac{4}{3}$,



$$\therefore \frac{OH}{OP} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{OP}{OA} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{OH}{OP} = \frac{OP}{OA},$$

$$\text{又} \because \angle HOP = \angle POA,$$

$$\therefore \triangle HOP \sim \triangle POA,$$

$$\therefore \frac{PH}{PA} = \frac{OP}{OA} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore PH = \frac{2}{3}PA,$$

$$\therefore CP + \frac{2}{3}AP = CP + PH,$$

$\therefore$ 当点 P 在线段 CH 上时, $CP + PH$ 的值最小, 即此时 $CP + \frac{2}{3}AP$ 的值最小, 最小值为线段 CH 的长,

在 $\text{Rt}\triangle OCH$ 中, 由勾股定理得 $CH = \sqrt{OH^2 + OC^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 3^2} = \frac{\sqrt{97}}{3}$, 故④正确,

$\therefore$ 正确的有 3 个,

故选: C.

【点睛】本题主要考查了二次函数图象的性质, 相似三角形的性质与判定, 勾股定理, 等腰三角形的定义, 熟练掌握二次函数的相关知识是解题的关键.

二、填空题: 本大题共 6 个小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

13. 分解因式: $2m^2 - 2 =$ _____.

【答案】 $2(m+1)(m-1)$

【解析】

【详解】解: $2m^2 - 2 = 2(m^2 - 1) = 2(m+1)(m-1)$.

故答案为 $2(m+1)(m-1)$.

14. 分式方程 $\frac{x+1}{x-1} - 3 = 0$ 的解为_____.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】本题考查的是分式方程的解法, 掌握解法步骤是解本题的关键; 先去分母, 化为整式方程, 再解方程并检验即可.

【详解】解: $\frac{x+1}{x-1} - 3 = 0$,

$$\therefore x+1-3(x-1)=0,$$

$$\therefore -2x = -4,$$

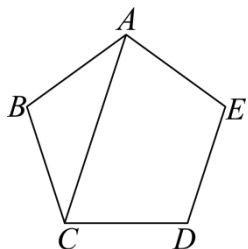
解得: $x = 2$,

经检验： $x = 2$ 是原方程的根，

$\therefore$ 方程的根为 $x = 2$ ，

故答案为： $x = 2$ 。

15. 如图，正五边形 $ABCDE$ 的边长为 4，则这个正五边形的对角线 AC 的长是_____。

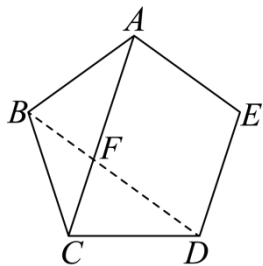


【答案】 $2\sqrt{5} + 2$

【解析】

【分析】 此题考查了正五边形以及等腰三角形的性质和相似三角形的判定与性质。根据正五边形以及等腰三角形的性质得出 $AF = AB = 4$ ，再证明 $\triangle BCF \sim \triangle ACB$ ，根据相似三角形的性质求出 CF ，最后由线段和差即可求出 AC 的长。

【详解】 解：如图，连接 BD 交 AC 于点 F ，



$\because$ 五边形 $ABCDE$ 是正五边形，

$$\therefore \angle ABC = \angle BCD = \frac{(5-2) \times 180^\circ}{5} = 108^\circ, \quad AB = BC = CD = 4,$$

$$\therefore \angle BCA = \angle BAC = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle AFB = \angle CBD + \angle BCA = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle AFB,$$

$$\therefore AF = AB = 4,$$

$$\therefore \angle BCF = \angle ACB, \quad \angle BAC = \angle CBF,$$

$$\therefore \triangle BCF \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{CF}{BC},$$

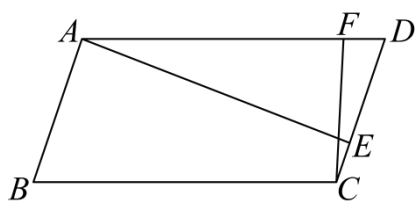
$$\text{即 } \frac{4}{CF+4} = \frac{CF}{4},$$

解得 $CF = 2\sqrt{5} - 2$ 或 $CF = -2\sqrt{5} - 2$ (舍去),

$$\therefore AC = CF + AF = 2\sqrt{5} - 2 + 4 = 2\sqrt{5} + 2,$$

故答案为: $2\sqrt{5} + 2$.

16. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB = 2$, $AD = 4$, E 、 F 分别是边 CD 、 AD 上的动点, 且 $CE = DF$. 当 $AE + CF$ 的值最小时, 则 $CE =$ _____.

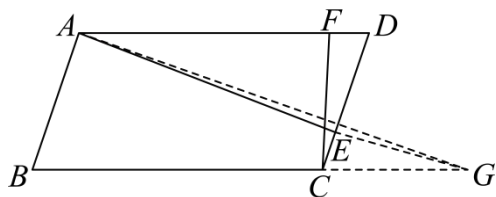


【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】本题主要考查了平行四边形的性质, 三角形全等的判定和性质, 相似三角形的判定和性质. 延长 BC , 截取 $CG = CD$, 连接 GE , AG , 证明 $\triangle CDF \cong \triangle GCE$, 得出 $CF = GE$, 说明当 $AE + EG$ 最小时, $AE + CF$ 最小, 根据两点之间线段最短, 得出当 A 、 E 、 G 三点共线时, $AE + EG$ 最小, 即 $AE + CF$ 最小, 再证明 $\triangle AED \sim \triangle GEC$, 根据相似三角形的性质, 求出结果即可.

【详解】解: 延长 BC , 截取 $CG = CD$, 连接 GE , AG , 如图所示:



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$$\therefore AB = DC = 2, \quad AD = BC = 4, \quad AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle D = \angle ECG,$$

$$\because CD = CG, \quad DF = CE,$$

$$\therefore \triangle CDF \cong \triangle GCE,$$

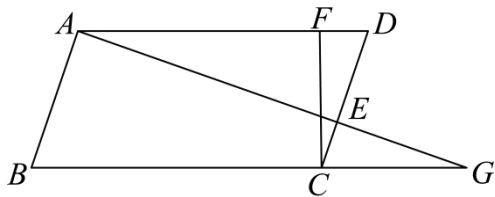
$$\therefore CF = GE,$$

$$\therefore AE + CF = AE + EG,$$

∴当 $AE + EG$ 最小时, $AE + CF$ 最小,

∵两点之间线段最短,

∴当 A 、 E 、 G 三点共线时, $AE + EG$ 最小, 即 $AE + CF$ 最小, 且最小值为 AG 的长,



∵ $AD \parallel CG$,

∴ $\triangle AED \sim \triangle GEC$,

$$\therefore \frac{AD}{GC} = \frac{DE}{CE}, \text{ 即 } \frac{4}{2} = \frac{2-CE}{CE},$$

$$\text{解得 } CE = \frac{2}{3}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{2}{3}.$$

17. 如图, 一个圆柱体容器, 其底部有三个完全相同的小孔槽, 分别命名为甲槽、乙槽、丙槽. 有大小质地完全相同的三个小球, 每个小球标有从 1 至 9 中选取的一个数字, 且每个小球所标数字互不相同. 作如下操作: 将这三个小球放入容器中, 摇动容器使这三个小球全部落入不同的小孔槽 (每个小孔槽只能容下一个小球), 取出小球记录下各小孔槽的计分 (分数为落入该小孔槽小球上所标的数字), 完成第一次操作. 再重复以上操作两次. 已知甲槽、乙槽、丙槽三次操作计分之总和分别为 20 分、10 分、9 分, 其中第一次操作计分最高的是乙槽, 则第二次操作计分最低的是_____ (从“甲槽”、“乙槽”、“丙槽”中选填).



【答案】乙槽

【解析】

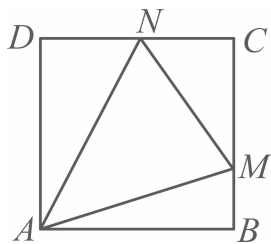
【分析】设第一次操作乙得 x 分, 第二次操作乙得 y 分, 第三次操作乙得 z 分, 根据题意, 得 $x + y + z = 10$, 当 $y = z = 1$ 时, x 最大, 为 8, 根据每次操作数字不相同, 故数字 1 不可能再出现, 故第二次操作最小的是乙槽.

本题考查了方程的应用，特殊解，熟练掌握整数解是解题的关键.

【详解】设第一次操作乙得 x 分，第二次操作乙得 y 分，第三次操作乙得 z 分，根据题意，得 $x + y + z = 10$ ，当 $y = z = 1$ 时， x 最大，为 8，根据每次操作数字不相同，故数字 1 不可能再出现，故第二次操作计分最低的是乙槽.

故答案为：乙槽.

18. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 1， M 、 N 是边 BC 、 CD 上的动点. 若 $\angle MAN = 45^\circ$ ，则 MN 的最小值为_____.



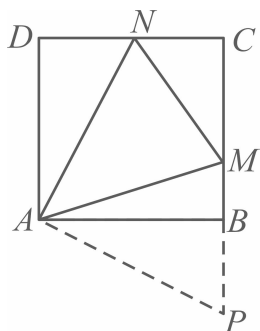
【答案】 $-2 + 2\sqrt{2}$ 或 $2\sqrt{2} - 2$

【解析】

【分析】将 $\triangle ADN$ 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle ABP$ ，再证明 $\triangle MAP \cong \triangle MAN$ (SAS)，从而得到 $MN = MP = BM + BP = BM + DN$ ，再设 $CN = a$ ， $CM = b$ ，得到 $MN = 2 - a - b$ ，利用勾股定理得到 $CN^2 + CM^2 = MN^2$ ，即 $a^2 + b^2 = (2 - a - b)^2$ ，整理得到 $(2 - a)(2 - b) = 2$ ，从而利用完全平方公式得到 $MN = 2 - a - b \geq -2 + 2\sqrt{(2 - a)(2 - b)}$ ，从而得解.

【详解】解：∵ 正方形 $ABCD$ 的边长为 1，

∴ $AD = AB = BC = CD = 1$ ， $\angle BAD = \angle ABC = \angle C = \angle D = 90^\circ$ ，



将 $\triangle ADN$ 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle ABP$ ，则 $\triangle ADN \cong \triangle ABP$ ，

∴ $\angle DAN = \angle BAP$ ， $\angle D = \angle ABP = 90^\circ$ ， $AN = AP$ ， $DN = BP$ ，

∴ 点 P 、 B 、 M 、 C 共线，

∴ $\angle MAN = 45^\circ$ ，

$$\therefore \angle MAP = \angle MAB + BAP = \angle MAB + DAN = 90^\circ - \angle MAN = 45^\circ = \angle MAN,$$

$$\therefore AP = AN, \angle MAP = \angle MAN, AM = AM,$$

$$\therefore \triangle MAP \cong \triangle MAN (\text{SAS}),$$

$$\therefore MP = MN,$$

$$\therefore MN = MP = BM + BP = BM + DN,$$

$$\text{设 } CN = a, CM = b, \text{ 则 } DN = 1 - a, BM = 1 - b,$$

$$\therefore MN = BM + DN = 2 - a - b,$$

$$\therefore \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore CN^2 + CM^2 = MN^2, \text{ 即 } a^2 + b^2 = (2 - a - b)^2,$$

$$\text{整理得: } (2 - a)(2 - b) = 2,$$

$$\therefore MN = 2 - a - b$$

$$= -2 + (2 - a) + (2 - b)$$

$$= -2 + (\sqrt{2 - a})^2 + (\sqrt{2 - b})^2$$

$$= -2 + (\sqrt{2 - a})^2 - 2\sqrt{2 - a} \cdot \sqrt{2 - b} + (\sqrt{2 - b})^2 + 2\sqrt{2 - a} \cdot \sqrt{2 - b}$$

$$= -2 + (\sqrt{2 - a} - \sqrt{2 - b})^2 + 2\sqrt{(2 - a)(2 - b)}$$

$$\geq -2 + 2\sqrt{(2 - a)(2 - b)}$$

$$= -2 + 2\sqrt{2},$$

$$\text{当且仅当 } \sqrt{2 - a} = \sqrt{2 - b}, \text{ 即 } 2 - a = 2 - b = \sqrt{2}, \text{ 也即 } a = b = 2 - \sqrt{2} \text{ 时, } MN \text{ 取最小值 } -2 + 2\sqrt{2},$$

$$\text{故答案为: } -2 + 2\sqrt{2}.$$

【点睛】 本题考查全等三角形的判定和性质，正方形的性质，勾股定理，二次根式的运算，完全平方公式等知识，证明 $MN = BM + DN$ 和得到 $(2 - a)(2 - b) = 2$ 是解题的关键.

三、解答题：本大题共 7 个小题，共 78 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

$$19. (1) \text{ 计算: } (-2)^0 + 2\sin 30^\circ - |2 - \sqrt{3}|;$$

$$(2) \text{ 计算: } \frac{2}{a^2 - 1} \div \left(\frac{1}{a - 1} - \frac{1}{a + 1} \right).$$

$$\text{【答案】 (1) } \sqrt{3}; (2) 1.$$

【解析】

【分析】本题考查了实数的混合运算和分式的化简，熟记零指数幂，特殊角的三角函数值，分式化简的步骤是解题的关键.

(1) 根据零指数幂，特殊角的三角函数值，绝对值的意义计算；

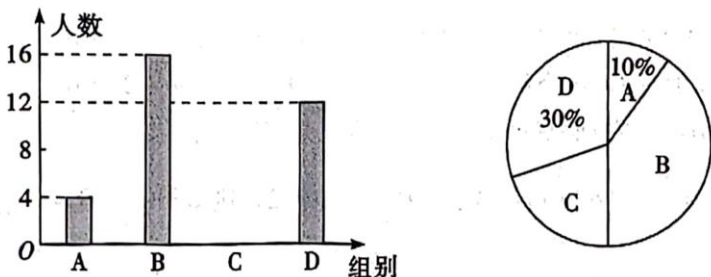
(2) 原式括号中两项通分并利用同分母分式的减法法则计算，同时利用除法法则变形，约分即可得到最简结果.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解：(1) } & (-2)^0 + 2\sin 30^\circ - |2 - \sqrt{3}| \\ &= 1 + 2 \times \frac{1}{2} - 2 + \sqrt{3} \\ &= 1 + 1 - 2 + \sqrt{3} \\ &= \sqrt{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2) } & \frac{2}{a^2-1} \div \left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1} \right) \\ &= \frac{2}{(a+1)(a-1)} \div \left[\frac{a+1}{(a+1)(a-1)} - \frac{a-1}{(a+1)(a-1)} \right] \\ &= \frac{2}{(a+1)(a-1)} \cdot \frac{(a+1)(a-1)}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

20. 某校为了落实“五育并举”，提升学生的综合素养，在课外活动中开设了四个兴趣小组：A. 插花组；B. 跳绳组；C. 话剧组；D. 书法组. 为了解学生对每个兴趣小组的参与情况，随机抽取了部分学生进行调查，并将调查结果绘制成不完整的统计图.

请结合图中信息解答下列问题：



(1) 本次共调查了_____名学生，并将条形统计图补充完整；

(2) 话剧组所对应扇形的圆心角为_____度；

(3) 书法组成绩最好的4名学生由3名男生和1名女生构成. 从中随机抽取2名参加比赛，请用列表或画树状图的方法，求刚好抽到1名男生与1名女生的概率.

【答案】(1) 40; 图见解析

(2) 72 (3) $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】本题考查了条形统计图和扇形统计图，及用列表法或树状图法求概率，准确理解题意，熟练掌握知识点是解题的关键.

(1) 由 A 组人数及其所占百分比可得总人数，总人数减去 A 、 B 、 D 人数求出 C 组人数即可补全图形；

(2) 用 360 度乘以 C 组人数所占比例即可；

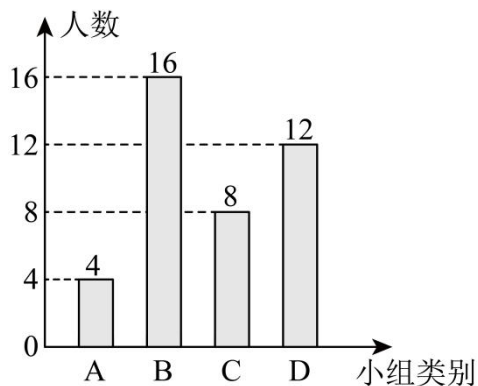
(3) 画树状图，共有 12 种等可能的结果，其中刚好抽到 1 名男生与 1 名女生的结果有 6 种，再由概率公式求解即可.

【小问 1 详解】

解：本次调查总人数为 $4 \div 10\% = 40$ (名)，

C 组人数为 $40 - 4 - 16 - 12 = 8$ (名)，

补全图形如下：



故答案为：40；

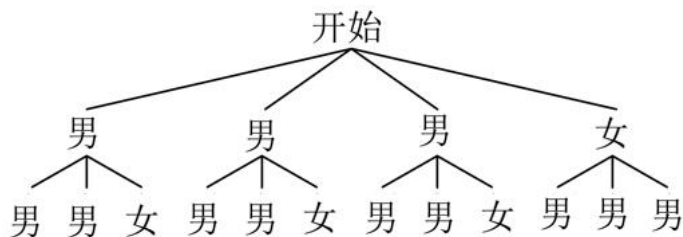
【小问 2 详解】

解： $\frac{8}{40} \times 360^\circ = 72^\circ$ ，

故答案为：72；

【小问 3 详解】

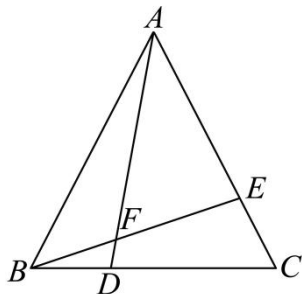
解：画树状图如下：



共有 12 种等可能的结果，其中刚好抽到 1 名男生与 1 名女生的结果共有 6 种，

$\therefore$ 刚好抽到 1 名男生与 1 名女生的概率为 $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

21. 如图，点 D 、 E 分别是等边三角形 ABC 边 BC 、 AC 上的点，且 $BD = CE$ ， BE 与 AD 交于点 F 。求证： $AD = BE$ 。



【答案】见解析

【解析】

【分析】本题考查了等边三角形的性质，全等三角形的判定与性质，根据等边三角形的性质得出 $AB = BC$ ， $\angle ABD = \angle BCE = 60^\circ$ ，然后根据 SAS 证明 $\triangle ABD \cong \triangle BCE$ ，根据全等三角形的性质即可得证。

【详解】证明： $\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore AB = BC$ ， $\angle ABD = \angle BCE = 60^\circ$ ，

又 $BD = CE$ ，

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle BCE$ (SAS)，

$\therefore AD = BE$ 。

22. 宜宾地标广场位于三江汇合口（如图 1，左侧是岷江，右侧是金沙江，正面是长江）。某同学在数学实践中测量长江口的宽度，他在长江口的两岸选择两个标点 C 、 D ，在地标广场上选择两个观测点 A 、 B （点 A 、 B 、 C 、 D 在同一水平面，且 $AB \parallel CD$ ）。如图 2 所示，在点 A 处测得点 C 在北偏西 18.17° 方向上，测得点 D 在北偏东 21.34° 方向上；在 B 处测得点 C 在北偏西 21.34° 方向上，测得点 D 在北偏东 18.17° 方向上，测得 $AB = 100$ 米。求长江口的宽度 CD 的值（结果精确到 1 米）。（参考数据： $\sin 18.17^\circ \approx 0.31$ ， $\cos 18.17^\circ \approx 0.95$ ， $\tan 18.17^\circ \approx 0.33$ ， $\sin 21.34^\circ \approx 0.36$ ， $\cos 21.34^\circ \approx 0.93$ ， $\tan 21.34^\circ \approx 0.39$ ）



图1

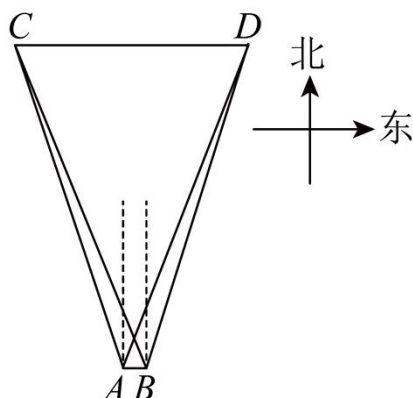


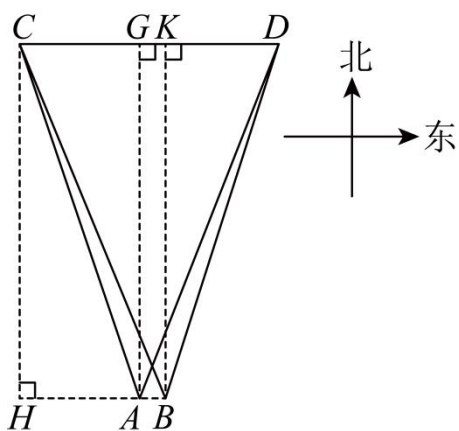
图2

【答案】长江口的宽度 CD 为1200米.

【解析】

【分析】如图，过 C 作 $CH \perp AB$ 于 H ，过 A 作 $AG \perp CD$ 于 G ，过 B 作 $BK \perp CD$ 于 K ，而 $AB \parallel CD$ ，可得四边形 $AHCG$ ， $ABKG$ 都是矩形，由题意可得： $\angle CAG = \angle DBK = 18.17^\circ$ ， $\angle GAD = \angle CBK = 21.34^\circ$ ，证明 $\triangle AGC \cong \triangle BKD$ ，可得 $CG = DK$ ，设 $AH = x$ ， $CH = y$ ，再利用三角函数建立方程组求解即可.

【详解】解：如图，过 C 作 $CH \perp AB$ 于 H ，过 A 作 $AG \perp CD$ 于 G ，过 B 作 $BK \perp CD$ 于 K ，而 $AB \parallel CD$ ，



$\therefore$ 四边形 $AHCG$ ， $ABKG$ 都是矩形，

$\therefore GK = AB = 100$ ， $CG = AH$ ， $CH = AG = BK$ ， $CH \parallel AG \parallel BK$ ，

$\therefore$ 由题意可得： $\angle CAG = \angle DBK = 18.17^\circ$ ， $\angle GAD = \angle CBK = 21.34^\circ$ ，

$\therefore \angle ACH = \angle CAG = 18.17^\circ$ ， $\angle BCH = \angle CBK = 21.34^\circ$ ，

$\therefore \angle AGC = \angle BKD = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle AGC \cong \triangle BKD$ ，

$\therefore CG = DK$ ，

设 $AH = x$ ， $CH = y$ ，

$$\therefore \frac{AH}{CH} = \frac{x}{y} = \tan \angle ACH = \tan 18.17^\circ \approx 0.33, \text{ 即 } x = 0.33y,$$

$$\frac{HB}{CH} = \frac{x+100}{y} = \tan \angle BCH = \tan 21.34^\circ \approx 0.39, \text{ 即 } x+100 = 0.39y,$$

$$\therefore 0.33y + 100 = 0.39y,$$

$$\therefore y = \frac{5000}{3},$$

$$\therefore x = 0.33 \times \frac{5000}{3} = 550,$$

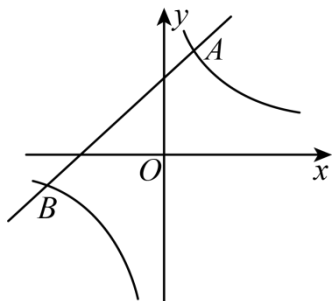
$$\therefore CG = DK = 550,$$

$$\therefore CD = 550 \times 2 + 100 = 1200(\text{m});$$

$\therefore$ 长江口的宽度 CD 为 1200 米.

【点睛】 本题考查的是解直角三角形的实际应用，矩形的判定与性质，全等三角形的判定与性质，作出合适的辅助线是解本题的关键.

23. 如图，一次函数 $y = ax + b (a \neq 0)$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象交于点 $A(1, 4)$ 、 $B(n, -1)$.



- (1) 求反比例函数和一次函数的表达式;
- (2) 利用图象，直接写出不等式 $ax + b < \frac{k}{x}$ 的解集;
- (3) 已知点 D 在 x 轴上，点 C 在反比例函数图象上. 若以 A 、 B 、 C 、 D 为顶点的四边形是平行四边形，求点 C 的坐标.

【答案】 (1) $y = \frac{4}{x}$, $y = x + 3$

(2) $x < -4$ 或 $0 < x < 1$

(3) $\left(-\frac{4}{5}, -5\right)$ 或 $\left(\frac{4}{5}, 5\right)$ 或 $\left(\frac{4}{3}, 3\right)$

【解析】

【分析】(1) 把 A 的坐标代入 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$, 可求出 k , 把 $B(n, -1)$ 代入所求反比例函数解析式, 可求 n , 然后把 A 、 B 的坐标代入 $y = ax + b (a \neq 0)$ 求解即可;

(2) 结合一次函数和反比例函数的图像, 写出一一次函数图像在反比例函数图像下方所对应的自变量范围即可;

(3) 设点 C 的坐标为 $(c, \frac{4}{c})$, $D(d, 0)$, 分 AC 、 BD 为对角线, BC 、 AD 为对角线, AB 、 CD 为对角线三种情况, 根据对角顶点的横、纵坐标之和分别相等列方程组, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 经过 $A(1, 4)$,

$$\therefore 4 = \frac{k}{1}, \text{ 解得 } k = 4,$$

$$\therefore y = \frac{4}{x},$$

把 $B(n, -1)$ 代入 $y = \frac{4}{x}$, 得 $-1 = \frac{4}{n}$,

解得 $n = -4$,

$$\therefore B(-4, -1),$$

把 $A(1, 4)$, $B(-4, -1)$ 代入 $y = ax + b (a \neq 0)$,

$$\text{得} \begin{cases} a + b = 4 \\ -4a + b = -1 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases},$$

$$\therefore y = x + 3;$$

【小问 2 详解】

解: 察图像得: 当 $x < -4$ 或 $0 < x < 1$ 时, 一次函数的图像在反比例函数图像的下方,

$\therefore$ 不等式 $ax + b < \frac{k}{x}$ 的解集为 $x < -4$ 或 $0 < x < 1$;

【小问 3 详解】

解：设点 C 的坐标为 $\left(c, \frac{4}{c}\right)$, $D(d, 0)$,

①以 AC 、 BD 为对角线,

$$\text{则} \begin{cases} 1+c=-4+d \\ 4+\frac{4}{c}=-1+0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} c=-\frac{4}{5} \\ d=\frac{21}{5} \end{cases},$$

$$\therefore \frac{4}{c}=-5,$$

$$\therefore C\left(-\frac{4}{5}, -5\right);$$

②以 BC 、 AD 为对角线,

$$\text{则} \begin{cases} -4+c=1+d \\ -1+\frac{4}{c}=4+0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} c=\frac{4}{5} \\ d=-\frac{21}{5} \end{cases},$$

$$\therefore \frac{4}{c}=5,$$

$$\therefore C\left(\frac{4}{5}, 5\right);$$

③以 AB 、 CD 为对角线

$$\text{则} \begin{cases} 1-4=c+d \\ 4-1=\frac{4}{c}+0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} c=\frac{4}{3} \\ d=-\frac{13}{3} \end{cases},$$

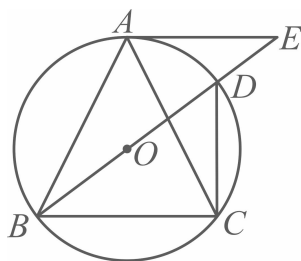
$$\therefore \frac{4}{c} = 3,$$

$$\therefore C\left(\frac{4}{3}, 3\right);$$

综上，当 C 的坐标为 $\left(-\frac{4}{5}, -5\right)$ 或 $\left(\frac{4}{5}, 5\right)$ 或 $\left(\frac{4}{3}, 3\right)$ 时，以 A 、 B 、 C 、 D 为顶点的四边形是平行四边形.

【点睛】 本题考查求一次函数的解析式，反比例函数的解析式，一次函数与反比例函数的交点问题，平行四边形存在性问题等，掌握数形结合思想和分类讨论思想是解题的关键.

24. 如图， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， $AB = AC = 10$ ，过点 A 作 $AE \parallel BC$ ，交 $\odot O$ 的直径 BD 的延长线于点 E ，连接 CD .



(1) 求证： AE 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 若 $\tan \angle ABE = \frac{1}{2}$ ，求 CD 和 DE 的长.

【答案】 (1) 见解析 (2) $CD = 3\sqrt{5}$ ， $DE = \frac{5\sqrt{5}}{3}$.

【解析】

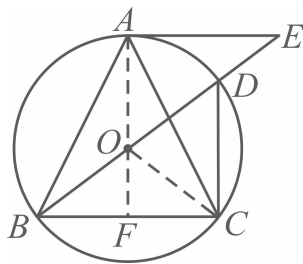
【分析】 (1) 延长 AO 交 BC 于点 F ，连接 OC ，根据等边对等角可得 $\angle OAB = \angle ABO$ ， $\angle OAC = \angle ACO$ ， $\angle OBC = \angle OCB$ ， $\angle ABC = \angle ACB$ ，继而可得 AF 是 $\angle BAC$ 的角平分线，根据等边三角形“三线合一”的性质可得 $AF \perp BC$ ，由平行线的性质可得 $AF \perp AE$ ，继而根据切线判定定理即可求证结论；

(2) 连接 AD ，先求得 $AD = 5$ ，利用圆周角定理结合勾股定理求得直径的长，利用垂径定理结合勾股定理得到 $BF^2 = OB^2 - OF^2 = AB^2 - AF^2$ ，代入数据计算求得 $BC = 4\sqrt{5}$ ，利用勾股定理可求得 CD 的长，证

明 $\triangle AED \sim \triangle BEA$ ，利用相似三角形的性质计算即可求得 $DE = \frac{5\sqrt{5}}{3}$.

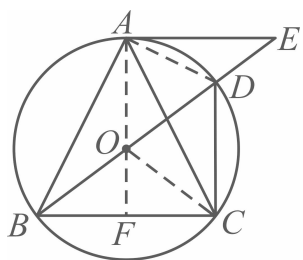
【小问 1 详解】

证明：延长 AO 交 BC 于点 F ，连接 OC ，


$$\begin{aligned} &\because OA = OB = OC, \\ &\therefore \angle OAB = \angle ABO, \quad \angle OAC = \angle ACO, \quad \angle OBC = \angle OCB, \\ &\because AB = AC, \\ &\therefore \angle ABC = \angle ACB, \\ &\therefore \angle ABC - \angle OBC = \angle ACB - \angle OCB, \text{ 即 } \angle ABO = \angle ACO, \\ &\therefore \angle OAB = \angle OAC, \text{ 即 } AF \text{ 是 } \angle BAC \text{ 的角平分线}, \\ &\because AB = AC, \\ &\therefore AF \perp BC, \text{ 且 } AF \text{ 平分线段 } BC, \\ &\because AE \parallel BC, \\ &\therefore AF \perp AE, \\ &\because OA \text{ 是半径}, \\ &\therefore AE \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线}; \end{aligned}$$

【小问 2 详解】

解: 连接 AD ,


$$\begin{aligned} \therefore BD & \text{ 是 } \odot O \text{ 的直径,} \\ \therefore \angle BAD &= \angle BCD = 90^\circ, \\ \therefore \tan \angle ABE &= \frac{1}{2}, \quad AB = AC = 10, \\ \therefore AD &= 5, \\ \therefore BD &= \sqrt{AB^2 + AD^2} = 5\sqrt{5}, \\ \therefore OA &= OB = OD = \frac{5\sqrt{5}}{2}, \end{aligned}$$

由 (1) 得 $AF \perp BC$, $BC = 2BF$,

设 $OF = x$,

$$\therefore BF^2 = OB^2 - OF^2 = AB^2 - AF^2,$$

$$\therefore \left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^2 - x^2 = 10^2 - \left(\frac{5\sqrt{5}}{2} + x\right)^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{3\sqrt{5}}{2}, \text{ 即 } OF = \frac{3\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore BF = \sqrt{10^2 - \left(\frac{5\sqrt{5}}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore BC = 2BF = 4\sqrt{5},$$

$$\therefore CD = \sqrt{BD^2 - BC^2} = 3\sqrt{5},$$

$$\text{设 } DE = y, \text{ 则 } OE = \frac{5\sqrt{5}}{2} + y,$$

$\therefore AE$ 是 $\odot O$ 的切线,

$$\therefore \angle OAE = 90^\circ, \angle EAD = 90^\circ - \angle DAO = \angle BAO = \angle ABE,$$

$$\therefore \angle AED = \angle BEA,$$

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle BEA,$$

$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{DE}{AE} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AE = \frac{1}{2}BE, \quad AE = 2DE,$$

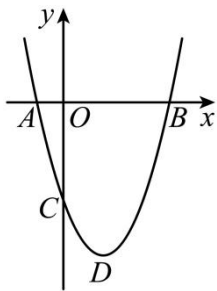
$$\therefore \frac{1}{2}BE = 2DE, \text{ 即 } \frac{1}{2}(5\sqrt{5} + y) = 2y,$$

$$\text{解得 } y = \frac{5\sqrt{5}}{3},$$

$$\therefore DE = \frac{5\sqrt{5}}{3}.$$

【点睛】 本题考查了切线的判定，解直角三角形，相似三角形的判定和性质，圆周角定理，垂径定理，勾股定理，正确引出辅助线解决问题是解题的关键.

25. 如图，抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 和点 B ，与 y 轴交于点 $C(0, -4)$ ，其顶点为 D .



- (1) 求抛物线的表达式及顶点 D 的坐标；
- (2) 在 y 轴上是否存在一点 M ，使得 $\triangle BDM$ 的周长最小. 若存在，求出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由；
- (3) 若点 E 在以点 $P(3,0)$ 为圆心，1 为半径的 $\odot P$ 上，连接 AE ，以 AE 为边在 AE 的下方作等边三角形 AEF ，连接 BF . 求 BF 的取值范围.

【答案】(1) 抛物线的表达式为 $y = x^2 - x - 4$ ，顶点 D 的坐标为 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{25}{4}\right)$ ；

(2) 点 M 的坐标为 $\left(0, -\frac{50}{11}\right)$ ；

(3) BF 的取值范围为 $\sqrt{21} - 1 \leq BF \leq \sqrt{21} + 1$.

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法求解即可；

(2) 作点 B 关于原点的对称点 B' ，连接 $B'D$ 交 y 轴于点 M ，此时 $\triangle BDM$ 的周长最小，利用待定系数法求得直线 DB' 的解析式，据此求解即可；

(3) 以 AP 为边在 AP 的下方作等边三角形 APQ ，得到点 F 在以 $Q(1, 2\sqrt{3})$ 为圆心，1 为半径的 $\odot P$ 上，据此求解即可.

【小问 1 详解】

解：由于抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 $A(-1, 0)$ 和点 $C(0, -4)$ ，

$$\therefore \begin{cases} 1 - b + c = 0 \\ c = -4 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} b = -3 \\ c = -4 \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线的表达式为 } y = x^2 - 3x - 4 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4},$$

$\therefore$ 顶点 D 的坐标为 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{25}{4}\right)$;

【小问 2 详解】

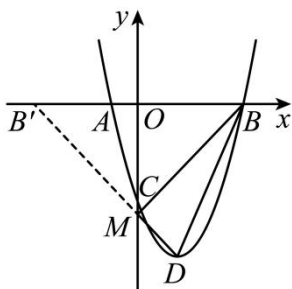
解: $\because$ 点 $A(-1, 0)$, 对称轴为直线 $x = \frac{3}{2}$,

$\therefore$ 点 $B(4, 0)$,

$\therefore B(4, 0), C(0, -4)$,

$\therefore BC$ 长为定值,

作点 B 关于原点的对称点 B' , 则 $B'(-4, 0)$, 连接 $B'D$ 交 y 轴于点 M ,



则 $B'M = BM$,

$\therefore DM + BM = DM + B'M = DB'$, 此时 $\triangle BDM$ 的周长最小,

设直线 DB' 的解析式为 $y = kx + n$,

$$\text{则} \begin{cases} -4k + n = 0 \\ \frac{3}{2}k + n = -\frac{25}{4} \end{cases},$$

$$\text{解得} k = -\frac{25}{22}, \quad b = -\frac{50}{11},$$

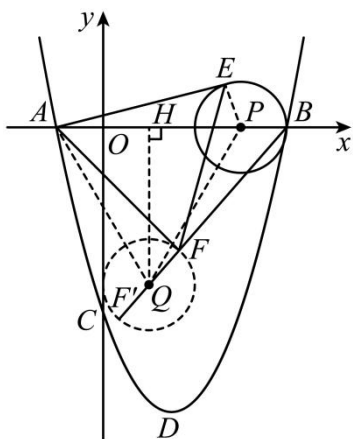
$\therefore$ 直线 DB' 的解析式为 $y = -\frac{25}{22}x - \frac{50}{11}$,

令 $x = 0$, 则 $y = -\frac{50}{11}$,

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $\left(0, -\frac{50}{11}\right)$;

【小问 3 详解】

解: 以 AP 为边在 AP 的下方作等边三角形 APQ , 作 $QH \perp x$ 轴于点 H , 连接 PE , QF ,



∴ 等边三角形 AEF ,

$$\therefore AE = AF, \quad \angle PAE = 60^\circ - \angle PAF = \angle QAF, \quad AP = AQ = 4,$$

$$\therefore \triangle PAE \cong \triangle QAF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore QF = PF = 1, \quad AH = \frac{1}{2}AQ = 2, \quad QH = \sqrt{AQ^2 - AH^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore OH = AH - AO = 1,$$

$$\therefore Q(1, 2\sqrt{3}),$$

$\therefore$ 点 F 在以 $Q(1, 2\sqrt{3})$ 为圆心, 1 为半径的 $\odot Q$ 上,

$$BQ = \sqrt{(4-1)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{21},$$

当点 F 在线段 BQ 上时, BF 有最小值为 $\sqrt{21}-1$;

当点 F 在射线 BQ 上时, BF 有最大值为 $\sqrt{21}+1$;

$\therefore BF$ 的取值范围为 $\sqrt{21}-1 \leq BF \leq \sqrt{21}+1$.

【点睛】本题是一道二次函数的综合题，主要考查了二次函数图象的性质，待定系数法确定函数的解析式，一次函数图象的性质，抛物线上点的坐标的特征，一次函数图象上点的坐标的特征，利用点的坐标表示出相应线段的长度是解题的关键.