

南充市二〇二四年初中学业水平考试

数学试题

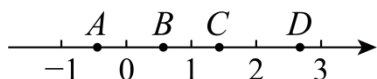
(满分 150 分，时间 120 分钟)

注意事项：

1. 答题前将姓名、座位号、身份证号、准考证号填在答题卡指定位置；
2. 所有解答内容均须涂、写在答题卡上；
3. 选择题须用 2B 铅笔将答题卡相应题号对应选项涂黑，若需改动，须擦净另涂；
4. 填空题、解答题在答题卡对应题号位置用 0.5 毫米黑色字迹笔书写。

一、选择题（本大题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分）每小题都有代号为 A ， B ， C ， D 四个答案选项，其中只有一个是正确的。请根据正确选项的代号填涂答题卡对应位置，填涂正确记 4 分，不涂、错涂或多涂记 0 分。

1. 如图，数轴上表示 $\sqrt{2}$ 的点是（ ）



- A. 点 A B. 点 B C. 点 C D. 点 D

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了实数与数轴，无理数的估算。先估算出 $\sqrt{2}$ 的范围，再找出符合条件的数轴上的点即可。

【详解】解：∵ $1 < \sqrt{2} < 2$ ，

∴ 数轴上表示 $\sqrt{2}$ 的点是点 C ，

故选：C。

2. 学校举行篮球技能大赛，评委从控球技能和投球技能两方面为选手打分，各项成绩均按百分制计，然后再按控球技能占 60%，投球技能占 40% 计算选手的综合成绩（百分制人选手李林控球技能得 90 分，投球技能得 80 分。李林综合成绩为（ ）

- A. 170 分 B. 86 分 C. 85 分 D. 84 分

【答案】B

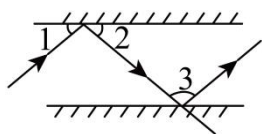
【解析】

【分析】本题考查求加权平均数，利用加权平均数的计算方法，进行求解即可。

【详解】解： $90 \times 60\% + 80 \times 40\% = 86$ （分）；

故选 B.

3. 如图，两个平面镜平行放置，光线经过平面镜反射时， $\angle 1 = \angle 2 = 40^\circ$ ，则 $\angle 3$ 的度数为 ()



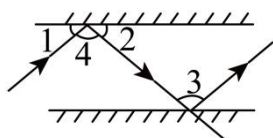
- A. 80° B. 90° C. 100° D. 120°

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查利用平行线的性质求角的度数，平角的定义求出 $\angle 4$ 的度数，再根据平行线的性质，即可得出结果.

【详解】解： $\because \angle 1 = \angle 2 = 40^\circ$,



$$\therefore \angle 4 = 180^\circ - \angle 1 - \angle 2 = 100^\circ,$$

$\because$ 两个平面镜平行放置,

$\therefore$ 经过两次反射后的光线与入射光线平行,

$$\therefore \angle 3 = \angle 4 = 100^\circ;$$

故选 C.

4. 下列计算正确的是 ()

- A. $a^2 + a^3 = a^5$ B. $a^8 \div a^4 = a^2$ C. $a^2 \cdot a^3 = a^6$ D. $(3a^2)^3 = 27a^6$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查整式的运算，根据合并同类项，同底数幂的乘除法，积的乘方和幂的乘方法则，逐一进行判断即可.

【详解】解：A、 a^2, a^3 不能合并，原选项计算错误，不符合题意；

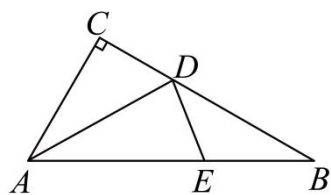
B、 $a^8 \div a^4 = a^4$ ，原选项计算错误，不符合题意；

C、 $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ，原选项计算错误，不符合题意；

D、 $(3a^2)^3 = 27a^6$ ，原选项计算正确，符合题意；

故选 D.

5. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $BC = 6$, AD 平分 $\angle CAB$ 交 BC 于点 D , 点 E 为边 AB 上一点, 则线段 DE 长度的最小值为 ()



- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 3

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查解直角三角形和角平分线的性质, 垂线段最短, 根据题意求得 $\angle BAC$ 和 AC , 结合角平分线的性质得到 $\angle CAD$ 和 DC , 当 $DE \perp AB$ 时, 线段 DE 长度的最小, 结合角平分线的性质可得 $DE = DC$ 即可.

【详解】解: $\because \angle C = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$,

$\therefore \angle BAC = 60^\circ$,

在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\tan \angle B = \frac{AC}{CB}$, 解得 $AC = 2\sqrt{3}$,

$\because AD$ 平分 $\angle CAB$,

$\therefore \angle CAD = 30^\circ$,

$\therefore \tan \angle CAD = \frac{DC}{CA}$, 解得 $DC = 2$,

当 $DE \perp AB$ 时, 线段 DE 长度的最小,

$\because AD$ 平分 $\angle CAB$,

$\therefore DE = DC = 2$.

故选: C.

6. 我国古代《算法统宗》里有这样一首诗: “我问开店李三公, 众客都来到店中, 一房七客多七客, 一房九客一房空.” 诗中后两句的意思是: 如果每一间客房住 7 人, 那么有 7 人无房住; 如果每一间客房住 9 人, 那么就空出一间客房. 设该店有客房 x 间、房客 y 人, 下列方程组中正确的是 ()

- A. $\begin{cases} 7x + 7 = y \\ 9(x - 1) = y \end{cases}$ B. $\begin{cases} 7x + 7 = y \\ 9(x + 1) = y \end{cases}$ C. $\begin{cases} 7x - 7 = y \\ 9(x - 1) = y \end{cases}$ D. $\begin{cases} 7x - 7 = y \\ 9(x + 1) = y \end{cases}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据 “如果每一间客房住 7 人, 那么有 7 人无房住; 如果每一间客房住 9 人, 那么就空出一间客

房”分别列出两个方程，联立成方程组即可.

【详解】根据题意有

$$\begin{cases} 7x+7=y \\ 9(x-1)=y \end{cases}$$

故选：A.

【点睛】本题主要考查列二元一次方程组，读懂题意找到等量关系是解题的关键.

7. 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} 2x-1 < 5 \\ x < m+1 \end{cases}$ 的解集为 $x < 3$ ，则 m 的取值范围是 ()

A. $m > 2$

B. $m \geq 2$

C. $m < 2$

D. $m \leq 2$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查根据不等式组的解集求参数的范围，先解不等式组，再根据不等式组的解集，得到关于参数的不等式，进行求解即可.

【详解】解：解 $\begin{cases} 2x-1 < 5 \\ x < m+1 \end{cases}$ ，得： $\begin{cases} x < 3 \\ x < m+1 \end{cases}$ ，

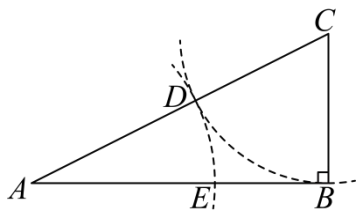
$\therefore$ 不等式组的解集为： $x < 3$ ，

$\therefore m+1 \geq 3$ ，

$\therefore m \geq 2$ ；

故选 B.

8. 如图，已知线段 AB ，按以下步骤作图：①过点 B 作 $BC \perp AB$ ，使 $BC = \frac{1}{2}AB$ ，连接 AC ；②以点 C 为圆心，以 BC 长为半径画弧，交 AC 于点 D ；③以点 A 为圆心，以 AD 长为半径画弧，交 AB 于点 E . 若 $AE = mAB$ ，则 m 的值为 ()



A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{5}-2}{2}$

C. $\sqrt{5}-1$

D. $\sqrt{5}-2$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了勾股定理，根据垂直定义可得 $\angle ABC = 90^\circ$ ，再根据 $BC = \frac{1}{2}AB$ ，设 $AB = a$ ，然后在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，利用勾股定理可得 $AC = \frac{\sqrt{5}}{2}a$ ，再根据题意可得： $AD = AE$ ， $CD = BC = \frac{1}{2}a$ ，从而利用线段的和差关系进行计算，即可解答.

【详解】解： $\because BC \perp AB$ ，

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\because BC = \frac{1}{2}AB, \text{ 设 } AB = a$$

$$\therefore BC = \frac{1}{2}a,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a,$$

$$\text{由题意得: } AD = AE, CD = BC = \frac{1}{2}a,$$

$$\therefore AE = AD = AC - CD = \frac{\sqrt{5}}{2}a - \frac{1}{2}a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a,$$

$$\therefore AE = mAB,$$

$$\therefore m = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

故选：A

9. 当 $2 \leq x \leq 5$ 时，一次函数 $y = (m+1)x + m^2 + 1$ 有最大值 6，则实数 m 的值为（ ）

A. -3 或 0

B. 0 或 1

C. -5 或 -3

D. -5 或 1

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了一次函数的性质，以及解一元二次方程，分两种情况，当 $m+1 > 0$ 时和当 $m+1 < 0$ ，根据一次函数性质列出关于 m 的一元二次方程，求解即可得出答案.

【详解】解：当 $m+1 > 0$ 即 $m > -1$ 时，一次函数 y 随 x 的增大而增大，

$$\therefore \text{当 } x = 5 \text{ 时, } y = 6,$$

$$\text{即 } 5(m+1) + m^2 + 1 = 6,$$

$$\text{整理得: } m^2 + 5m = 0$$

解得： $m = 0$ 或 $m = -5$ （舍去）

当 $m+1 < 0$ 即 $m < -1$ 时，一次函数 y 随 x 的增大而减小，

$\therefore$ 当 $x = 2$ 时， $y = 6$ ，

即 $2(m+1) + m^2 + 1 = 6$ ，

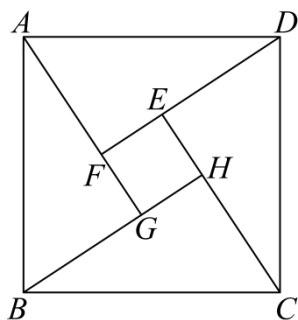
整理得： $m^2 + 2m - 3 = 0$

解得： $m = -3$ 或 $m = 1$ （舍去）

综上， $m = 0$ 或 $m = -3$ ，

故选： A

10. 如图是我国汉代赵爽在注解《周髀算经》时给出的，人们称它为“赵爽弦图”，它是由四个全等的直角三角形和一个小正方形组成．在正方形 $ABCD$ 中， $AB = 10$ ．下列三个结论：①若 $\tan \angle ADF = \frac{3}{4}$ ，则 $EF = 2$ ；②若 $\text{Rt}\triangle ABG$ 的面积是正方形 $EFGH$ 面积的 3 倍，则点 F 是 AG 的三等分点；③将 $\triangle ABG$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle ADG'$ ，则 BG' 的最大值为 $5\sqrt{5} + 5$ ．其中正确的结论是（ ）



A. ①②

B. ①③

C. ②③

D. ①②③

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据 $\tan \angle ADF = \frac{AF}{DF} = \frac{3}{4}$ ，设 $AF = 3x$ ，得到 $DF = 4x$ ，进而得到 $AD = 5x = AB = 10$ ，求出

x 的值，判定①，根据 $\text{Rt}\triangle ABG$ 的面积是正方形 $EFGH$ 面积的 3 倍，求出 $AG = \frac{3}{2}BG$ ，进而得到

$FG = AG - BG = \frac{1}{3}AG$ ，判断②；旋转得到 $\angle AG'D = \angle AGB = 90^\circ$ ，进而得到点 G' 在以 AD 为直径的

半圆上，取 AD 的中点 O ，连接 BO, OG' ，得到 $BG' \leq BO + OG'$ ，判断③.

$$\therefore BO = \sqrt{OA^2 + AB^2} = 5\sqrt{5},$$

$$\therefore BG' \leq BO + OG' = 5\sqrt{5} + 5,$$

即：BG' 的最大值为 $5\sqrt{5} + 5$ ；故③正确；

故选 D.

【点睛】本题考查解直角三角形，勾股定理，旋转的性质，解一元二次方程，求圆外一点到圆上一点的最值，熟练掌握相关知识点，并灵活运用，是解题的关键.

二、填空题（本大题共 6 个小题，每小题 4 分，共 24 分）请将答案填在答题卡对应的横线上.

11. 计算 $\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a-b}$ 的结果为_____.

【答案】1

【解析】

【分析】本题主要考查了同分母分式减法运算，按照同分母减法运算法则计算即可.

【详解】解： $\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a-b} = \frac{a-b}{a-b} = 1,$

故答案为：1.

12. 若一组数据 6, 6, m , 7, 7, 8 的众数为 7，则这组数据的中位数为_____.

【答案】7

【解析】

【分析】本题考查众数与中位数的意义. 中位数是将一组数据从小到大（或从大到小）重新排列后，最中间的那个数（最中间两个数的平均数），叫做这组数据的中位数. 众数是数据中出现最多的一个数. 根据众数的定义可得 x 的值，再依据中位数的定义即可得答案.

【详解】解： $\because 6, 6, m, 7, 7, 8$ 的众数为 7，

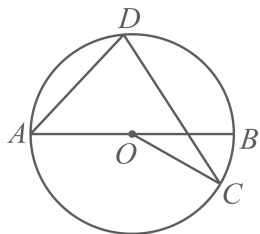
$$\therefore x = 7,$$

把这组数据从小到大排列为：6, 6, 7, 7, 7, 8，

则中位数为 $\frac{7+7}{2} = 7.$

故答案为：7.

13. 如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，位于 AB 两侧的点 C, D 均在 $\odot O$ 上， $\angle BOC = 30^\circ$ ，则 $\angle ADC =$ _____ 度.



【答案】 75

【解析】

【分析】 本题考查圆周角定理，补角求出 $\angle AOC$ ，根据同弧所对的圆周角是圆心角的一半，进行求解即可.

【详解】 解： $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，位于 AB 两侧的点 C, D 均在 $\odot O$ 上， $\angle BOC = 30^\circ$ ，

$$\therefore \angle AOC = 180^\circ - \angle BOC = 150^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = \frac{1}{2} \angle AOC = 75^\circ;$$

故答案为： 75.

14. 已知 m 是方程 $x^2 + 4x - 1 = 0$ 的一个根，则 $(m+5)(m-1)$ 的值为_____.

【答案】 -4

【解析】

【分析】 本题主要考查了二元一次方程的解，以及已知式子的值求代数式的值，根据 m 是方程 $x^2 + 4x - 1 = 0$ 的一个根，可得出 $m^2 + 4m = 1$ ，再化简代数式，整体代入即可求解.

【详解】 解： $\because m$ 是方程 $x^2 + 4x - 1 = 0$ 的一个根，

$$\therefore m^2 + 4m = 1$$

$$(m+5)(m-1)$$

$$= m^2 - m + 5m - 5$$

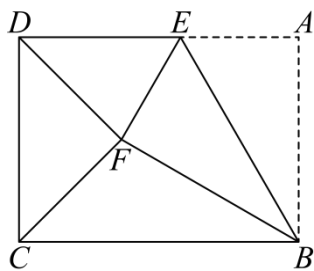
$$= m^2 + 4m - 5$$

$$= 1 - 5$$

$$= -4,$$

故答案为： -4.

15. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， E 为 AD 边上一点， $\angle ABE = 30^\circ$ ，将 $\triangle ABE$ 沿 BE 折叠得 $\triangle FBE$ ，连接 CF ， DF ，若 CF 平分 $\angle BCD$ ， $AB = 2$ ，则 DF 的长为_____.

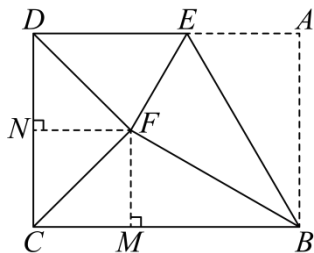


【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】过 F 作 $FM \perp BC$ 于点 M ， $FN \perp CD$ 于点 N ， $\angle CMF = \angle CNF = 90^\circ$ ，由四边形 $ABCD$ 是矩形，得 $\angle DCM = \angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = CD = 2$ ，证明四边形 $CMFN$ 是矩形，通过角平分线的性质证得四边形 $CMFN$ 是正方形，最后根据折叠的性质和勾股定理即可求解。

【详解】如图，过 F 作 $FM \perp BC$ 于点 M ， $FN \perp CD$ 于点 N ，



$$\therefore \angle CMF = \angle CNF = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore \angle DCM = \angle ABC = 90^\circ, \quad AB = CD = 2,$$

$\therefore$ 四边形 $CMFN$ 是矩形，

$\therefore CF$ 平分 $\angle BCD$ ，

$$\therefore FM = FN, \quad \angle DCF = \angle BCF = 45^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $CMFN$ 是正方形，

由折叠性质可知： $AB = BF = 2$ ， $\angle ABE = \angle FBE = 30^\circ$ ，

$$\therefore MF = 1,$$

$$\therefore CN = NF = MF = CM = 1, \quad DN = CD - CN = 1,$$

在 $\text{Rt}\triangle DNF$ 中，由勾股定理得 $DF = \sqrt{NF^2 + DN^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ，

故答案为： $\sqrt{2}$ 。

【点睛】 本题考查了矩形的性质和判定，折叠的性质，勾股定理， 30° 所对直角边是斜边的一半，角平分

线的性质，正方形的判定与性质，熟练掌握知识点的应用是解题的关键.

16. 已知抛物线 $C_1: y = x^2 + mx + m$ 与 x 轴交于两点 A, B (A 在 B 的左侧), 抛物线 $C_2: y = x^2 + nx + n (m \neq n)$ 与 x 轴交于两点 C, D (C 在 D 的左侧), 且 $AB = CD$. 下列四个结论: ① C_1 与 C_2 交点为 $(-1, 1)$; ② $m + n = 4$; ③ $mn > 0$; ④ A, D 两点关于 $(-1, 0)$ 对称. 其中正确的结论是 _____. (填写序号)

【答案】①②④

【解析】

【分析】由题意得 $x^2 + mx + m = x^2 + nx + n$, 根据 $m \neq n$ 可以判断①; 令 $y = 0$ 求出 $x = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4m}}{2}$, $x = \frac{-n \pm \sqrt{n^2 - 4n}}{2}$, 由 $AB = CD$ 可以判断②; 抛物线 $C_1: y = x^2 + mx + m$ 与 x 轴交于两点 A, B (A 在 B 的左侧), 抛物线 $C_2: y = x^2 + nx + n (m \neq n)$ 与 x 轴交于两点 C, D (C 在 D 的左侧), 根据根的判别式得出 $m < 0$ 或 $m > 4$, $n < 0$ 或 $n > 4$, 可以判断③, 利用两点间的距离可以判断④.

【详解】解: ①由题意得 $x^2 + mx + m = x^2 + nx + n$,

$$\therefore (m - n)x = n - m,$$

$$\because m \neq n,$$

$$\therefore x = -1,$$

$$\text{当 } x = -1 \text{ 时, } y = 1,$$

$\therefore C_1$ 与 C_2 交点为 $(-1, 1)$, 故①正确,

$$\text{当 } y = 0 \text{ 时, } x^2 + mx + m = 0, \text{ 解得 } x = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4m}}{2},$$

$$\therefore AB = \left| \frac{-m + \sqrt{m^2 - 4m}}{2} - \frac{-m - \sqrt{m^2 - 4m}}{2} \right| = \sqrt{m^2 - 4m},$$

$$\text{当 } y = 0 \text{ 时, } x^2 + nx + n = 0, \text{ 解得 } x = \frac{-n \pm \sqrt{n^2 - 4n}}{2},$$

$$\therefore CD = \left| \frac{-n + \sqrt{n^2 - 4n}}{2} - \frac{-n - \sqrt{n^2 - 4n}}{2} \right| = \sqrt{n^2 - 4n},$$

$$\because AB = CD,$$

$$\therefore \sqrt{m^2 - 4m} = \sqrt{n^2 - 4n}, \text{ 即 } m^2 - 4m = n^2 - 4n,$$

$$\therefore m^2 - n^2 = 4m - 4n, \text{ 则有: } (m+n)(m-n) = 4(m-n),$$

$$\therefore m \neq n,$$

$$\therefore m + n = 4, \text{ 故 ② 正确;}$$

③ $\because$ 抛物线 $C_1: y = x^2 + mx + m$ 与 x 轴交于两点 A, B (A 在 B 的左侧), 抛物线

$C_2: y = x^2 + nx + n$ ($m \neq n$) 与 x 轴交于两点 C, D (C 在 D 的左侧),

$$\therefore m^2 - 4m > 0, \quad n^2 - 4n > 0,$$

$$\text{解得: } m < 0 \text{ 或 } m > 4, \quad n < 0 \text{ 或 } n > 4,$$

$$\text{由 ② 得 } m + n = 4,$$

$$\therefore m = 4 - n,$$

$$\text{当 } m < 0 \text{ 时, } n > 4, \text{ 或当 } m > 4 \text{ 时, } n < 0,$$

$$\therefore mn < 0, \text{ 故 ③ 错误;}$$

$$\text{④ 由 ① 得: } x^2 + mx + m = 0, \text{ 解得 } x = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4m}}{2},$$

$\therefore A$ 在 B 的左侧, C 在 D 的左侧,

$$\therefore A\left(\frac{-m - \sqrt{m^2 - 4m}}{2}, 0\right), \quad B\left(\frac{-m + \sqrt{m^2 - 4m}}{2}, 0\right), \quad C\left(\frac{-n - \sqrt{n^2 - 4n}}{2}, 0\right), \quad D\left(\frac{-n + \sqrt{n^2 - 4n}}{2}, 0\right),$$

$$\therefore m = 4 - n,$$

$$\therefore A\left(\frac{-(4-n) - \sqrt{(4-n)^2 - 4(4-n)}}{2}, 0\right), \text{ 整理得: } A\left(\frac{-4+n - \sqrt{n^2 - 4n}}{2}, 0\right),$$

$$\therefore \frac{-4+n - \sqrt{n^2 - 4n}}{2} + \frac{-n + \sqrt{n^2 - 4n}}{2} = -2,$$

$\therefore$ 由对称性可知: A, D 两点关于 $(-1, 0)$ 对称, 故 ④ 正确;

综上所述: ①②④ 正确,

故答案为: ①②④.

【点睛】本题考查了二次函数的图象与性质，二次函数与一元二次方程的关系，解一元二次方程，根的判别式，熟练掌握知识点的应用是解题的关键.

三、解答题（本大题共 9 个小题，共 86 分）解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 先化简，再求值： $(x+2)^2 - (x^3 + 3x) \div x$ ，其中 $x = -2$.

【答案】 $4x+1$ ， -7

【解析】

【分析】本题主要考查了整式的化简求值，运用完全平方公式展开，先算除法，再算加减法，最后代入求值即可.

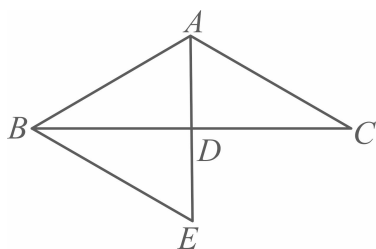
【详解】解：原式 $= (x^2 + 4x + 4) - (x^2 + 3)$

$$= x^2 + 4x + 4 - x^2 - 3$$

$$= 4x + 1,$$

当 $x = -2$ 时，原式 $= 4 \times (-2) + 1 = -7$.

18. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 为 BC 边的中点，过点 B 作 $BE \parallel AC$ 交 AD 的延长线于点 E .



(1) 求证： $\triangle BDE \cong \triangle CDA$.

(2) 若 $AD \perp BC$ ，求证： $BA = BE$

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查全等三角形的判定和性质，中垂线的判定和性质：

(1) 由中点，得到 $BD = CD$ ，由 $BE \parallel AC$ ，得到 $\angle E = \angle DAC, \angle DBE = \angle C$ ，即可得证；

(2) 由全等三角形的性质，得到 $ED = AD$ ，进而推出 BD 垂直平分 AE ，即可得证.

【小问 1 详解】

证明： $\because D$ 为 BC 的中点，

$$\therefore BD = CD.$$

$\because BE \parallel AC,$

$$\therefore \angle E = \angle DAC, \angle DBE = \angle C;$$

$$\text{在 } \triangle BDE \text{ 和 } \triangle CDA \text{ 中, } \begin{cases} \angle E = \angle DAC \\ \angle DBE = \angle C \\ BD = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BDE \cong \triangle CDA (\text{AAS});$$

【小问 2 详解】

证明： $\because \triangle BDE \cong \triangle CDA,$

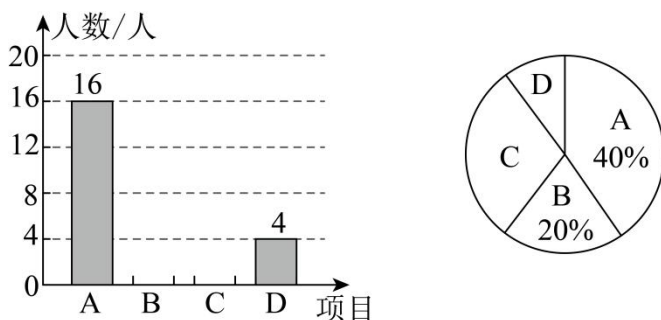
$$\therefore ED = AD$$

$$\because AD \perp BC,$$

$$\therefore BD \text{ 垂直平分 } AE,$$

$$\therefore BA = BE.$$

19. 某研学基地开设有 A, B, C, D 四类研学项目. 为了解学生对四类研学项目的喜爱情况, 随机抽取部分参加完研学项目的学生进行调查统计 (每名学生必须选择一项, 并且只能选择一项), 并将调查结果绘制成两幅不完整的统计图, (如图).



根据图中信息, 解答下列问题:

- (1) 参加调查统计的学生中喜爱 B 类研学项目有多少人? 在扇形统计图中, 求 C 类研学项目所在扇形的圆心角的度数.
- (2) 从参加调查统计喜爱 D 类研学项目的 4 名学生 (2 名男生 2 名女生) 中随机选取 2 人接受访谈, 求恰好选中一名男生一名女生的概率.

【答案】(1) 喜爱 B 类研学项目有 8 人, C 类研学项目所在扇形的圆心角的度数为 108°

$$(2) \frac{2}{3}$$

【解析】

【分析】本题考查条形图和扇形图的综合应用, 列表法求概率:

- (1) A 类项目的人数除以所占的比例求出总人数, 再用总人数乘以 B 类项目的人数所占的比例求解即可;

(2) 设喜爱 D 类研学项目的 4 名学生分别记为男 1, 男 2, 女 1, 女 2, 列出表格, 利用概率公式进行计算即可.

【小问 1 详解】

解: $16 \div 40\% = 40$, $40 \times 20\% = 8$ (人).

$(40 - 16 - 4 - 8) \div 40 \times 360^\circ = 108^\circ$.

答: 喜爱 B 类研学项目有 8 人, C 类研学项目所在扇形的圆心角的度数为 108° .

【小问 2 详解】

喜爱 D 类研学项目的 4 名学生分别记为男 1, 男 2, 女 1, 女 2, 列表如下:

第 2 位 第 1 位	男 1	男 2	女 1	女 2
男 1		男 1 男 2	男 1 女 1	男 1 女 2
男 2	男 2 男 1		男 2 女 1	男 2 女 2
女 1	女 1 男 1	女 1 男 2		女 1 女 2
女 2	女 2 男 1	女 2 男 2	女 2 女 1	

由表可知, 抽选 2 名学生共有 12 种等可能结果, 抽中一名男生和一名女生 (记作事件 M) 共 8 种可能.

$$\therefore P(M) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

答: 抽中一名男生和一名女生的概率为 $\frac{2}{3}$.

20. 已知 x_1, x_2 是关于 x 的方程 $x^2 - 2kx + k^2 - k + 1 = 0$ 的两个不相等的实数根.

(1) 求 k 的取值范围.

(2) 若 $k < 5$, 且 k, x_1, x_2 都是整数, 求 k 的值.

【答案】(1) $k > 1$

(2) 2

【解析】

【分析】本题主要考查了根据一元二次方程根的情况求参数范围、解一元二次方程, 熟练掌握一元二次方程根的情况与判别式的关系是解题的关键.

(1) 根据 “ x_1, x_2 是关于 x 的方程 $x^2 - 2kx + k^2 - k + 1 = 0$ 的两个不相等的实数根”, 则 $\Delta > 0$, 得出关于 k 的不等式求解即可;

(2) 根据 $k < 5$ ，结合 (1) 所求 k 的取值范围，得出整数 k 的值有 2, 3, 4，分别计算讨论整数 k 的不同取值时，方程 $x^2 - 2kx + k^2 - k + 1 = 0$ 的两个实数根 x_1, x_2 是否符合都是整数，选择符合情况的整数 k 的值即可。

【小问 1 详解】

解：∵ x_1, x_2 是关于 x 的方程 $x^2 - 2kx + k^2 - k + 1 = 0$ 的两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta > 0,$$

$$\therefore \Delta = (-2k)^2 - 4 \times 1 \times (k^2 - k + 1) = 4k^2 - 4k^2 + 4k - 4 = 4k - 4 > 0,$$

解得： $k > 1$ ；

【小问 2 详解】

解：∵ $k < 5$ ，由 (1) 得 $k > 1$ ，

$$\therefore 1 < k < 5,$$

∴ 整数 k 的值有 2, 3, 4，

当 $k = 2$ 时，方程为 $x^2 - 4x + 3 = 0$ ，

解得： $x_1 = 1, x_2 = 3$ (都是整数，此情况符合题意)；

当 $k = 3$ 时，方程为 $x^2 - 6x + 7 = 0$ ，

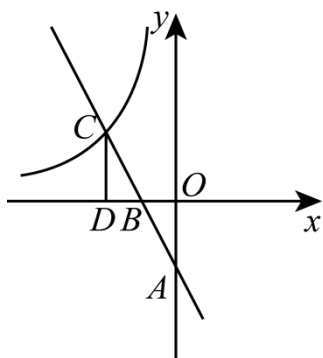
解得： $x = 3 \pm \sqrt{2}$ (不是整数，此情况不符合题意)；

当 $k = 4$ 时，方程为 $x^2 - 8x + 13 = 0$ ，

解得： $x = 4 \pm \sqrt{3}$ (不是整数，此情况不符合题意)；

综上所述， k 的值为 2。

21. 如图，直线 $y = kx + b$ 经过 $A(0, -2), B(-1, 0)$ 两点，与双曲线 $y = \frac{m}{x}$ ($x < 0$) 交于点 $C(a, 2)$ 。



(1) 求直线和双曲线的解析式。

(2) 过点 C 作 $CD \perp x$ 轴于点 D ，点 P 在 x 轴上，若以 O, A, P 为顶点的三角形与 $\triangle BCD$ 相似，直接写

出点 P 的坐标.

【答案】(1) 直线解析式为 $y = -2x - 2$, 双曲线解析式为 $y = -\frac{4}{x} (x < 0)$

(2) 点 P 坐标为 $(-4, 0)$ 或 $(-1, 0)$ 或 $(1, 0)$ 或 $(4, 0)$

【解析】

【分析】本题考查反比例函数与一次函数的综合应用, 相似三角形的性质:

(1) 待定系数法求出一函数的解析式, 进而求出点 C 的坐标, 再利用待定系数法求出反比例函数的解析式即可;

(2) 分 $\triangle AOP \sim \triangle CDB$ 和 $\triangle POA \sim \triangle CDB$, 两种情况进行讨论求解即可.

【小问 1 详解】

解: 直线 $y = kx + b$ 经过 $A(0, -2), B(-1, 0)$ 两点,

$$\therefore \begin{cases} b = -2 \\ -k + b = 0 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} b = -2 \\ k = -2 \end{cases},$$

$$\therefore y = -2x - 2,$$

当 $y = 2$ 时, $2 = -2x - 2$, 解得: $x = -2$,

$$\therefore C(-2, 2),$$

$$\therefore m = -2 \times 2 = -4,$$

$$\therefore y = -\frac{4}{x} (x < 0);$$

【小问 2 详解】

$$\therefore A(0, -2), B(-1, 0), C(-2, 2), CD \perp x$$

$$\therefore OA = 2, BD = 1, CD = 2, \angle CDB = \angle AOP = 90^\circ,$$

当以 O, A, P 为顶点的三角形与 $\triangle BCD$ 相似时, 分两种情况进行讨论:

$$\textcircled{1} \text{ 当 } \triangle AOP \sim \triangle CDB, \text{ 则: } \frac{AO}{CD} = \frac{OP}{BD},$$

$$\therefore \frac{AO}{OP} = \frac{OC}{BD} = 2,$$

$$\therefore OP = \frac{1}{2}OA = 1,$$

$$\therefore P(1, 0) \text{ 或 } P(-1, 0);$$

②当 $\triangle POA \sim \triangle CDB$ ，则： $\frac{OP}{CD} = \frac{OA}{BD}$ ，

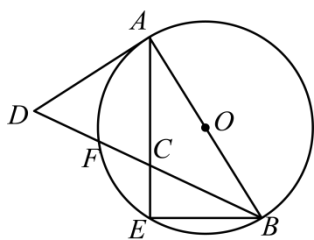
$$\therefore \frac{OP}{OA} = \frac{OC}{BD} = 2,$$

$$\therefore OP = 2OA = 4,$$

$$\therefore P(4,0) \text{ 或 } P(-4,0);$$

综上：点 P 坐标为 $(-4, 0)$ 或 $(-1, 0)$ 或 $(1, 0)$ 或 $(4, 0)$ 。

22. 如图，在 $\odot O$ 中， AB 是直径， AE 是弦，点 F 是 AE 上一点， $AF = BE$ ， AE, BF 交于点 C ，点 D 为 BF 延长线上一点，且 $\angle CAD = \angle CDA$ 。



(1) 求证： AD 是 $\odot O$ 的切线。

(2) 若 $BE = 4, AD = 2\sqrt{5}$ ，求 $\odot O$ 的半径长。

【答案】(1) 见解析 (2) $2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】本题考查圆周角定理，切线的判定，解直角三角形，熟练掌握相关知识点，是解题的关键：

(1) 圆周角定理推出 $\angle ABF = \angle BAE$ ，根据 $\angle CAD = \angle CDA$ ，结合三角形的内角和定理，推出 $\angle BAE + \angle CAD = 90^\circ$ ，即 $\angle BAD = 90^\circ$ ，即可得证；

(2) 连接 AF ，易得 $AF = BE = 4$ ，直径得到 $\angle AFB = 90^\circ$ ，在 $\text{Rt}\triangle ADF$ 中，勾股定理求出 DF 的长，三角函数求出 AB 的长即可。

【小问 1 详解】

证明： $\because AF = BE$

$$\therefore \widehat{AF} = \widehat{BE},$$

$$\therefore \angle ABF = \angle BAE.$$

$$\because \angle CAD = \angle CDA, \angle ADC + \angle ABF + \angle BAE + \angle CAD = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE + \angle CAD = 90^\circ.$$

即 $\angle BAD = 90^\circ$,

$\therefore AD \perp AB$.

又 $\because OA$ 为半径,

$\therefore AD$ 是 $\odot O$ 的切线.

【小问 2 详解】

解: 连接 AF .

$\because BE = 4$

$\therefore AF = BE = 4$.

$\because AB$ 是直径,

$\therefore \angle AFB = 90^\circ$,

$\therefore \angle AFD = 90^\circ$.

在 $\text{Rt}\triangle ADF$ 中, $DF = \sqrt{AD^2 - AF^2} = 2$.

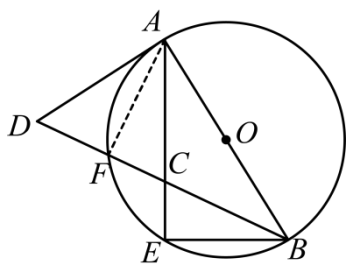
$\because \tan D = \frac{AB}{AD} = \frac{AF}{DF}$,

$\therefore \frac{AB}{2\sqrt{5}} = \frac{4}{2}$,

$\therefore AB = 4\sqrt{5}$.

又 AB 是直径

$\therefore \odot O$ 的半径长为 $2\sqrt{5}$.



23. 2024 年“五一”假期期间, 阆中古城景区某特产店销售 A , B 两类特产. A 类特产进价 50 元/件, B 类特产进价 60 元/件. 已知购买 1 件 A 类特产和 1 件 B 类特产需 132 元, 购买 3 件 A 类特产和 5 件 B 类特产需 540 元.

(1) 求 A 类特产和 B 类特产每件的售价各是多少元?

(2) A 类特产供货充足, 按原价销售每天可售出 60 件. 市场调查反映, 若每降价 1 元, 每天可多售出 10 件 (每件售价不低于进价). 设每件 A 类特产降价 x 元, 每天的销售量为 y 件, 求 y 与 x 的函数关系式, 并

写出自变量 x 的取值范围.

(3) 在 (2) 的条件下, 由于 B 类特产供货紧张, 每天只能购进 100 件且能按原价售完. 设该店每天销售这两类特产的总利润为 w 元, 求 w 与 x 的函数关系式, 并求出每件 A 类特产降价多少元时总利润 w 最大, 最大利润是多少元? (利润 = 售价 - 进价)

【答案】 (1) A 类特产的售价为 60 元/件, B 类特产的售价为 72 元/件

(2) $y = 10x + 60$ ($0 \leq x \leq 10$)

(3) A 类特产每件售价降价 2 元时, 每天销售利润最大, 最大利润为 1840 元

【解析】

【分析】 本题主要考查一元一次方程的应用、函数关系式和二次函数的性质,

(1) 根据题意设每件 A 类特产的售价为 x 元, 则每件 B 类特产的售价为 $(132 - x)$ 元, 进一步得到关于 x 的一元一次方程求解即可;

(2) 根据降价 1 元, 每天可多售出 10 件列出函数关系式, 结合进价与售价, 且每件售价不低于进价得到 x 得取值范围;

(3) 结合 (2) 中 A 类特产降价 x 元与每天的销售量 y 件, 得到 A 类特产的利润, 同时求得 B 类特产的利润, 整理得到关于 x 的二次函数, 利用二次函数的性质求解即可.

【小问 1 详解】

解: 设每件 A 类特产的售价为 x 元, 则每件 B 类特产的售价为 $(132 - x)$ 元.

根据题意得 $3x + 5(132 - x) = 540$.

解得 $x = 60$.

则每件 B 类特产的售价 $132 - 60 = 72$ (元).

答: A 类特产的售价为 60 元/件, B 类特产的售价为 72 元/件.

【小问 2 详解】

由题意得 $y = 10x + 60$

$\because A$ 类特产进价 50 元/件, 售价为 60 元/件, 且每件售价不低于进价

$\therefore 0 \leq x \leq 10$.

答: $y = 10x + 60$ ($0 \leq x \leq 10$).

【小问 3 详解】

$w = (60 - 50 - x)(10x + 60) + 100 \times (72 - 60)$

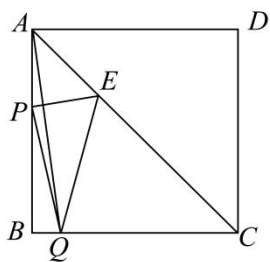
$$= -10x^2 + 40x + 1800 = -10(x-2)^2 + 1840.$$

$$\because -10 < 0,$$

$\therefore$ 当 $x=2$ 时, w 有最大值 1840.

答: A 类特产每件售价降价 2 元时, 每天销售利润最大, 最大利润为 1840 元.

24. 如图, 正方形 $ABCD$ 边长为 6cm, 点 E 为对角线 AC 上一点, $CE = 2AE$, 点 P 在 AB 边上以 1cm/s 的速度由点 A 向点 B 运动, 同时点 Q 在 BC 边上以 2cm/s 的速度由点 C 向点 B 运动, 设运动时间为 t 秒 ($0 < t \leq 3$).



(1) 求证: $\triangle AEP \sim \triangle CEQ$.

(2) 当 $\triangle EPQ$ 是直角三角形时, 求 t 的值.

(3) 连接 AQ , 当 $\tan \angle AQE = \frac{1}{3}$ 时, 求 $\triangle AEQ$ 的面积.

【答案】(1) 见解析 (2) $6 - 2\sqrt{3}$ 秒或 2 秒

(3) 4cm^2

【解析】

【分析】(1) 根据正方形性质, 得到 $\angle PAE = \angle QCE = 45^\circ$, 再题意得到 $\frac{AE}{CE} = \frac{AP}{CQ}$, 从而得到 $\triangle AEP \sim \triangle CEQ$;

(2) 利用题目中的条件, 分别用 t 表示 EP^2 、 PQ^2 、 EQ^2 , 再分别讨论当 $\angle EPQ = 90^\circ$ 、 $\angle PEQ = 90^\circ$ 和 $\angle PQE = 90^\circ$ 时, 利用勾股定理构造方程求出 t 即可;

(3) 过点 A 作 $AF \perp AC$, 交 CB 的延长线于点 F , 连接 FE 交 AQ 于点 G . 由此得到 $AF = AC$, 由已知得到 $\frac{AE}{AC} = \frac{AE}{AF} = \frac{1}{3}$ 进而得到 $\tan \angle AFE = \frac{1}{3}$, 由题意 $\tan \angle AQE = \frac{1}{3}$, 则 $\angle AFE = \angle AQE$, 再依次证明 $\triangle AGF \sim \triangle EGQ$ 、 $\triangle AGE \sim \triangle FGQ$, 得到 $\angle AEG = \angle FQG$, 从而证明 $\angle FQE = 90^\circ$, 即 $\triangle EQC$ 是等腰直角三角形. 则 $QC = 4$, 再用 $S_{\triangle AQC} - S_{\triangle EQC}$ 求出 $\triangle AEQ$ 的面积.

【小问 1 详解】

证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore \angle PAE = \angle QCE = 45^\circ.$$

$$\because CE = 2AE, AP = t, CQ = 2t,$$

$$\therefore \frac{AE}{CE} = \frac{AP}{CQ} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \triangle AEP \sim \triangle CEQ.$$

【小问 2 详解】

解：过点 E 作 $EM \perp AB$ 于点 M ，过点 E 作 $EN \perp BC$ 于点 N 。

$$\text{由题意知 } AC = \sqrt{2}AB = 6\sqrt{2},$$

$$\because CE = 2AE$$

$$\therefore AE = 2\sqrt{2},$$

$$\because \angle PAE = 45^\circ$$

$$\therefore AM = ME = 2, EN = CN = 4$$

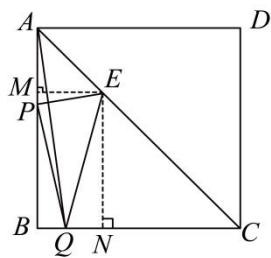
由已知，

$$AP = t, CQ = 2t, BQ = 6 - 2t, MP = |t - 2|, BP = 6 - t, QN = |BN - BQ| = |2t - 4|.$$

$$\therefore EP^2 = EM^2 + MP^2, \text{ 即 } EP^2 = 2^2 + (2 - t)^2 = t^2 - 4t + 8,$$

$$PQ^2 = BP^2 + BQ^2, \text{ 即 } PQ^2 = (6 - t)^2 + (6 - 2t)^2 = 5t^2 - 36t + 72,$$

$$EQ^2 = EN^2 + NQ^2, \text{ 即 } EQ^2 = 4^2 + (2t - 4)^2 = 4t^2 - 16t + 32.$$



$$\text{①当 } \angle EPQ = 90^\circ \text{ 时, 有 } EQ^2 = EP^2 + PQ^2.$$

$$\text{即 } 4t^2 - 16t + 32 = t^2 - 4t + 8 + 5t^2 - 36t + 72, \text{ 整理得 } t^2 - 12t + 24 = 0.$$

$$\text{解得 } t_1 = 6 - 2\sqrt{3}, t_2 = 6 + 2\sqrt{3} \text{ (不合题意, 舍去).}$$

②当 $\angle PEQ = 90^\circ$ 时, 有 $PQ^2 = EP^2 + EQ^2$.

即 $5t^2 - 36t + 72 = t^2 - 4t + 8 + 4t^2 - 16t + 32$, 整理得 $t - 2 = 0$, 解得 $t = 2$.

③当 $\angle PQE = 90^\circ$ 时, 有 $EP^2 = PQ^2 + EQ^2$.

即 $t^2 - 4t + 8 = 5t^2 - 36t + 72 + 4t^2 - 16t + 32$, 整理得 $t^2 - 6t + 12 = 0$, 该方程无实数解.

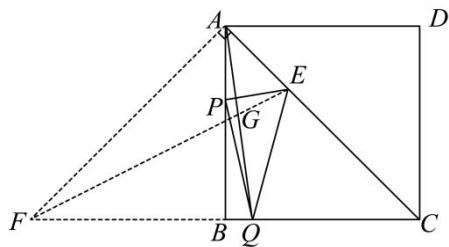
综上所述, 当 $\triangle EPQ$ 是直角三角形时, t 的值为 $6 - 2\sqrt{3}$ 秒或 2 秒.

【小问 3 详解】

解: 过点 A 作 $AF \perp AC$, 交 CB 的延长线于点 F , 连接 FE 交 AQ 于点 G .

$\because AF \perp AC$, $\angle ACF = 45^\circ$,

$\therefore AF = AC$.



又 $\because CE = 2AE$,

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AE}{AF} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \tan \angle AFE = \frac{1}{3}.$$

$$\because \tan \angle AQE = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \angle AFE = \angle AQE$$

$$\because \angle AGF = \angle EGQ,$$

$$\therefore \triangle AGF \sim \triangle EGQ$$

$$\therefore \frac{AG}{EG} = \frac{GF}{GQ},$$

$$\because \angle AGE = \angle FGQ,$$

$$\therefore \triangle AGE \sim \triangle FGQ,$$

$$\therefore \angle AEG = \angle FQG$$

$$\because \angle AFE + \angle AEF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FQG + \angle EQG = 90^\circ,$$

$$\text{即 } \angle FQE = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle EQC$ 是等腰直角三角形.

$$\therefore QC = 4,$$

$$\therefore S_{\triangle AQE} = S_{\triangle AQC} - S_{\triangle EQC}$$

$$= \frac{1}{2} QC \cdot AB - \frac{1}{2} QC \cdot EQ$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 6 - \frac{1}{2} \times 4 \times 4$$

$$= 4 (\text{cm}^2)$$

【点睛】本题考查了正方形的性质、相似三角形的性质与判定、正切定义以及勾股定理. 解答过程中, 灵活的利用勾股定理构造方程、根据题意找到相似三角形是解题关键.

25. 已知抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$.

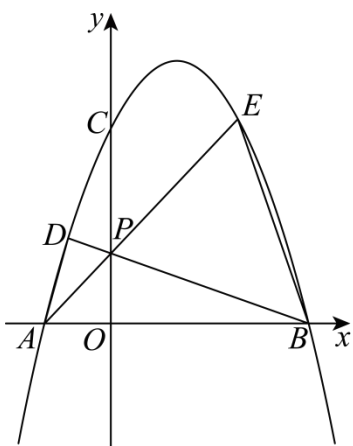


图1

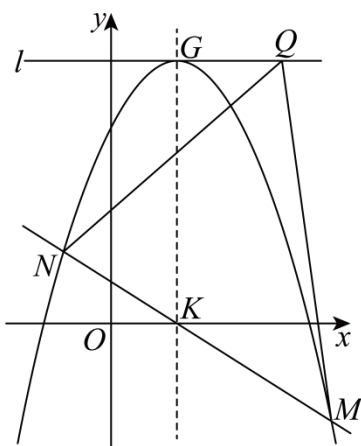


图2

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 如图1, 抛物线与 y 轴交于点 C , 点 P 为线段 OC 上一点 (不与端点重合), 直线 PA , PB 分别交抛物线于点 E , D , 设 $\triangle PAD$ 面积为 S_1 , $\triangle PBE$ 面积为 S_2 , 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的值;

(3) 如图2, 点 K 是抛物线对称轴与 x 轴的交点, 过点 K 的直线 (不与对称轴重合) 与抛物线交于点 M , N , 过抛物线顶点 G 作直线 $l \parallel x$ 轴, 点 Q 是直线 l 上一动点. 求 $QM + QN$ 的最小值.

【答案】(1) $y = -x^2 + 2x + 3$

$$(2) \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{9}$$

$$(3) 4\sqrt{5}$$

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法即可求解；

(2) 设 $P(0, p)$ ，直线 AP 为 $y = k_1x + b_1$ ，求出 $y = px + p$ ，直线 BD 为 $y = k_2x + b_2$ ，求出 $y = -\frac{p}{3}x + p$ ，

联立方程组得 $E(3-p, -p^2+4p)$ ， $D\left(\frac{p-3}{3}, -\frac{p^2}{9} + \frac{4p}{3}\right)$ ，再根据 $S_1 = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle ABP}$ ，

$S_2 = S_{\triangle ABE} - S_{\triangle ABP}$ 即可求解；

(3) 设直线 MN 为 $y = kx + d$ ，由 $K(1, 0)$ 得 $k + d = 0$ ，得 $y = kx - k$ ，设 $M(m, -m^2 + 2m + 3)$ ，

$N(n, -n^2 + 2n + 3)$ ，联立直线 MN 与抛物线 $\begin{cases} y = kx - k \\ y = -x^2 + 2x + 3 \end{cases}$ ，得 $x^2 + (k-2)x - k - 3 = 0$ ，根据根与系

数的关系可得： $m + n = 2 - k$ ， $mn = -k - 3$ ，作点 N 关于直线 l 的对称点 N' ，连接 MN' ，则有

$QM + QN = QM + QN' \geq MN'$ ，过 M 点作 $MF \perp NN'$ 于 F ，则 $F(n, -m^2 + 2m + 3)$ ，则

$N'F = |m^2 + n^2 - 2(m+n) + 2|$ ， $FM = |m - n|$ ，根据勾股定理得 $MN'^2 = k^4 + 17k^2 + 80 \geq 80$ ，即可求出

$QM + QN$ 最小值.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ ， $B(3, 0)$ ，

$$\begin{cases} -1 - b + c = 0 \\ -9 + 3b + c = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$ ；

【小问 2 详解】

设 $P(0, p)$ ，直线 AP 为 $y = k_1x + b_1$ ($k_1 \neq 0$)，据题意得，

$$\begin{cases} -k_1 + b_1 = 0 \\ b_1 = p \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k_1 = p \\ b_1 = p \end{cases}$$

$$\therefore y = px + p,$$

$$\text{联立得} \begin{cases} y = px + p \\ y = -x^2 + 2x + 3 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 3 - p \\ y = -p^2 + 4p \end{cases},$$

$$\therefore E(3 - p, -p^2 + 4p),$$

设 $P(0, p)$, 直线 BD 为 $y = k_2x + b_2$ ($k_2 \neq 0$), 据题意得,

$$\begin{cases} 3k_2 + b_2 = 0 \\ b_2 = p \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k_2 = -\frac{p}{3} \\ b_2 = p \end{cases},$$

$$\therefore y = -\frac{p}{3}x + p,$$

$$\text{联立得} \begin{cases} y = -\frac{p}{3}x + p \\ y = -x^2 + 2x + 3 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = \frac{p-3}{3} \\ y = -\frac{p^2}{9} + \frac{4p}{3} \end{cases},$$

$$\therefore D\left(\frac{p-3}{3}, -\frac{p^2}{9} + \frac{4p}{3}\right),$$

$$S_1 = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} AB \cdot (y_D - y_P) = 2\left(-\frac{p^2}{9} + \frac{4p}{3} - p\right) = \frac{2}{9}(3p - p^2),$$

$$S_2 = S_{\triangle ABE} - S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} AB \cdot (y_E - y_P) = 2(-p^2 + 4p - p) = 2(3p - p^2),$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{9};$$

【小问 3 详解】

设直线 MN 为 $y = kx + d$ ($k \neq 0$), 由 $K(1, 0)$ 得 $k + d = 0$,

$$\therefore d = -k,$$

$$\therefore y = kx - k,$$

$$\text{设 } M(m, -m^2 + 2m + 3), \quad N(n, -n^2 + 2n + 3),$$

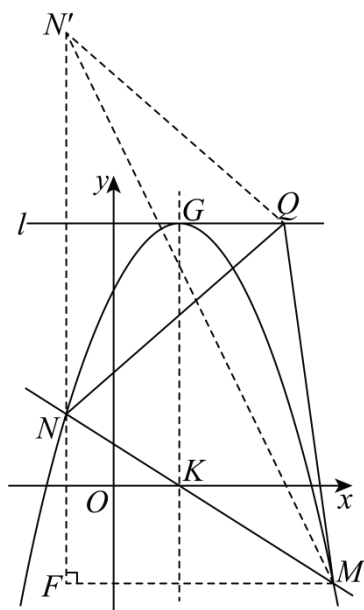
联立直线 MN 与抛物线 $\begin{cases} y = kx - k \\ y = -x^2 + 2x + 3 \end{cases}$,

得 $x^2 + (k-2)x - k - 3 = 0$,

$\Delta = (k-2)^2 - 4(-k-3) = k^2 + 16 > 0$,

根据根与系数的关系可得: $m+n=2-k$, $mn=-k-3$,

作点 N 关于直线 l 的对称点 N' , 连接 MN' ,



由题意得直线 $l: y = 4$, 则 $N'(n, n^2 - 2n + 5)$,

$\therefore QM + QN = QM + QN' \geq MN'$,

过 M 点作 $MF \perp NN'$ 于 F , 则 $F(n, -m^2 + 2m + 3)$.

则 $N'F = |m^2 + n^2 - 2(m+n) + 2|$, $FM = |m - n|$,

在 $Rt\triangle MFN'$ 中,

$$\begin{aligned} MN'^2 &= MF^2 + N'F^2 = (m-n)^2 + [m^2 + n^2 - 2(m+n) + 2]^2 \\ &= (m+n)^2 - 4mn + [(m+n)^2 - 2mn - 2(m+n) + 2]^2 \\ &= (2-k)^2 - 4(-k-3) + [(2-k)^2 - 2(-k-3) - 2(2-k) + 2]^2 \\ &= k^4 + 17k^2 + 80 \geq 80, \end{aligned}$$

即当 $k=0$ 时, $MN'^2 = 80$, 此时 $MN' = 4\sqrt{5}$,

故 $QM + QN$ 的最小值为 $4\sqrt{5}$.

【点睛】本题考查了二次函数和一次函数的图象与性质，二次函数与一元二次方程的关系，解一元二次方程，根的判别式，勾股定理，轴对称的性质，熟练掌握知识点的应用是解题的关键.