

内江市二〇二四年初中学业水平考试暨高中阶段学校招生考试试卷

数学试题

本试卷分为 A 卷和 B 卷两部分. A 卷 1 至 5 页, 满分 100 分; B 卷 6 至 8 页, 满分 60 分. 全卷满分 160 分, 考试时间 120 分钟.

A 卷 (共 100 分)

注意事项:

- 1、答题前, 考生务必将将自己的姓名、学号、班级等填写好.
- 2、答 A 卷时, 每小题选出答案后, 用钢笔或水笔把答案直接填写在对应题目的后面括号.

第 I 卷 (选择题 共 36 分)

一、选择题 (本大题共 12 小题, 每小题 3 分, 共 36 分.)

1. 下列四个数中, 最大数是 ()

- A. -2 B. 0 C. -1 D. 3

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了有理数大小比较的法则, ①正数都大于 0, ②负数都小于 0, ③正数大于一切负数, ④两个负数, 绝对值大的其值反而小. 根据有理数的大小比较选出最大的数即可.

【详解】解: $-2 < -1 < 0 < 3$,

$\therefore$ 最大的数是 3,

故选: D.

2. 2024 年 6 月 5 日, 是二十四节气的芒种, 二十四节气是中国劳动人民独创的文化遗产, 能反映季节的变化, 指导农事活动. 下面四副图片分别代表“芒种”、“白露”、“立夏”、“大雪”, 其中是中心对称图形的是 ()



【答案】D

【解析】

【分析】根据中心对称图形的定义: 把一个图形绕着某一个点旋转 180° , 如果旋转后的图形能够与原来的图形重合, 那么这个图形叫做中心对称图形, 这个点就是它的对称中心, 进行逐一判断即可. 本题主要考查了中心对称图形, 解题的关键在于能够熟练掌握中心对称图形的定义.

【详解】解：A. 不是中心对称图形，故 A 选项不合题意；

B. 不是中心对称图形，故 B 选项不合题意；

C. 不是中心对称图形，故 C 选项不合题意；

D. 是中心对称图形，故 D 选项合题意；

故选：D.

3. 下列单项式中， ab^3 的同类项是 ()

A. $3ab^3$

B. $2a^2b^3$

C. $-a^2b^2$

D. a^3b

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查的是同类项的定义，掌握同类项的定义是解题的关键. 依据同类项的定义：所含字母相同，相同字母的次数相同，据此判断即可.

【详解】解：A. 是同类项，此选项符合题意；

B. 字母 a 的次数不相同，不是同类项，故此选项不符合题意；

C. 相同字母的次数不相同，不是同类项，故此选项不符合题意；

D. 相同字母的次数不相同，不是同类项，故此选项不符合题意.

故选：A.

4. 2023 年我国汽车出口 491 万辆，首次超越日本，成为全球第一大汽车出口国，其中 491 万用科学记数法表示为 ()

A. 4.91×10^4

B. 4.91×10^5

C. 4.91×10^6

D. 4.91×10^7

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查科学记数法的定义，关键是理解运用科学记数法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同.

【详解】解：491 万 $= 4910000 = 4.91 \times 10^6$ ，

故选：C.

5. 16 的平方根是 ()

A. -4

B. 4

C. 2

D. ± 4

【答案】D

【解析】

【分析】题考查了平方根，熟记定义是解题的关键．根据平方根的定义计算即可．

【详解】解：16的平方根是 ± 4 ，

故选：D．

6. 下列事件时必然事件的是（ ）

- A. 打开电视机，中央台正在播放“嫦娥六号完成人类首次背月采样”的新闻
- B. 从两个班级中任选三名学生担任学校安全督查员，至少有两名学生来自同一个班级
- C. 小明在内江平台一定能抢到龙舟节开幕式门票
- D. 从《西游记》《红楼梦》《三国演义》《水浒传》这四本书中随机抽取一本是《三国演义》

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了事件的分类，熟记必然事件、不可能事件、随机事件的概念是解题关键．必然事件指在一定条件下，一定发生的事件．不可能事件是指在一定条件下，一定不发生的事件，不确定事件即随机事件是指在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件．根据定义，对每个选项逐一判断．

【详解】解：A、是随机事件，不符合题意，选项错误；

B、是必然事件，符合题意，选项正确；

C、是随机事件，不符合题意，选项错误；

D、是随机事件，不符合题意，选项错误；

故选：B．

7. 已知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 相似，且相似比为1:3，则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 的周长比为（ ）

- A. 1:1
- B. 1:3
- C. 1:6
- D. 1:9

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了相似三角形的性质，熟知相似三角形周长之比等于相似比是解题的关键．

【详解】解： $\because \triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 相似，且相似比为1:3，

$\therefore \triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 的周长比为1:3，

故选B．

8. 不等式 $3x \geq x - 4$ 的解集是（ ）

- A. $x \geq -2$
- B. $x \leq -2$
- C. $x > -2$
- D. $x < -2$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了解一元一次不等式，根据解一元一次不等式的步骤解答即可求解，掌握解一元一次不等式的步骤是解题的关键.

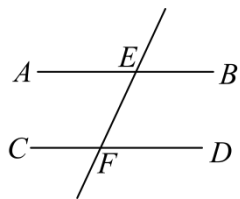
【详解】解：移项得， $3x - x \geq -4$,

合并同类项得， $2x \geq -4$,

系数化为1得， $x \geq -2$,

故选：A.

9. 如图， $AB \parallel CD$ ，直线 EF 分别交 AB 、 CD 于点 E 、 F ，若 $\angle EFD = 64^\circ$ ，则 $\angle BEF$ 的大小是（ ）

A. 136° B. 64° C. 116° D. 128°

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了平行线的性质，根据两直线平行，同旁内角互补求解即可.

【详解】解： $\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle BEF + \angle EFD = 180^\circ$,

$\because \angle EFD = 64^\circ$,

$\therefore \angle BEF = 180^\circ - \angle EFD = 116^\circ$,

故选：C.

10. 某市2021年底森林覆盖率为64%，为贯彻落实“绿水青山就是金山银山”的发展理念，该市大力发展植树造林活动，2023年底森林覆盖率已达到69%．如果这两年森林覆盖率的年平均增长率为 x ，则符合题意得方程是（ ）

A. $0.64(1+x) = 0.69$ B. $0.64(1+x)^2 = 0.69$ C. $0.64(1+2x) = 0.69$ D. $0.64(1+2x)^2 = 0.69$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了一元二次方程的应用，关键是根据题意找到等式两边的平衡条件．设年平均增长

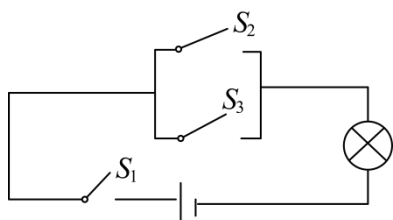
率为 x ，根据 2023 年底森林覆盖率 = 2021 年底森林覆盖率 $\times (1+x)^2$ ，据此即可列方程求解.

【详解】解：根据题意，得 $64\%(1+x)^2 = 69\%$

即 $0.64(1+x)^2 = 0.69$,

故选：B.

11. 如图所示的电路中，当随机闭合开关 S_1 、 S_2 、 S_3 中的两个时，灯泡能发光的概率为 ()



A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{6}$

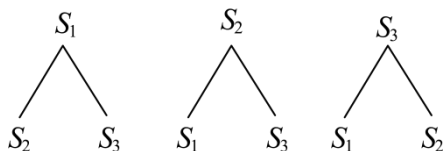
【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了树状图法以及概率公式，正确的画出树状图是解此题的关键. 画树状图，共有 12 种等可能的结果，其中能够让灯泡发光的结果有 6 种，再由概率公式求解即可.

【详解】解：由电路图可知，当同时闭合开关 S_1 和 S_2 ， S_1 和 S_3 时，灯泡能发光，

画树状图如下：



共有 6 种等可能结果，其中灯泡能发光的有 4 种，

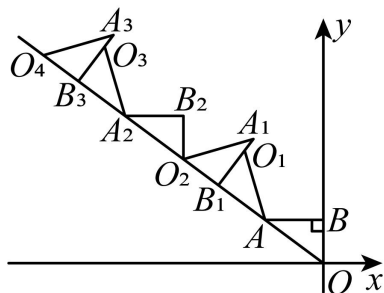
$\therefore$ 灯泡能发光的概率为 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$,

故选：A.

12. 如图，在平面直角坐标系中， $AB \perp y$ 轴，垂足为点 B ，将 $\triangle ABO$ 绕点 A 逆时针旋转到 AB_1O_1 的位置，

使点 B 的对应点 B_1 落在直线 $y = -\frac{3}{4}x$ 上，再将 AB_1O_1 绕点 B_1 逆时针旋转到 $A_1B_1O_2$ 的位置，使点 O_1 的

对应点 O_2 也落在直线 $y = -\frac{3}{4}x$ 上，如此下去，……，若点 B 的坐标为 $(0, 3)$ ，则点 B_{37} 的坐标为 ().



- A. $(180,135)$ B. $(180,133)$ C. $(-180,135)$ D. $(-180,133)$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了平面直角坐标系、一次函数、旋转的性质、勾股定理等知识点. 找出点的坐标规律以及旋转过程中线段长度的关系是解题的关键.

通过求出点A的坐标, AB 、 OA 、 OB 的长度, 再根据旋转的特点逐步推导出后续点的位置和坐标, 然后结合图形求解即可.

【详解】 $\because AB \perp y$ 轴, 点B的坐标为 $(0,3)$,

$\therefore OB=3$, 则点A的纵坐标为3, 代入 $y=-\frac{3}{4}x$,

得: $x=-4$, 则点A的坐标为 $(-4,3)$.

$\therefore OB=3$, $AB=4$,

$OA=\sqrt{3^2+4^2}=5$,

由旋转可知, $OB=O_1B_1=O_2B_2=\dots=3$, $OA=O_1A=O_2A_1=\dots=5$, $AB=AB_1=A_1B_1=A_2B_2=\dots=4$,

$\therefore OB_1=OA+AB_1=4+5=9$, $B_1B_3=3+4+5=12$,

$\therefore B_1B_3=B_3B_5=\dots=B_{35}B_{37}=12$,

$\therefore OB_{37}=OB_1+B_1B_{37}=9+\frac{(37-1)}{2}\times 12=225$.

设点 B_{37} 的坐标为 $(a, -\frac{3}{4}a)$,

则 $OB_{37}=\sqrt{a^2+\left(-\frac{3}{4}a\right)^2}=225$,

解得 $a = -180$ 或 180 (舍去), 则 $-\frac{3}{4}a = 135$,

$\therefore$ 点 B_{37} 的坐标为 $(-180, 135)$.

故选 C.

第 II 卷 (非选择题 共 64 分)

注意事项:

1、第 II 卷共 3 页, 用钢笔或圆珠笔将答案直接答在试卷上.

2、答题前将密封线内的项目填写清楚.

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 在函数 $y = \frac{1}{x}$ 中, 自变量 x 的取值范围是_____;

【答案】 $x \neq 0$

【解析】

【分析】 本题考查函数的概念, 根据分式成立的条件求解即可. 熟练掌握分式的分母不等于零是解题的关键.

【详解】 解: 由题意可得, $x \neq 0$,

故答案为: $x \neq 0$.

14. 分解因式: $m^2 - 5m =$ _____.

【答案】 $m(m-5)$

【解析】

【分析】 原式提取公因式即可得到结果.

【详解】 原式 $= m(m-5)$.

故答案为: $m(m-5)$.

【点睛】 本题考查了提公因式法.

15. 已知二次函数 $y = x^2 - 2x + 1$ 的图象向左平移两个单位得到抛物线 C , 点 $P(2, y_1)$, $Q(3, y_2)$ 在抛物线 C 上, 则 y_1 _____ y_2 (填 “ $>$ ” 或 “ $<$ ”);

【答案】 $<$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次函数图象的平移以及二次函数的性质, 由平移的规律可得出抛物线 C 的解析

式为 $y = (x+1)^2$ ，再利用二次函数图象的性质可得出答案.

【详解】解： $y = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ ，

$\because$ 二次函数 $y = x^2 - 2x + 1$ 的图象向左平移两个单位得到抛物线 C ，

$\therefore$ 抛物线 C 的解析式为 $y = (x+1)^2$ ，

$\therefore$ 抛物线开口向上，对称轴为 $x = -1$ ，

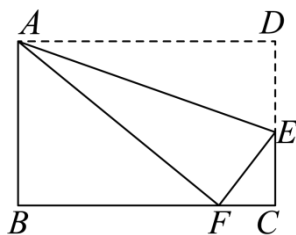
$\therefore$ 当 $x > -1$ 时， y 随 x 的增大而增大，

$\because 2 < 3$ ，

$\therefore y_1 < y_2$ ，

故答案为：<.

16. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 3$ ， $AD = 5$ ，点 E 在 DC 上，将矩形 $ABCD$ 沿 AE 折叠，点 D 恰好落在 BC 边上的点 F 处，那么 $\tan \angle EFC =$ _____.



【答案】 $\frac{4}{3}$

【解析】

【分析】先根据矩形的性质得 $BC = AD = 5$ ， $CD = AB = 3$ ，再根据折叠的性质得 $AF = AD = 5$ ， $EF = DE$ ，在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中，利用勾股定理计算出 $BF = 4$ ，则 $CF = BC - BF = 1$ ，设 $CE = x$ ，则 $DE = EF = 3 - x$ ，然后在 $\text{Rt}\triangle ECF$ 中根据勾股定理得到 $x^2 + 1^2 = (3 - x)^2$ ，解方程即可得到 x ，进一步得到 EF 的长，再根据正切数的定义即可求解.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$\therefore BC = AD = 5$ ， $CD = AB = 3$ ， $\angle B = \angle C = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 矩形 $ABCD$ 沿直线 AE 折叠，顶点 D 恰好落在 BC 边上的 F 处，

$\therefore AF = AD = 5$ ， $EF = DE$ ，

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中， $BF = \sqrt{AF^2 - AB^2} = 4$ ，

$\therefore CF = BC - BF = 5 - 4 = 1$ ，

设 $CE = x$ ，则 $EF = DE = CD - CE = 3 - x$

∴ 在 $\text{Rt}\triangle ECF$ 中, $CE^2 + FC^2 = EF^2$,

$$\therefore x^2 + 1^2 = (3-x)^2, \text{ 解得 } x = \frac{4}{3},$$

$$\therefore CE = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \tan \angle EFC = \frac{CE}{FC} = \frac{4}{3}.$$

故答案为: $\frac{4}{3}$

【点睛】本题考查了折叠的性质：折叠是一种对称变换，它属于轴对称，折叠前后图形的形状和大小不变，位置变化，对应边和对应角相等．也考查了矩形的性质和勾股定理，正切的定义．

三、解答题（本大题共 5 小题，共 44 分，解答应写出必要的文字说明或推演步骤）

17. (1) 计算: $|-1| - (\sqrt{2} - 2)^0 + 2\sin 30^\circ$

(2) 化简: $(x+2)(x-2) - x^2$

【答案】(1) 1; (2) -4

【解析】

【分析】本题主要考查了实数的混合运算以及整式的混合运算．

(1) 本题主要考查了实数的运算，熟练掌握绝对值，零次幂和特殊三角函数是解决本题的关键．

(2) 本题主要考查了整式的混合运算，熟练地掌握平方差公式及合并同类项是解决本题的关键．

【详解】解: (1) 原式 $= 1 - 1 + 2 \times \frac{1}{2}$

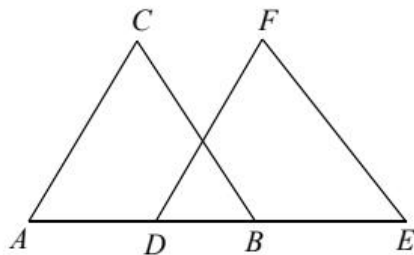
$$= 1 - 1 + 1,$$

$$= 1$$

(2) 原式 $= x^2 - 4 - x^2$

$$= -4$$

18. 如图, 点 A、D、B、E 在同一条直线上, $AD = BE$, $AC = DF$, $BC = EF$



(1) 求证: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$;

(2) 若 $\angle A = 55^\circ$, $\angle E = 45^\circ$, 求 $\angle F$ 的度数.

【答案】(1) 见解析 (2) 80°

【解析】

【分析】本题主要考查了全等三角形的判定与性质，熟练地掌握全等三角形的判定和性质是解决本题的关键.

(1) 先证明 $AB = DE$ ，再结合已知条件可得结论；

(2) 证明 $\angle A = \angle FDE = 55^\circ$ ，再结合三角形的内角和定理可得结论.

【小问 1 详解】

证明： $\because AD = BE$

$\therefore AD + DB = BE + DB$ ，即 $AB = DE$

$\because AC = DF$ ， $BC = EF$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$ (SSS)

【小问 2 详解】

$\because \triangle ABC \cong \triangle DEF$ ， $\angle A = 55^\circ$ ，

$\therefore \angle A = \angle FDE = 55^\circ$ ，

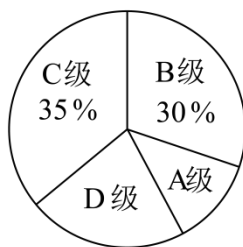
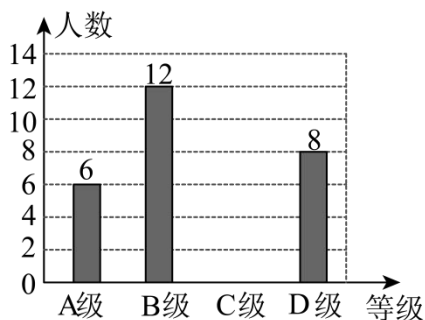
$\because \angle E = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle F = 180^\circ - \angle FDE - \angle E = 80^\circ$

19. 某校为了解学生对“生命·生态与安全”课程的学习掌握情况，从八年级学生中随机抽取了部分学生进行综合测试. 测试结果分为 A 级、B 级、C 级、D 级四个等级，并将测试结果绘制成了如下两幅不完整的统计图. 根据统计图中的信息解答下列问题：

学生综合测试等级条形统计图

学生综合测试等级条形扇形图



(1) 本次抽样测试的学生人数是_____；

(2) 扇形统计图中表示 D 级的扇形圆心角的度数是_____，并把条形统计图补充完整；

(3) 该校八年级共有学生 600 人，如果全部参加这次测试，测试成绩为 A 级的学生大约有多少人？

【答案】(1) 40 (2) 72° ；补图见解析

(3) 90 人

【解析】

【分析】本题考查条形统计图、扇形统计图，用样本估计总体，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答.

(1) 用 B 级人数除以所占百分比即可求解；

(2) 用 360° 乘以 D 级所占百分比求解；用总人数乘以 C 级所占百分比求出 C 级的人数，然后补图即可；

(3) 用 600 乘以成绩为 A 级的学生所占百分比即可.

【小问 1 详解】

解：本次抽样测试的学生人数为： $12 \div 30\% = 40$ (名)

答：答案为 40；

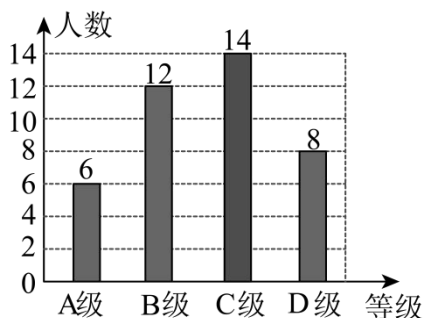
【小问 2 详解】

解：扇形统计图中表示 D 级的扇形圆心角的度数是： $\frac{8}{40} \times 360^\circ = 72^\circ$

C 级的人数为： $40 \times 35\% = 14$ (名)

补充完整的条形统计图如图所示：

学生综合测试等级条形统计图



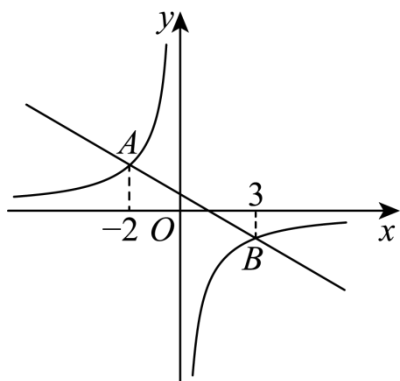
【小问 3 详解】

解： $\frac{6}{40} \times 600 = 90$ (人)

答：该校八年级共有学生 600 人，如果全部参加这次测试，测试成绩为 A 级的学生大约有 90 人.

20. 如图，一次函数 $y = ax + b$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象相交于 A 、 B 两点，其中点 A 的坐标为

$(-2, 3)$ ，点 B 的坐标为 $(3, n)$



- (1) 求这两个函数的表达式；
- (2) 根据图象，直接写出关于 x 的不等式 $ax + b < \frac{k}{x}$ 的解集

【答案】(1) $y = -\frac{6}{x}$, $y = -x + 1$

(2) $-2 < x < 0$ 或 $x > 3$

【解析】

【分析】本题考查了一次函数和反比例函数的交点，待定系数法求一次函数和反比例函数的解析式，熟练地掌握待定系数法是解题的关键.

- (1) 用待定系数法求反比例函数解析式以及一次函数解析式即可.
- (2) 根据函数图像即可求解.

【小问 1 详解】

解：把 A 的坐标 $(-2, 3)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$,

$$\text{得 } 3 = \frac{k}{-2},$$

解得 $k = -6$,

$\therefore$ 反比例函数的解析式为: $y = -\frac{6}{x}$

把 B 的坐标 $(3, n)$ 代入 $y = -\frac{6}{x}$,

$$\text{得 } n = -\frac{6}{3} = -2$$

$\therefore$ B 的坐标 $(3, -2)$

把 $A(-2, 3)$, $B(3, -2)$ 代入 $y = ax + b$,

$$\text{得 } \begin{cases} -2a + b = 3 \\ 3a + b = -2 \end{cases}$$

解得： $\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$ ，

∴一次函数的解析式为： $y = -x + 1$ 。

【小问 2 详解】

∴关于 x 的不等式 $ax + b < \frac{k}{x}$ 的解集，即反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像在一次函数 $y = ax + b$ 的图像上方。

∴根据图象，关于 x 的不等式 $ax + b < \frac{k}{x}$ 的解集为： $-2 < x < 0$ 或 $x > 3$ 。

21. 端午节吃粽子是中华民族的传统习俗. 市场上猪肉粽的进价比豆沙粽的进价每盒多 20 元, 某商家用 5000 元购进的猪肉粽盒数与 3000 元购进的豆沙粽盒数相同. 在销售中, 该商家发现猪肉粽每盒售价 52 元时, 可售出 180 盒; 每盒售价提高 1 元时, 少售出 10 盒.

(1) 求这两种粽子的进价;

(2) 设猪肉粽每盒售价 x 元 ($52 \leq x \leq 70$), y 表示该商家销售猪肉粽的利润 (单位: 元), 求 y 关于 x 的函数表达式并求出 y 的最大值.

【答案】(1) 猪肉粽每盒 50 元, 豆沙粽每盒 30 元

(2) $y = -10x^2 + 1200x - 35000$ 或 $y = -10(x - 60)^2 + 1000$, 当 $x = 60$ 时, y 取得最大值为 1000 元

【解析】

【分析】本题考查列分式方程解应用题和二次函数求最值, 解决本题的关键是正确寻找本题的等量关系及二次函数配方求最值问题.

(1) 设豆沙粽每盒的进价为 n 元, 则猪肉粽每盒的进价为 $(n + 20)$ 元. 根据“用 5000 元购进的猪肉粽盒数与 3000 元购进的豆沙粽盒数相同”即可列出方程, 求解并检验即可;

(2) 根据题意可列出 y 关于 x 的函数解析式, 再根据二次函数的性质即可解答.

【小问 1 详解】

解: 设豆沙粽每盒的进价为 n 元, 则猪肉粽每盒的进价为 $(n + 20)$ 元

由题意得: $\frac{5000}{n + 20} = \frac{3000}{n}$

解得: $n = 30$

经检验: $n = 30$ 是原方程的解且符合题意

∴ $n + 20 = 50$

答: 猪肉粽每盒 50 元, 豆沙粽每盒 30 元.

【小问 2 详解】

解：设猪肉粽每盒售价 x 元 ($52 \leq x \leq 70$)， y 表示该商家销售猪肉粽的利润 (单位：元)，则

$$y = (x - 50)[180 - 10(x - 52)] = -10x^2 + 1200x - 35000 = -10(x - 60)^2 + 1000$$

$$\because 52 \leq x \leq 70, -10 < 0,$$

$\therefore$ 当 $x = 60$ 时， y 取得最大值为 1000 元.

B 卷 (共 60 分)

注意事项：加试卷共 3 页，请将答案直接填写在试卷上.

四、填空题 (本大题共 4 小题，每小题 6 分，共 24 分.)

22. 已知实数 a, b 满足 $ab = 1$ ，那么 $\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1}$ 的值为_____.

【答案】1

【解析】

【分析】先根据异分母的分式相加减的法则把原式化简，再把 $ab=1$ 代入进行计算即可.

【详解】解： $\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1}$

$$= \frac{b^2 + 1 + a^2 + 1}{(a^2 + 1)(b^2 + 1)}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + 2}{a^2 b^2 + a^2 + b^2 + 1}$$

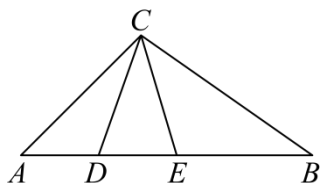
$$= \frac{a^2 + b^2 + 2}{(ab)^2 + a^2 + b^2 + 1}$$

$$\because ab = 1$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{a^2 + b^2 + 2}{1^2 + a^2 + b^2 + 1} = \frac{a^2 + b^2 + 2}{a^2 + b^2 + 2} = 1.$$

【点睛】本题考查了分式的化简求值，分式求值题中比较多的题型主要有三种：转化已知条件后整体代入求值；转化所求问题后将条件整体代入求值；既要转化条件，也要转化问题，然后再代入求值.

23. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle DCE = 40^\circ$ ， $AE = AC$ ， $BC = BD$ ，则 $\angle ACB$ 的度数为_____；



【答案】 100° ## 100 度

【解析】

【分析】 本题考查三角形的内角和定理，等腰三角形的性质，角的和差.

根据三角形的内角和可得 $\angle CDE + \angle CED = 140^\circ$ ，根据 $AE = AC$ ， $BC = BD$ 得到 $\angle ACE = \angle AEC$ ， $\angle BCD = \angle BDC$ ，从而 $\angle ACE + \angle BCD = 140^\circ$ ，根据角的和差有 $\angle ACB = \angle ACE + \angle BCD - \angle CDE$ ，即可解答.

【详解】 解： $\because \angle DCE = 40^\circ$ ，

$$\therefore \angle CDE + \angle CED = 180^\circ - \angle DCE = 140^\circ,$$

$$\because AE = AC, BC = BD,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle AEC, \angle BCD = \angle BDC,$$

$$\therefore \angle ACE + \angle BCD = \angle CDE + \angle CED = 140^\circ$$

$$\therefore \angle ACB = \angle ACE + \angle BCE = \angle ACE + \angle BCD - \angle CDE = 140^\circ - 40^\circ = 100^\circ.$$

故答案为： 100°

24. 一个四位数，如果它的千位与十位上的数字之和为 9，百位与个位上的数字之和也为 9，则称该数为“极数”. 若偶数 m 为“极数”，且 $\frac{m}{33}$ 是完全平方数，则 $m =$ _____；

【答案】 1188 或 4752

【解析】

【分析】 此题考查列代数式解决问题，设出 m 的代数式后根据题意得到代数式的取值范围是解题的关键，根据取值范围确定可能的值即可解答问题. 设四位数 m 的个位数字为 x ，十位数字为 y ，将 m 表示出来，根据 $\frac{m}{33}$ 是完全平方数，得到可能的值即可得出结论.

【详解】 解： 设四位数 m 的个位数字为 x ，十位数字为 y ，(x 是 0 到 9 的整数， y 是 0 到 8 的整数)，

$$\therefore m = 1000(9 - y) + 100(9 - x) + y + x = 99(100 - 10y - x),$$

$\because m$ 是四位数，

$$\therefore 99(100 - 10y - x) \text{ 是四位数，}$$

$$\text{即 } 1000 \leq 99(100 - 10y - x) < 10000,$$

$$\therefore \frac{m}{33} = 3(100 - 10y - x),$$

$$\therefore 30\frac{10}{33} \leq 3(100 - 10y - x) < 303\frac{1}{33},$$

$$\therefore \frac{m}{33} \text{ 是完全平方数，}$$

$$\therefore 3(100 - 10y - x) \text{ 既是 3 的倍数也是完全平方数，}$$

$\therefore 3(100-10y-x)$ 只有 36, 81, 144, 225 这四种可能,

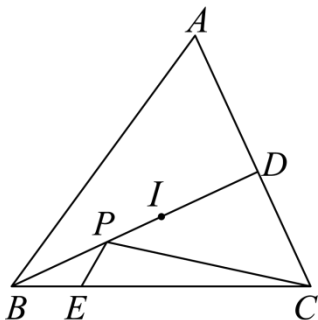
$\therefore \frac{m}{33}$ 是完全平方数的所有 m 值为 1188 或 2673 或 4752 或 7425,

又 m 是偶数,

$\therefore m = 1188$ 或 4752

故答案为: 1188 或 4752.

25. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 60^\circ$, $BC = 8$, E 是 BC 边上一点, 且 $BE = 2$, 点 I 是 $\triangle ABC$ 的内心, BI 的延长线交 AC 于点 D , P 是 BD 上一动点, 连接 PE 、 PC , 则 $PE + PC$ 的最小值为_____.



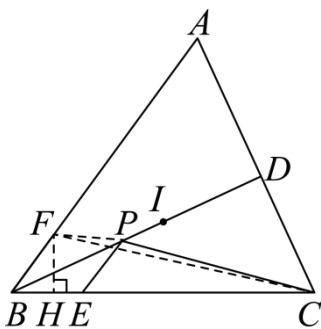
【答案】 $2\sqrt{13}$

【解析】

【分析】在 AB 取点 F , 使 $BF = BE = 2$, 连接 PF , CF , 过点 F 作 $FH \perp BC$ 于 H , 利用三角形内心的定义可得出 $\angle ABD = \angle CBD$, 利用 SAS 证明 $\triangle BFP \cong \triangle BEP$, 得出 $PF = PE$, 则

$PE + PC = PF + PC \geq CF$, 当 C 、 P 、 F 三点共线时, $PE + PC$ 最小, 最小值为 CF , 利用含 30° 的直角三角形的性质求出 BH , 利用勾股定理求出 FH , CF 即可.

【详解】解: 在 AB 取点 F , 使 $BF = BE = 2$, 连接 PF , CF , 过点 F 作 $FH \perp BC$ 于 H ,



$\therefore I$ 是 $\triangle ABC$ 的内心,

$\therefore BI$ 平分 $\angle ABC$,

$\therefore \angle ABD = \angle CBD$,

又 $BP = BP$,

$\therefore \triangle BFP \cong \triangle BEP$ (SAS),

$$\therefore PF = PE,$$

$$\therefore PE + PC = PF + PC \geq CF,$$

当 C 、 P 、 F 三点共线时， $PE + PC$ 最小，最小值为 CF ，

$$\therefore FH \perp BC, \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BFH = 30^\circ,$$

$$\therefore BH = \frac{1}{2}BF = 1,$$

$$\therefore FH = \sqrt{BF^2 - BH^2} = \sqrt{3}, \quad CH = BC - BH = 7,$$

$$\therefore CF = \sqrt{CH^2 + FH^2} = 2\sqrt{13},$$

$$\therefore PE + PC \text{ 的最小值为 } 2\sqrt{13}.$$

故答案为： $2\sqrt{13}$.

【点睛】 本题考查了三角形的内心，全等三角形的判定与性质，含 30° 的直角三角形的性质，勾股定理等知识，明确题意，添加合适辅助线，构造全等三角形和含 30° 的直角三角形是解题的关键.

五、解答题（本大题共 3 小题，每小题 12 分，共 36 分）

26. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - px + 1 = 0$ (p 为常数) 有两个不相等的实数根 x_1 和 x_2 .

(1) 填空: $x_1 + x_2 =$ _____, $x_1 x_2 =$ _____;

(2) 求 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$, $x_1 + \frac{1}{x_1}$;

(3) 已知 $x_1^2 + x_2^2 = 2p + 1$, 求 p 的值.

【答案】 (1) p , 1;

(2) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = p^2 - 2$, $x_1 + \frac{1}{x_1} = p$;

(3) $p = 3$.

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根和系数的关系，根的判别式，掌握一元二次方程根和系数的关系是解题的关键.

(1) 利用根和系数的关系即可求解;

(2) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 变形为 $\frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2}$, 再把根和系数的关系代入计算即可求解, 由一元二次方程根的定义

义可得 $x_1^2 - px_1 + 1 = 0$ ，即得 $x_1 - p + \frac{1}{x_1} = 0$ ，进而可得 $x_1 + \frac{1}{x_1} = p$ ；

(3) 把方程变形为 $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2p + 1$ ，再把根和系数的关系代入得 $p^2 - 2 = 2p + 1$ ，可得 $p = -1$ 或 $p = 3$ ，再根据根的判别式进行判断即可求解.

【小问 1 详解】

解：由根与系数的关系得， $x_1 + x_2 = p$ ， $x_1x_2 = 1$ ，

故答案为： p ， 1 ；

【小问 2 详解】

解：∵ $x_1 + x_2 = p$ ， $x_1x_2 = 1$ ，

$$\therefore \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = p^2 - 2,$$

∴ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - px + 1 = 0$ (p 为常数) 有两个不相等的实数根 x_1 和 x_2 ，

$$\therefore x_1^2 - px_1 + 1 = 0,$$

$$\therefore x_1 - p + \frac{1}{x_1} = 0,$$

$$\therefore x_1 + \frac{1}{x_1} = p;$$

【小问 3 详解】

解：由根与系数的关系得， $x_1 + x_2 = p$ ， $x_1x_2 = 1$ ，

$$\therefore x_1^2 + x_2^2 = 2p + 1,$$

$$\therefore (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2p + 1,$$

$$\therefore p^2 - 2 = 2p + 1,$$

$$\therefore p^2 - 2p - 3 = 0,$$

解得 $p = -1$ 或 $p = 3$ ，

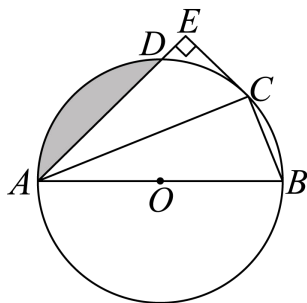
∴ 一元二次方程 $x^2 - px + 1 = 0$ 为 $x^2 + x + 1 = 0$ 或 $x^2 - 3x + 1 = 0$ ，

当 $p = -1$ 时， $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ ，不合题意，舍去；

当 $p=3$ 时, $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5 > 0$, 符合题意;

$\therefore p=3$.

27. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, C 是 $\widehat{BD}$ 的中点, 过点 C 作 AD 的垂线, 垂足为点 E .



(1) 求证: $\triangle ACE \sim \triangle ABC$;

(2) 求证: CE 是 $\odot O$ 的切线;

(3) 若 $AD = 2CE$, $OA = \sqrt{2}$, 求阴影部分的面积.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

(3) $\frac{1}{2}\pi - 1$

【解析】

【分析】+ (1) 分别证明 $\angle ACB = \angle AEC$, $\angle BAC = \angle EAC$, 从而可得结论;

(2) 连接 OC , 证明 $\angle EAC = \angle ACO$, 可得 $OC \parallel AE$, 再进一步可得结论;

(3) 连接 DB 、 OD , 证明四边形 $DECF$ 是矩形, 可得 $DF = EC$, 再证明 $AD = DB$, 可得

$\angle DAB = \angle DBA = 45^\circ$, 可得 $\angle DOA = 2\angle DBA = 90^\circ$, 利用 $S_{\text{阴影部分}} = S_{\text{扇形}AOD} - S_{\triangle AOD}$ 可得答案.

【小问 1 详解】

证明: $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$,

又 $\because CE \perp AD$,

$\therefore \angle AEC = 90^\circ$,

$\therefore \angle ACB = \angle AEC$,

$\because C$ 是 $\widehat{BD}$ 的中点,

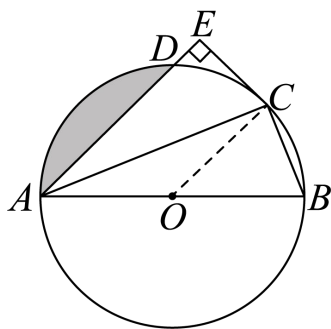
$\therefore \widehat{BC} = \widehat{DC}$,

$\therefore \angle BAC = \angle EAC$,

$\therefore \triangle ACE \sim \triangle ABC$;

【小问 2 详解】

证明：连接 OC



$$\therefore OA = OC,$$

$$\therefore \angle CAO = \angle ACO,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle EAC,$$

$$\therefore \angle EAC = \angle ACO,$$

$$\therefore OC \parallel AE,$$

$$\therefore CE \perp AD,$$

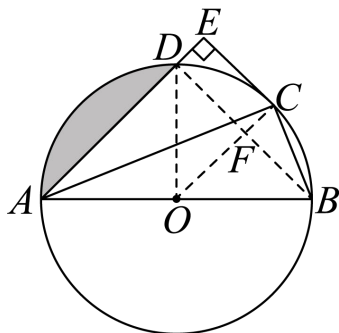
$$\therefore CE \perp OC,$$

$\therefore OC$ 是 $\odot O$ 的半径,

$\therefore CE$ 是 $\odot O$ 的切线;

【小问 3 详解】

解: 连接 DB 、 OD



$\therefore AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEC = \angle ECO = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $DECF$ 是矩形,

$$\therefore DF = EC,$$

$\therefore OC$ 是半径, C 是 $\widehat{BD}$ 的中点,

$$\therefore DF = FB, \quad OC \perp DB,$$

$$\text{即 } DB = 2DF = 2EC,$$

$$\therefore AD = 2CE,$$

$$\therefore AD = DB,$$

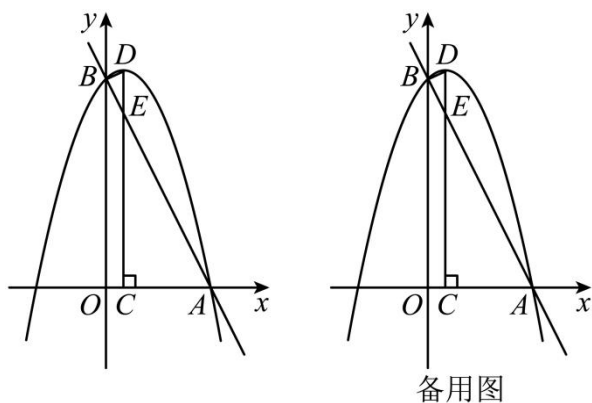
$$\therefore \angle DAB = \angle DBA = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DOA = 2\angle DBA = 90^\circ,$$

$$\therefore S_{\text{阴影部分}} = S_{\text{扇形}AOD} - S_{\triangle AOD} = \frac{90^\circ \pi \times (\sqrt{2})^2}{360} - \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = \frac{1}{2}\pi - 1$$

【点睛】本题主要考查了圆周角定理、切线的判定及扇形的面积公式，熟练地掌握相似三角形的判定和切线的判定是解决本题的关键。

28. 如图，在平面直角坐标系中，一次函数 $y = -2x + 6$ 的图象与 x 轴交于点 A ，与 y 轴交于点 B ，抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 经过 A 、 B 两点，在第一象限的抛物线上取一点 D ，过点 D 作 $DC \perp x$ 轴于点 C ，交 AB 于点 E 。



- (1) 求这条抛物线所对应的函数表达式；
- (2) 是否存在点 D ，使得 $\triangle BDE$ 和 $\triangle ACE$ 相似？若存在，请求出点 D 的坐标，若不存在，请说明理由；
- (3) F 是第一象限内抛物线上的动点（不与点 D 重合），过点 F 作 x 轴的垂线交 AB 于点 G ，连接 DF ，当四边形 $EGFD$ 为菱形时，求点 D 的横坐标。

【答案】(1) $y = -x^2 + x + 6$

(2) 点 D 的坐标为 $(1, 6)$ 或 $(\frac{1}{2}, \frac{25}{4})$

(3) $\frac{3 + 2\sqrt{5} - \sqrt{29}}{2}$

【解析】

【分析】(1) 先求出 A 、 B 的坐标，然后代入 $y = -x^2 + bx + c$ ，求出 b 、 c 的值即可；

(2) 由对顶角的性质性质知 $\angle AEC = \angle DEB$ ，若存在 $\triangle BDE$ 和 $\triangle ACE$ 相似，则有 $\triangle ACE \sim \triangle BDE$ 和 $\triangle ACE \sim \triangle DBE$ 两种情况，然后分情况讨论，利用相似三角形的性质求解即可；

(3) 设点 $D(m, -m^2 + m + 6)$, $E(m, -2m + 6)$, $F(n, -n^2 + n + 6)$, $G(n, -2n + 6)$, 则 $DE = -m^2 + 3m$, $FG = -n^2 + 3n$, 根据菱形的性质得出 $-m^2 + 3m = -n^2 + 3n$, 可求出 $n = 3 - m$, 过点 G 作 $GK \perp DE$ 于 K , 可得 $\angle EGK = \angle BAC$, 利用等角的余弦值相等得出 $\frac{n-m}{EG} = \frac{3}{3\sqrt{5}}$, 求出 $EG = \sqrt{5}(3-2m)$, 根据菱形的性质得出 $m^2 - (3+2\sqrt{5})m + 3\sqrt{5} = 0$, 解方程求出 m 的值即可.

【小问 1 详解】

解：令 $y = 0$, 则 $-2x + 6 = 0$, 则 $x = 3$; 令 $x = 0$, 则 $y = 6$

$\therefore A(3, 0)$, $B(0, 6)$

把 $A(3, 0)$, $B(0, 6)$ 代入 $y = -x^2 + bx + c$, 得:

$$\begin{cases} -9 + 3b + c = 0 \\ c = 6 \end{cases} \text{ 解得: } \begin{cases} b = 1 \\ c = 6 \end{cases}$$

$\therefore$ 这条抛物线所对应的函数表达式为: $y = -x^2 + x + 6$;

【小问 2 详解】

解：存在点 D , 使得 $\triangle BDE$ 和 $\triangle ACE$ 相似.

设点 $D(t, -t^2 + t + 6)$, 则 $E(t, -2t + 6)$, $C(t, 0)$, $H(t, 6)$

$\therefore EC = -2t + 6$, $AC = 3 - t$, $BH = t$, $DH = -t^2 + t$, $DE = -t^2 + 3t$

$\therefore \triangle BDE$ 和 $\triangle ACE$ 相似, $\angle BED = \angle AEC$

$\therefore \triangle ACE \sim \triangle BDE$ 或 $\triangle ACE \sim \triangle DBE$

①如图 1, 当 $\triangle ACE \sim \triangle BDE$ 时, $\angle BDE = \angle ACE = 90^\circ$

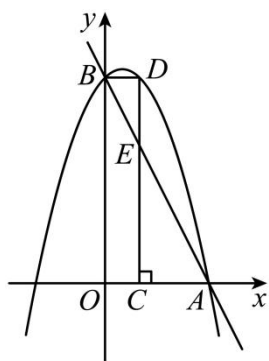


图1

$$\therefore BD \parallel AC$$

$\therefore D$ 点纵坐标为 6

$$\therefore -t^2 + t + 6 = 6, \text{ 解得: } t = 0 \text{ 或 } t = 1$$

$$\therefore D(1, 6)$$

②如图 2, 当 $\triangle ACE \sim \triangle DBE$ 时, $\angle BDE = \angle CAE$

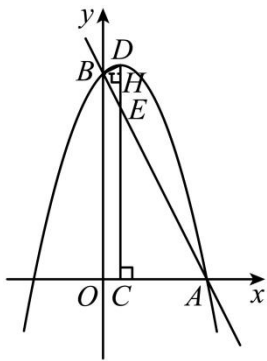


图2

过 B 作 $BH \perp DC$ 于 H

$$\therefore \angle BHD = 90^\circ$$

$$\therefore \frac{BH}{DH} = \tan \angle BDE = \tan \angle CAE = \frac{OB}{OA}$$

$$\therefore \frac{t}{-t^2 + t} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\therefore -2t^2 + 2t = t, \text{ 解得: } t = 0 \text{ (舍去) 或 } t = \frac{1}{2}$$

$$\therefore D\left(\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$$

综上所述, 点 D 的坐标为 $(1, 6)$ 或 $\left(\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$.

【小问 3 详解】

如图 3, $\because$ 四边形 $EGFD$ 为菱形

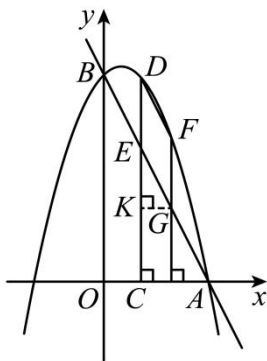


图3

$$\therefore DE \parallel FG, DE = FG, ED = EG$$

$$\text{设点 } D(m, -m^2 + m + 6), E(m, -2m + 6), F(n, -n^2 + n + 6), G(n, -2n + 6)$$

$$\therefore DE = -m^2 + 3m, FG = -n^2 + 3n$$

$$\therefore -m^2 + 3m = -n^2 + 3n, \text{ 即 } (m-n)(m+n-3) = 0$$

$$\therefore m-n \neq 0$$

$$\therefore m+n-3=0, \text{ 即 } m+n=3 \text{ 或 } n=3-m$$

$$\therefore A(3,0), B(0,6)$$

$$\therefore AO=3, BO=6$$

$$\therefore AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = 3\sqrt{5}$$

过点 G 作 $GK \perp DE$ 于 K

$$\therefore KG \parallel AC$$

$$\therefore \angle EGK = \angle BAC$$

$$\therefore \frac{KG}{EG} = \cos \angle EGK = \cos \angle BAC = \frac{OA}{AB}, \text{ 即 } \frac{n-m}{EG} = \frac{3}{3\sqrt{5}}$$

$$\therefore EG = \sqrt{5}(n-m) = \sqrt{5}(3-2m)$$

$$\therefore DE = EG$$

$$\therefore -m^2 + 3m = \sqrt{5}(3-2m)$$

$$\therefore m^2 - (3+2\sqrt{5})m + 3\sqrt{5} = 0$$

$$\text{解得: } m = \frac{3+2\sqrt{5}+\sqrt{29}}{2} \text{ (不合题意, 舍去) 或 } m = \frac{3+2\sqrt{5}-\sqrt{29}}{2}$$

$$\text{故 } m = \frac{3+2\sqrt{5}-\sqrt{29}}{2}$$

$$\text{答: 点 } D \text{ 的横坐标为 } \frac{3+2\sqrt{5}-\sqrt{29}}{2}$$

【点睛】 本题是常见的中考数学压轴题型，综合性比较强，涉及到知识点较多；主要考查了待定系数法求二次函数的解析式，相似三角形的性质，菱形的性质；解题时要能够灵活运用所学的数学知识，要会分类讨论。