

乐山市 2024 年初中学业水平考试

数学

本试题卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题），共 8 页。考生作答时，须将答案答在答题卡上，在本试题卷、草稿纸上答题无效。满分 150 分。考试时间 120 分钟。考试结束后，将本试题卷和答题卡一并交回。考生作答时，不能使用任何型号的计算器。

第 I 卷（选择题共 30 分）

注意事项：

1. 选择题必须使用 2B 铅笔将答案标号填涂在答题卡对应题目标号的位置上。
2. 在每小题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求。

一、选择题：本大题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分。

1. 不等式 $x - 2 < 0$ 的解集是（ ）

- A. $x < 2$ B. $x > 2$ C. $x < -2$ D. $x > -2$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了解一元一次不等式。熟练掌握解一元一次不等式是解题的关键。
移项可得一元一次不等式的解集。

【详解】解： $x - 2 < 0$ ，

解得， $x < 2$ ，

故选：A。

2. 下列文物中，俯视图是四边形的是（ ）



【答案】D

【解析】

【分析】本题考查简单几何体的三视图，掌握简单几何体三视图的形状是正确判断的前提。
得出各个选项中的几何体的俯视图即可。

- 【详解】解：A. 俯视图是圆形，因此选项 A 不符合题意；
B. 俯视图不是四边形，因此选项 B 不符合题意；
C. 俯视图不是四边形，因此选项 C 不符合题意；

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

D. 俯视图是正方形，因此选项 D 符合题意；

故选：D.

3. 2023 年，乐山市在餐饮、文旅、体育等服务消费表现亮眼，网络零售额突破 400 亿元，居全省地级市第一。将 40000000000 用科学记数法表示为 ()

A. 4×10^8

B. 4×10^9

C. 4×10^{10}

D. 4×10^{11}

【答案】C

【解析】

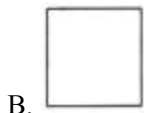
【分析】本题考查了绝对值大于 1 的科学记数法的表示，解题的关键在于确定 a 、 n 的值.

根据绝对值大于 1 的数，用科学记数法表示为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq a < 10$ ， n 的值为整数位数少 1.

【详解】解：40000000000 大于 1，用科学记数法表示为 $a \times 10^n$ ，其中 $a = 4$ ， $n = 10$ ，
 $\therefore$ 40000000000 用科学记数法表示为 4×10^{10} ，

故选：C.

4. 下列多边形中，内角和最小的是 ()



【答案】A

【解析】

【分析】边数为 n 的多边形的内角和 $= (n - 2) \times 180^\circ$ ，分别求出三角形，四边形，五边形，六边形的内角和，即可得到.

【详解】解：三角形的内角和等于 180°

四边形的内角和等于 360°

五边形的内角和等于 $(5 - 2) \times 180^\circ = 540^\circ$

六边形的内角和等于 $(6 - 2) \times 180^\circ = 720^\circ$

所以三角形的内角和最小

故选：A.

【点睛】本题考查了多边形的内角和，能熟记边数为 n 的多边形的内角和 $= (n - 2) \times 180^\circ$ 是解此题的关键.

5. 为了解学生上学的交通方式，刘老师在九年级 800 名学生中随机抽取了 60 名进行问卷调查，并将调查结果制作成如下统计表，估计该年级学生乘坐公交车上学的人数为 ()

交通方式	公 交	自 行	步	私 家	其
------	-----	-----	---	-----	---

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

	车	车	行	车	它
人 数 (人)	30	5	15	8	2

A. 100

B. 200

C. 300

D. 400

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了用样本估计总体，用学校总人数乘样本中乘坐公交车上学的人数的比例，即可得出答案.

【详解】解：估计该年级学生乘坐公交车上学的人数为：

$$800 \times \frac{30}{60} = 400 \quad (\text{人}),$$

故选：D.

6. 下列条件中，不能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形的是（ ）

A. $AB \parallel CD, AD \parallel BC$

B. $AB = CD, AD = BC$

C. $OA = OC, OB = OD$

D. $AB \parallel CD, AD = BC$

【答案】D

【解析】

【分析】根据平行四边形的判定定理分别进行分析即可.

【详解】解：A、 $\because AB \parallel CD, AD \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，故此选项不合题意；

B、 $\because AB = CD, AD = BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，故此选项不合题意；

C、 $\because OA = OC, OB = OD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，故此选项不合题意；

D、 $\because AB \parallel CD, AD = BC$ ，不能得出四边形 $ABCD$ 是平行四边形，故此选项符合题意；

故选：D.

【点睛】此题主要考查平行四边形的判定，解题的关键是熟知平行四边形的判定定理.

7. 已知 $1 < x < 2$ ，化简 $\sqrt{(x-1)^2} + |x-2|$ 的结果为（ ）

A. -1

B. 1

C. $2x-3$

D. $3-2x$

【答案】B

【解析】

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

【分析】本题考查了二次根式的性质，去绝对值，熟练掌握知识点是解题的关键.

先根据 $\sqrt{a^2} = |a|$ 化简二次根式，然后再根据 $1 < x < 2$ 去绝对值即可.

【详解】解： $\sqrt{(x-1)^2} + |x-2| = |x-1| + |x-2|$,

$$\therefore 1 < x < 2,$$

$$\therefore x-1 > 0, x-2 < 0,$$

$$\therefore |x-1| + |x-2| = x-1+2-x=1,$$

$$\therefore \sqrt{(x-1)^2} + |x-2| = 1,$$

故选：B.

8. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2x + p = 0$ 两根为 x_1, x_2 ，且 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3$ ，则 p 的值为（ ）

A. $-\frac{2}{3}$

B. $\frac{2}{3}$

C. -6

D. 6

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 根与系数的关系：若方程的两实数根为 x_1, x_2 ，

则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

根据一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 根与系数的关系得到 $x_1 + x_2 = -\frac{2}{1} = -2, x_1 \cdot x_2 = p$ ，然后通

分， $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-2}{p}$ ，从而得到关于 p 的方程，解方程即可.

【详解】解： $\because x_1 + x_2 = -\frac{2}{1} = -2, x_1 \cdot x_2 = p$,

$$\therefore \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-2}{p},$$

$$\text{而 } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3,$$

$$\therefore \frac{-2}{p} = 3,$$

$$\therefore p = -\frac{2}{3},$$

故选：A.

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

9. 已知二次函数 $y = x^2 - 2x$ ($-1 \leq x \leq t-1$)，当 $x = -1$ 时，函数取得最大值；当 $x = 1$ 时，函数取得最小值，则 t 的取值范围是 ()

- A. $0 < t \leq 2$ B. $0 < t \leq 4$ C. $2 \leq t \leq 4$ D. $t \geq 2$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了二次函数的图象与性质，二次函数的最值等知识. 熟练掌握二次函数的图象与性质是解题的关键.

由 $y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ ，可知图象开口向上，对称轴为直线 $x = 1$ ，顶点坐标为 $(1, -1)$ ，当 $x = -1$ 时， $y = 3$ ，即 $(-1, 3)$ 关于对称轴对称的点坐标为 $(3, 3)$ ，由当 $x = -1$ 时，函数取得最大值；当 $x = 1$ 时，函数取得最小值，可得 $1 \leq t-1 \leq 3$ ，计算求解，然后作答即可.

【详解】解：∵ $y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ ，

∴ 图象开口向上，对称轴为直线 $x = 1$ ，顶点坐标为 $(1, -1)$ ，

当 $x = -1$ 时， $y = 3$ ，

∴ $(-1, 3)$ 关于对称轴对称的点坐标为 $(3, 3)$ ，

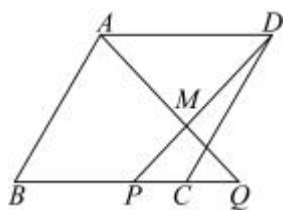
∴ 当 $x = -1$ 时，函数取得最大值；当 $x = 1$ 时，函数取得最小值，

∴ $1 \leq t-1 \leq 3$ ，

解得， $2 \leq t \leq 4$ ，

故选：C.

10. 如图，在菱形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $AB = 1$ ，点 P 是 BC 边上一个动点，在 BC 延长线上找一点 Q ，使得点 P 和点 Q 关于点 C 对称，连接 DP 、 AQ 交于点 M . 当点 P 从 B 点运动到 C 点时，点 M 的运动路径长为 ()



- A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】该题主要考查了菱形的性质，垂直平分线的性质和判定，全等三角形的性质和判定等知识点，解题的关键是掌握以上点 M 的运动路径.

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

过点 C 作 $CH \perp AD$ 交 AD 于点 H ，根据 $\angle ABC = 60^\circ$ ，四边形 $ABCD$ 是菱形， $AB = 1$ ，算出 $DH = 1$ ，得出 $AH = DH$ ， CH 垂直平分 AD ，再证明 $\triangle PCM \cong \triangle QCM$ ，得出 $PM = MQ$ ，证明

CM 垂直平分 PQ ，点 M 在 CH 上运动，根据解直角三角形 $CM' = BC \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，即可求解。

【详解】解：过点 C 作 $CH \perp AD$ 交 AD 于点 H ，

$\therefore \angle ABC = 60^\circ$ ，四边形 $ABCD$ 是菱形， $AB = 1$ ，

$\therefore \angle ADC = 60^\circ$ ， $CD = BC = AB = 1$ ，

$\therefore \angle DCH = 30^\circ$ ，

$DH = \frac{1}{2}CD = 1$ ，

$\therefore AH = AD - DH = 1$ ，

$\therefore AH = DH$ ，

$\therefore CH$ 垂直平分 AD ，

$\therefore$ 点 P 和点 Q 关于点 C 对称，

$\therefore PC = QC$ ，

$\therefore \angle PCM = \angle QCM = 90^\circ$ ， $CM = CM$ ，

$\therefore \triangle PCM \cong \triangle QCM (SAS)$ ，

$\therefore PM = MQ$ ，

$\therefore CM$ 垂直平分 PQ ，

$\therefore$ 点 M 在 CH 上运动，

当点 P 与点 B 重合时，点 M 位于点 M' ，

此时， $\therefore \angle ABC = 60^\circ$ ，四边形 $ABCD$ 是菱形， $AB = 1$ ，

$\therefore \angle MBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 30^\circ$ ， $BC = 1$

$\therefore CM' = BC \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

故点 M 的运动路径长为 $CM' = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

故选：B。

注意事项:

- 二、填空题：本大题共 6 个小题，每小题 3 分，共 18 分.

【答案】 $3a$

【解析】

【分析】 直接利用合并同类项法则计算得出答案.

【详解】 $2a + a = 3a$

故答案为: $3a$.

【点睛】本题主要考查了合并同类项，正确把握运算法则是解题关键.

12. 一名交警在路口随机监测了 5 辆过往车辆的速度，分别是：66，57，71，69，58（单位：千米/时）．那么这 5 辆车的速度的中位数是_____．

【答案】 66

【解析】

【分析】本题主要考查中位数，将一组数据按照从小到大（或从大到小）的顺序排列，如果数据的个数是奇数，则处于中间位置的数就是这组数据的中位数。如果这组数据的个数是偶数，则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数。

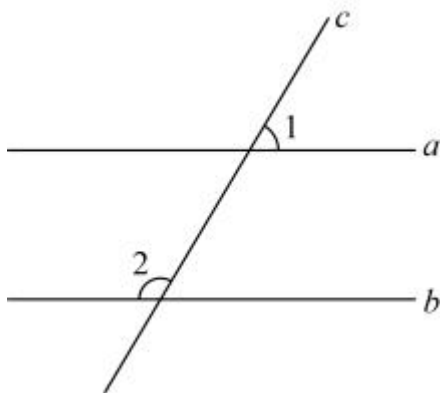
先将数据从小到大重新排列，根据中位数的概念求解可得.

【详解】解：将这组数据重新排列为 57, 58, 66, 69, 71,

所以这组数据的中位数为 66.

故答案为: 66.

13. 如图，两条平行线 a 、 b 被第三条直线 c 所截，若 $\angle 1 = 60^\circ$ ，那么 $\angle 2 =$ _____.



【答案】 120° ## 120 度

【解析】

【分析】 本题考查了直线平行的性质：两直线平行同位角相等，也考查了平角的定义.

根据两直线平行同位角相等得到 $\angle 1 = \angle 3 = 60^\circ$ ，再根据平角的定义得到 $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ ，从而可计算出 $\angle 2$.

【详解】 解：如图，

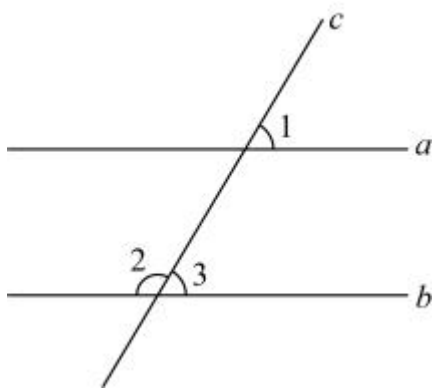
$$\because a \parallel b,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3 = 60^\circ,$$

$$\text{而 } \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

故答案为： 120° .



14. 已知 $a - b = 3$ ， $ab = 10$ ，则 $a^2 + b^2 =$ _____.

【答案】 29

【解析】

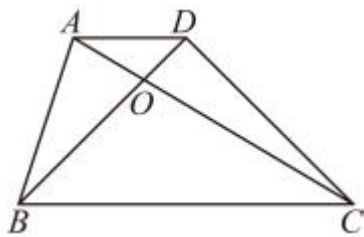
【分析】 本题考查了完全平方公式的变形，熟练掌握完全平方公式的变形是解题的关键.

根据 $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$ ，计算求解即可.

【详解】 解：由题意知， $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab = 3^2 + 2 \times 10 = 29$ ，

故答案为： 29 .

15. 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，对角线 AC 和 BD 交于点 O ，若 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{1}{3}$ ，则 $\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle BOC}} =$ _____.



【答案】 $\frac{1}{9}$

【解析】

【分析】 本题考查了平行线间的距离，相似三角形的判定与性质等知识. 熟练掌握平行线间的距离，相似三角形的判定与性质是解题的关键.

设 AD , BC 的距离为 d ，则 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{\frac{1}{2}AD \cdot d}{\frac{1}{2}BC \cdot d} = \frac{1}{3}$ ，即 $\frac{AD}{BC} = \frac{1}{3}$ ，证明 $\triangle AOD \sim \triangle COB$ ，则

$$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle BOC}} = \left(\frac{AD}{BC}\right)^2, \text{ 计算求解即可.}$$

【详解】 解：设 AD , BC 的距离为 d ，

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{\frac{1}{2}AD \cdot d}{\frac{1}{2}BC \cdot d} = \frac{1}{3}, \text{ 即 } \frac{AD}{BC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADO = \angle CBO, \angle DAO = \angle BCO,$$

$$\therefore \triangle AOD \sim \triangle COB,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle BOC}} = \left(\frac{AD}{BC}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9},$$

故答案为： $\frac{1}{9}$.

16. 定义：函数图象上到两坐标轴的距离都小于或等于 1 的点叫做这个函数图象的“近轴点”. 例如，点 $(0,1)$ 是函数 $y = x + 1$ 图象的“近轴点”.

(1) 下列三个函数的图象上存在“近轴点”的是_____ (填序号)；

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

① $y = -x + 3$; ② $y = \frac{2}{x}$; ③ $y = -x^2 + 2x - 1$.

(2) 若一次函数 $y = mx - 3m$ 图象上存在“近轴点”，则 m 的取值范围为_____.

【答案】 ①. ③ ②. $-\frac{1}{2} \leq m < 0$ 或 $0 < m \leq \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了新定义——“近轴点”. 熟练掌握新定义，一次函数，反比例函数，二次函数图象上的点到坐标轴距特点，是解决问题的关键.

(1) ① $y = -x + 3$ 中，取 $x = y = 1.5$ ，不存在“近轴点”；

② $y = \frac{2}{x}$ ，由对称性，取 $x = y = \pm\sqrt{2}$ ，不存在“近轴点”；

③ $y = -x^2 + 2x - 1 = -(x-1)^2$ ，取 $x = 1$ 时， $y = 0$ ，得到 $(1, 0)$ 是 $y = -x^2 + 2x - 1$ 的“近轴点”；

(2) $y = mx - 3m = m(x-3)$ 图象恒过点 $(3, 0)$ ，当直线过 $(1, -1)$ 时， $m = \frac{1}{2}$ ，得到 $0 < m \leq \frac{1}{2}$ ；当直线过 $(1, 1)$ 时， $m = -\frac{1}{2}$ ，得到 $-\frac{1}{2} \leq m < 0$.

【详解】 (1) ① $y = -x + 3$ 中，

$x = 1.5$ 时， $y = 1.5$ ，

不存在“近轴点”；

② $y = \frac{2}{x}$ ，

由对称性，当 $x = y$ 时， $x = y = \pm\sqrt{2}$ ，

不存在“近轴点”；

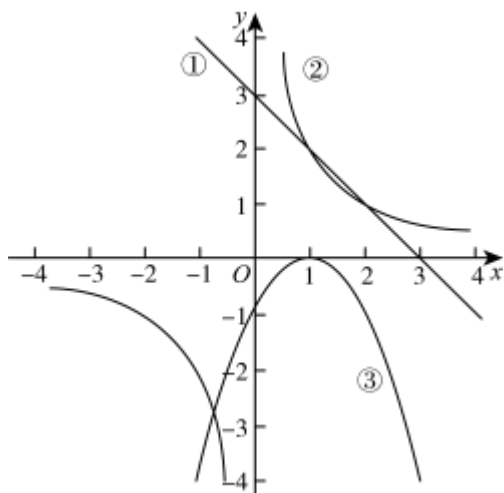
③ $y = -x^2 + 2x - 1 = -(x-1)^2$ ，

$x = 1$ 时， $y = 0$ ，

$\therefore (1, 0)$ 是 $y = -x^2 + 2x - 1$ 的“近轴点”；

$\therefore$ 上面三个函数的图象上存在“近轴点”的是③

故答案为：③；



(2) $y = mx - 3m = m(x - 3)$ 中,

$x = 3$ 时, $y = 0$,

∴ 图象恒过点 $(3, 0)$,

当直线过 $(1, -1)$ 时, $-1 = m(1 - 3)$,

$m = \frac{1}{2}$,

$0 < m \leq \frac{1}{2}$;

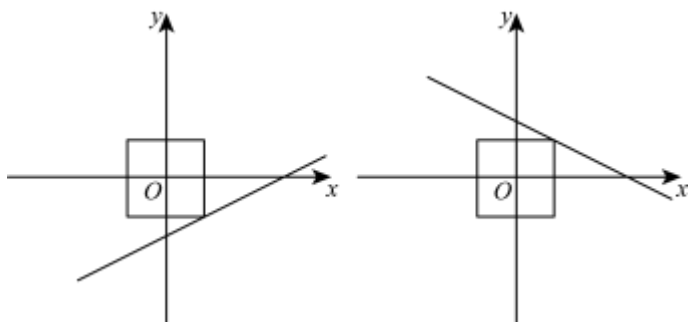
当直线过 $(1, 1)$ 时, $1 = m(1 - 3)$,

$m = -\frac{1}{2}$,

$-\frac{1}{2} \leq m < 0$;

∴ m 的取值范围为 $-\frac{1}{2} \leq m < 0$ 或 $0 < m \leq \frac{1}{2}$.

故答案为: $-\frac{1}{2} \leq m < 0$ 或 $0 < m \leq \frac{1}{2}$.



三、解答题：本大题共 10 个小题，共 102 分．解答应写出必要的文字说明，证明过程或演

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

算步骤.

17. 计算: $|-3| + (\pi - 2024)^0 - \sqrt{9}$.

【答案】1

【解析】

【分析】本题考查了绝对值，零指数幂，算术平方根. 熟练掌握绝对值，零指数幂，算术平方根是解题的关键.

先分别计算绝对值，零指数幂，算术平方根，然后进行加减运算即可.

【详解】解: $|-3| + (\pi - 2024)^0 - \sqrt{9}$
 $= 3 + 1 - 3$
 $= 1$.

18. 解方程组:
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

【答案】详见解析

【解析】

【分析】用加减消元法把二元一次方程转化成一元一次方程.

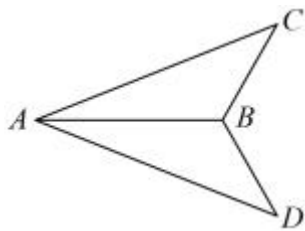
【详解】解: ①+②, 得 $3x = 9$.

解得 $x = 3$.

把 $x = 3$ 代入②, 得 $y = 1$.

$\therefore$ 原方程组的解是 $\begin{cases} x = 3, \\ y = 1. \end{cases}$

19. 知: 如图, AB 平分 $\angle CAD$, $AC = AD$. 求证: $\angle C = \angle D$.



【答案】见解析

【解析】

【分析】利用 SAS 证明 $\triangle CAB \cong \triangle DAB$, 即可证明 $\angle C = \angle D$.

【详解】解: $\because AB$ 平分 $\angle CAD$,

$\therefore \angle CAB = \angle DAB$,

在 $\triangle CAB$ 和 $\triangle DAB$ 中,

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$$\begin{cases} AC = AD \\ \angle CAB = \angle DAB \\ AB = AB \end{cases},$$

$$\therefore \triangle CAB \cong \triangle DAB (SAS),$$

$$\therefore \angle C = \angle D.$$

【点睛】本题主要考查全等三角形的判定与性质，熟练掌握SAS、AAS、ASA、SSS等全等三角形的判定方法是解题的关键.

20. 先化简，再求值： $\frac{2x}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}$ ，其中 $x=3$ 。小乐同学的计算过程如下：

解

$$\frac{2x}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} = \frac{2x}{(x+2)(x-2)} - \frac{1}{x-2} \dots \textcircled{1}$$

$$= \frac{2x}{(x+2)(x-2)} - \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} \dots \textcircled{2}$$

$$= \frac{2x-x+2}{(x+2)(x-2)} \dots \textcircled{3}$$

$$= \frac{x+2}{(x+2)(x-2)}$$

$\dots \textcircled{4}$

$$= \frac{1}{x-2} \dots \textcircled{5}$$

当 $x=3$ 时，

原式=1.

(1) 小乐同学的解答过程中，第_____步开始出现了错误；

(2) 请帮助小乐同学写出正确的解答过程.

【答案】 (1) ③ (2) $\frac{1}{x+2}, \frac{1}{5}$

【解析】

【分析】本题考查了分式的化简求值，异分母的分式减法运算，熟练掌握知识点是解题的关键.

(1) 第③步分子相减时，去括号变号不彻底；

(2) 先通分，再进行分子相减，化为最简分式后，再代入求值即可.

【小问 1 详解】

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

解：∵第③步分子相减时，去括号变号不彻底，

应为：
$$\frac{2x}{(x+2)(x-2)} - \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \frac{2x-x-2}{(x+2)(x-2)};$$

【小问 2 详解】

解：
$$\frac{2x}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} = \frac{2x}{(x+2)(x-2)} - \frac{1}{x-2}$$

$$= \frac{2x}{(x+2)(x-2)} - \frac{x+2}{(x+2)(x-2)}$$

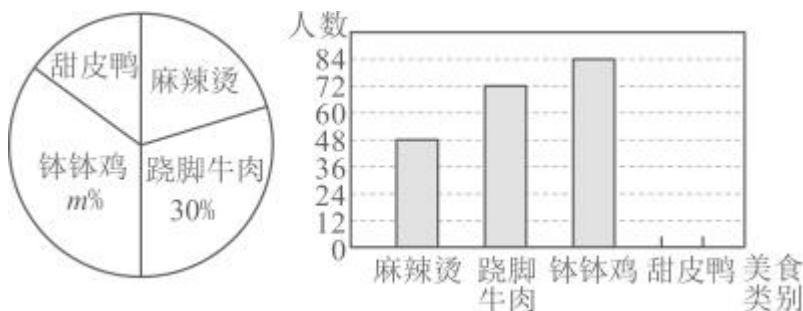
$$= \frac{2x-x-2}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \frac{x-2}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \frac{1}{x+2}$$

当 $x=3$ 时，原式 $= \frac{1}{5}$

21. 乐山作为闻名世界的文化旅游胜地，吸引了大量游客。为更好地提升服务质量，某旅行社随机调查了部分游客对四种美食的喜好情况（每人限选一种），并将调查结果绘制成统计图，如图所示。



根据以上信息，回答下列问题：

(1) 本次抽取的游客总人数为_____人，扇形统计图中 m 的值为_____；

(2) 请补全条形统计图；

(3) 旅行社推出每人可免费品尝两种美食的活动，某游客从上述 4 种美食中随机选择两种，请用画树状图或列表的方法求选到“钵钵鸡和跷脚牛肉”的概率。

【答案】 (1) 240, 35

(2) 见详解 (3) $\frac{1}{6}$

【解析】

【分析】 本题考查了列表法与树状图法：利用列表法或树状图法展示所有等可能的结果 n ，再从中选出符合事件 A 或事件 B 的结果数目 m ，然后利用概率公式计算事件 A 或事件 B 的概率。也考查了统计图。

(1) 根据：该项所占的百分比 = 该项人数 ÷ 总人数。两图给出了“跷脚牛肉”的数据，代入即可算出抽

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

取的游客总人数，然后再算出“钵钵鸡”的人数；

(2) 根据条形图中数据和调查总人数，先计算出喜欢“甜皮鸭”的人数，再补全条形图；

(3) 画树状图展示所有 12 种等可能的结果数，找出恰好同时抽到“钵钵鸡和跷脚牛肉”“钵钵鸡和跷脚牛肉”的结果数，然后根据概率公式求解.

【小问 1 详解】

解：本次抽取的游客总人数为 $72 \div 30\% = 240$ (人),

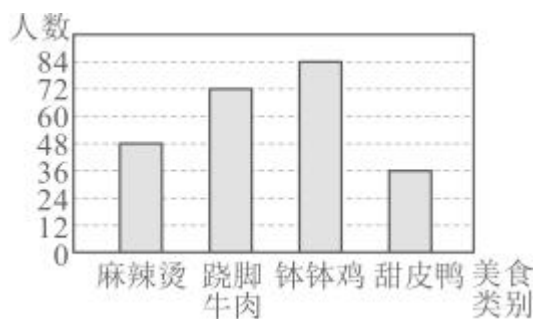
$$m = \frac{84}{240} \times 100\% = 35\%$$

故答案为：240, 35;

【小问 2 详解】

“甜皮鸭”对应的人数为 $240 - (48 + 72 + 84) = 36$ (人),

补全图形如下：



【小问 3 详解】

假设“麻辣烫”“跷脚牛肉”“钵钵鸡”“甜皮鸭”对应为“A、B、C、D”，

画树状图如图所示，

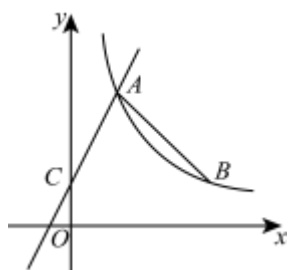


共有 12 种等可能的结果数，其中抽到“钵钵鸡和跷脚牛肉”题目的结果数为 2，

$$\therefore \text{抽到“钵钵鸡和跷脚牛肉”的概率是 } \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

22. 如图，已知点 $A(1, m)$ 、 $B(n, 1)$ 在反比例函数 $y = \frac{3}{x} (x > 0)$ 的图象上，过点 A 的一次函数 $y = kx + b$

的图象与 y 轴交于点 $C(0, 1)$.



【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

(1) 求 m 、 n 的值和一次函数的表达式；

(2) 连结 AB ，求点 C 到线段 AB 的距离。

【答案】 (1) $m=3$ ， $n=3$ ， $y=2x+1$

(2) 点 C 到线段 AB 的距离为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】 (1) 根据点 $A(1, m)$ 、 $B(n, 1)$ 在反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 图象上，代入即可求得 m 、 n 的值；根据一次函数 $y = kx + b$ 过点 $A(1, 3)$ 、 $C(0, 1)$ ，代入求得 k 、 b ，即可得到表达式；

(2) 连结 BC ，过点 A 作 $AD \perp BC$ ，垂足为点 D ，过点 C 作 $CE \perp AB$ ，垂足为点 E ，可推出 $BC \parallel x$ 轴， BC 、 AD 、 DB 的长度，然后利用勾股定理计算出 AB 的长度，最后根据

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AD = \frac{1}{2}AB \cdot CE$ ，计算得 CE 的长度，即为点 C 到线段 AB 的距离。

【小问 1 详解】

$\because$ 点 $A(1, m)$ 、 $B(n, 1)$ 在反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 图象上

$\therefore m=3$ ， $n=3$

又 $\because$ 一次函数 $y = kx + b$ 过点 $A(1, 3)$ 、 $C(0, 1)$

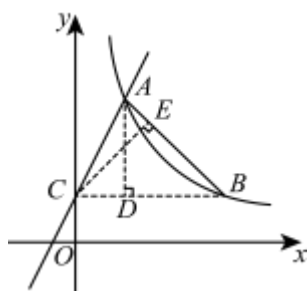
$$\therefore \begin{cases} k+b=3 \\ b=1 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k=2 \\ b=1 \end{cases}$$

$\therefore$ 一次函数表达式为： $y=2x+1$ ；

【小问 2 详解】

如图，连结 BC ，过点 A 作 $AD \perp BC$ ，垂足为点 D ，过点 C 作 $CE \perp AB$ ，垂足为点 E



$\therefore C(0, 1)$ ， $B(3, 1)$

$\therefore BC \parallel x$ 轴， $BC=3$

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$$\therefore \text{点 } A(1,3), B(3,1), AD \perp BC$$

$$\therefore \text{点 } D(1,1), AD=2, DB=2$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ADB \text{ 中, } AB = \sqrt{AD^2 + DB^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{又} \because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AD = \frac{1}{2}AB \cdot CE$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \cdot CE$$

$$\therefore CE = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \text{ 即点 } C \text{ 到线段 } AB \text{ 的距离为 } \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

【点睛】本题考查了求反比例函数值，待定系数法求一次函数表达式，勾股定理，与三角形高有关的计算，熟练掌握以上知识点并作出适当的辅助线是解题的关键.

23. 我国明朝数学家程大位写过一本数学著作《直指算法统宗》，其中有一道与荡秋千有关的数学问题是使用《西江月》词牌写的：

平地秋千未起，踏板一尺离地.

送行二步与人齐，五尺人高曾记.

仕女佳人争蹴，终朝笑语欢嬉.

良工高士素好奇，算出索长有几？

词写得很优美，翻译成现代汉语的大意是：有一架秋千，当它静止时，踏板离地 1 尺，将它往前推进 10 尺（5 尺为一步），秋千的踏板就和某人一样高，这个人的身高为 5 尺。（假设秋千的绳索拉的很直）

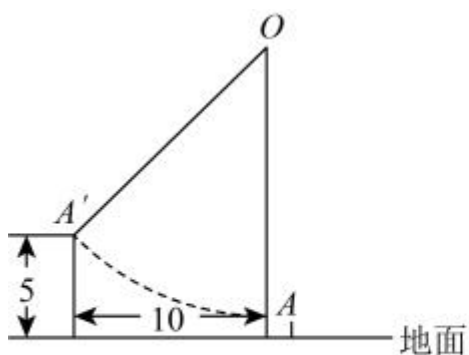


图 1

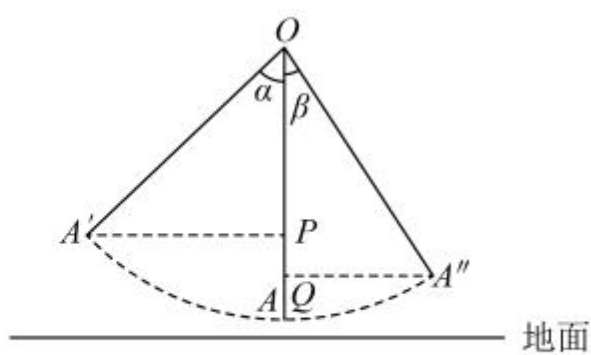


图 2

(1) 如图 1，请你根据词意计算秋千绳索 OA 的长度；

(2) 如图 2，将秋千从与竖直方向夹角为 α 的位置 OA' 释放，秋千摆动到另一侧与竖直方向夹角为 β 的地方 OA'' ，两次位置的高度差 $PQ = h$ 。根据上述条件能否求出秋千绳索 OA 的长度？如果能，请用含 α 、 β 和 h 的式子表示；如果不能，请说明理由。

【答案】 (1) 秋千绳索的长度为 14.5 尺

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$$OA = \frac{h}{\cos \beta - \cos \alpha}$$

(2) 能,

【解析】

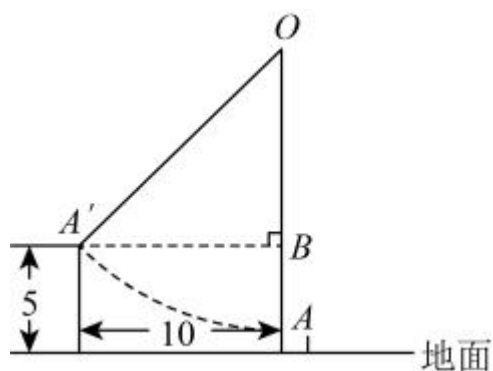
【分析】该题主要考查了勾股定理的应用以及解直角三角形的应用，解题的关键是掌握以上知识点.

(1) 如图，过点 A' 作 $A'B \perp OA$ ，垂足为点 B . 设秋千绳索的长度为 x 尺. 由题可知， $OA = OA' = x$ ， $AB = 4$ ， $A'B = 10$ ，得出 $OB = x - 4$. 在 $\text{Rt}\triangle OA'B$ 中，由勾股定理得 $x = 14.5$ ，即可求解；

(2) 由题可知， $\angle OPA' = \angle OQA'' = 90^\circ$ ， $OA' = OA'' = OA$. 在 $\text{Rt}\triangle OA'P$ 中，得出 $OP = OA \cdot \cos \alpha$ ，同理， $OQ = OA \cdot \cos \beta$. 再根据 $OQ - OP = h$ ，列等式即可求出 OA .

【小问 1 详解】

解：如图，过点 A' 作 $A'B \perp OA$ ，垂足为点 B .



设秋千绳索的长度为 x 尺.

由题可知， $OA = OA' = x$ ， $AB = 4$ ， $A'B = 10$ ，

$$\therefore OB = OA - AB = x - 4.$$

在 $\text{Rt}\triangle OA'B$ 中，由勾股定理得： $A'B^2 + OB^2 = OA'^2$

$$\therefore 10^2 + (x - 4)^2 = x^2.$$

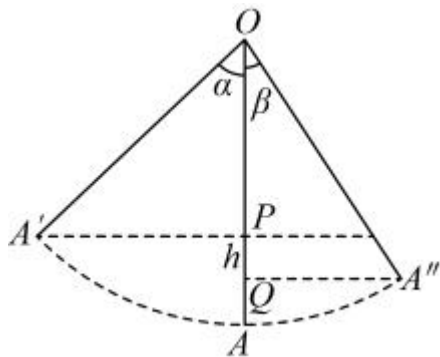
解得 $x = 14.5$.

答：秋千绳索的长度为 14.5 尺.

【小问 2 详解】

能.

由题可知， $\angle OPA' = \angle OQA'' = 90^\circ$ ， $OA' = OA'' = OA$.



在 $\text{Rt}\triangle OA'P$ 中, $OP = OA' \cdot \cos \alpha = OA \cdot \cos \alpha$,

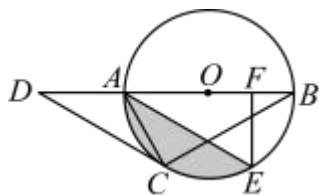
同理, $OQ = OA'' \cdot \cos \beta = OA \cdot \cos \beta$.

$$\therefore OQ - OP = h,$$

$$\therefore OA \cdot \cos \beta - OA \cdot \cos \alpha = h.$$

$$\therefore OA = \frac{h}{\cos \beta - \cos \alpha}.$$

24. 如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, AB 为直径, 过点 C 作 $\odot O$ 的切线 CD 交 BA 延长线于点 D , 点 E 为 $\widehat{CB}$ 上一点, 且 $\widehat{AC} = \widehat{CE}$.



(1) 求证: $DC \parallel AE$;

(2) 若 EF 垂直平分 OB , $DA = 3$, 求阴影部分的面积.

【答案】 (1) 见解析 (2) $3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{4}$

【解析】

【分析】 (1) 如图 1, 连结 OC . 则 $\angle OCD = 90^\circ$, 即 $\angle DCA + \angle OCA = 90^\circ$. 由 AB 为直径, 可得 $\angle ACB = 90^\circ$, 即 $\angle 1 + \angle OCA = 90^\circ$. 则 $\angle DCA = \angle 1$. 由 $OC = OB$, 可得 $\angle 1 = \angle 2$. 由 $\widehat{AC} = \widehat{CE}$, 可得 $\angle 2 = \angle 3$. 则 $\angle DCA = \angle 3$. 进而可证 $DC \parallel AE$.

(2) 如图 2, 连结 OE 、 BE . 由 EF 垂直平分 OB , 可得 $OE = BE$. 则 $\triangle OEB$ 为等边三角形. $\angle BOE = 60^\circ$, $\angle AOE = 120^\circ$. 由 $OA = OE$, 可得 $\angle OAE = \angle OEA = 30^\circ$. 由 $DC \parallel AE$, 可得 $\angle D = \angle OAE = 30^\circ$. $\angle DOC = 60^\circ$. 证明 $\triangle AOC$ 为等边三角形. 则 $\angle OCA = 60^\circ$, $OA = OC = AC$. $\angle DCA = 30^\circ$. 则

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$$\angle D = \angle DCA \quad DA = AC = OA = OC = OE = 3 \quad EF = OE \cdot \sin 60^\circ \quad S_{\triangle OAF} = \frac{1}{2} AO \cdot EF$$

$$S_{\text{扇形} OAE} = \frac{120\pi \times 3^2}{360}, \text{ 根据 } S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形} OAE} - S_{\triangle OAF}, \text{ 计算求解即可.}$$

【小问 1 详解】

证明：如图 1，连结 OC 。

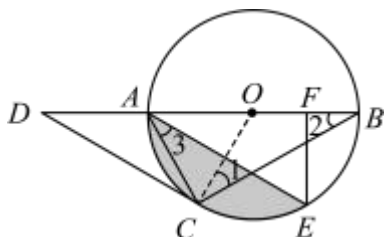


图 1

$\therefore CD$ 为 $\odot O$ 的切线,

$\therefore \angle OCD = 90^\circ$, 即 $\angle DCA + \angle OCA = 90^\circ$.

又 $\because AB$ 为直径,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$, 即 $\angle 1 + \angle OCA = 90^\circ$.

$\therefore \angle DCA = \angle 1$.

$\therefore OC = OB$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2$.

$\therefore \widehat{AC} = \widehat{CE}$,

$\therefore \angle 2 = \angle 3$.

$\therefore \angle DCA = \angle 3$.

$\therefore DC \parallel AE$.

【小问 2 详解】

解：如图 2，连结 OE 、 BE 。

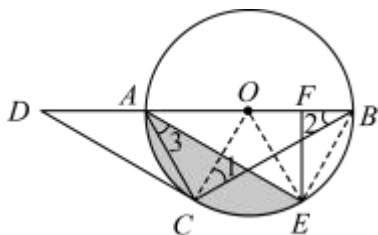


图 2

$\therefore EF$ 垂直平分 OB ,

$\therefore OE = BE$.

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

又 $\because OE = OB$,

$\therefore \triangle OEB$ 为等边三角形.

$\therefore \angle BOE = 60^\circ, \angle AOE = 120^\circ$.

$\therefore OA = OE$,

$\therefore \angle OAE = \angle OEA = 30^\circ$.

$\therefore DC \parallel AE$,

$\therefore \angle D = \angle OAE = 30^\circ$.

又 $\because \angle OCD = 90^\circ$,

$\therefore \angle DOC = 60^\circ$.

$\therefore OA = OC$,

$\therefore \triangle AOC$ 为等边三角形.

$\therefore \angle OCA = 60^\circ, OA = OC = AC$.

$\therefore \angle DCA = 30^\circ$.

$\therefore \angle D = \angle DCA$.

$\therefore DA = AC = OA = OC = OE = 3$.

$\therefore EF = OE \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore S_{\triangle OAE} = \frac{1}{2} AO \cdot EF = \frac{9\sqrt{3}}{4}$.

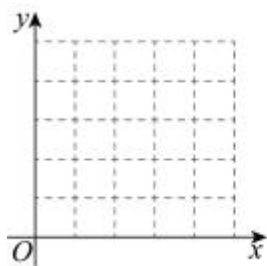
又 $\therefore S_{\text{扇形} OAE} = \frac{120\pi \times 3^2}{360} = 3\pi$,

$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形} OAE} - S_{\triangle OAE} = 3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{4}$,

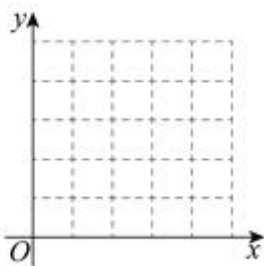
$\therefore$ 阴影部分的面积为 $3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{4}$.

【点睛】本题考查了切线的性质，直径所对的圆周角为直角，同弧或等弧所对的圆周角相等，平行线的判定与性质，等边三角形的判定与性质，垂直平分线的性质，正弦，扇形面积等知识．熟练掌握切线的性质，直径所对的圆周角为直角，同弧或等弧所对的圆周角相等，平行线的判定与性质，等边三角形的判定与性质，垂直平分线的性质，正弦，扇形面积是解题的关键．

25. 在平面直角坐标系 xOy 中，我们称横坐标、纵坐标都为整数的点为“完美点”．抛物线 $y = ax^2 - 2ax + 2a$ (a 为常数且 $a > 0$) 与 y 轴交于点 A .



备用图1



备用图2

- (1) 若 $a=1$ ，求抛物线的顶点坐标；
- (2) 若线段 OA （含端点）上的“完美点”个数大于 3 个且小于 6 个，求 a 的取值范围；
- (3) 若抛物线与直线 $y=x$ 交于 M 、 N 两点，线段 MN 与抛物线围成的区域（含边界）内恰有 4 个“完美点”，求 a 的取值范围。

【答案】 (1) $(1,1)$

(2) $\frac{3}{2} \leq a < \frac{5}{2}$

(3) $\frac{2}{5} < a \leq \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查二次函数的图象与系数的关系，二次函数图象上点的特征．数形结合解题是解题的关键．

- (1) 把 $a=1$ 代入后再将抛物线化成顶点式为 $y=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$ ，即可求顶点坐标；
- (2) 根据整点个数的范围确定点 A 纵坐标的范围；
- (3) 结合图象确定有 4 个“完美点”时 a 的最大和最小值，进而确定 a 的范围。

【小问 1 详解】

解：当 $a=1$ 时，抛物线 $y=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$ 。

∴ 顶点坐标 $(1,1)$ 。

【小问 2 详解】

令 $x=0$ ，则 $y=2a$ ，

∴ $A(0,2a)$ ，

∴ 线段 OA 上的“完美点”的个数大于 3 个且小于 6 个，

∴ “完美点”的个数为 4 个或 5 个。

∴ $a > 0$ ，

∴ 当“完美点”个数为 4 个时，分别为 $(0,0)$ ， $(0,1)$ ， $(0,2)$ ， $(0,3)$ ；

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

当“完美点”个数为 5 个时，分别为 $(0,0)$ ， $(0,1)$ ， $(0,2)$ ， $(0,3)$ ， $(0,4)$ 。

$$\therefore 3 \leq 2a < 5$$

$$\therefore a \text{ 的取值范围是 } \frac{3}{2} \leq a < \frac{5}{2}$$

【小问 3 详解】

根据 $y = ax^2 - 2ax + 2a = a(x-1)^2 + a$ ，

得抛物线的顶点坐标为 $(1,a)$ ，过点 $P(2,2a)$ ， $Q(3,5a)$ ， $R(4,10a)$ 。

$\therefore$ 抛物线与直线 $y=x$ 交于 M 、 N 两点，线段 MN 与抛物线围成的区域（含边界）内恰有 4 个“完美点”，

显然，“完美点” $(1,1)$ ， $(2,2)$ ， $(3,3)$ 符合题意。

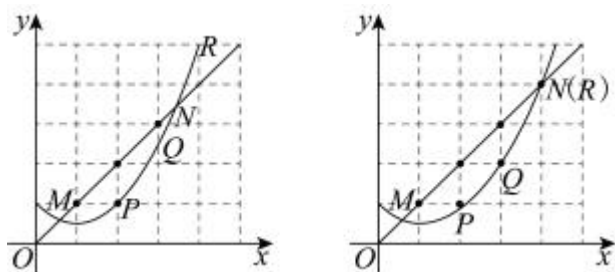
下面讨论抛物线经过 $(2,1)$ ， $(3,2)$ 的两种情况：

①当抛物线经过 $(2,1)$ 时，解得 $a = \frac{1}{2}$ 此时， $P(2,1)$ ， $Q(3, \frac{5}{2})$ ， $R(4,5)$ 。

如图所示，满足题意的“完美点”有 $(1,1)$ ， $(2,1)$ ， $(2,2)$ ， $(3,3)$ ，共 4 个。

②当抛物线经过 $(3,2)$ 时，解得 $a = \frac{2}{5}$ 此时， $P(2, \frac{4}{5})$ ， $Q(3,2)$ ， $R(4,4)$ 。

如图所示，满足题意的“完美点”有 $(1,1)$ ， $(2,1)$ ， $(2,2)$ ， $(3,2)$ ， $(3,3)$ ， $(4,4)$ ，共 6 个。



$$\therefore a \text{ 的取值范围是 } \frac{2}{5} < a \leq \frac{1}{2}$$

26. 在一堂平面几何专题复习课上，刘老师先引导学生解决了以下问题：

【问题情境】

如图 1，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，点 D 、 E 在边 BC 上，且 $\angle DAE = 45^\circ$ ， $BD = 3$ ， $CE = 4$ ，求 DE 的长。

解：如图 2，将 $\triangle ABD$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle ACD'$ ，连结 ED' 。

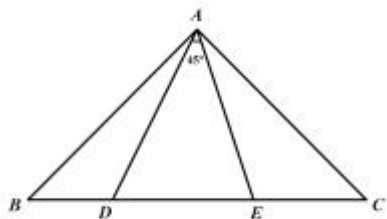


图 1

由旋转的特征得 $\angle BAD = \angle CAD'$, $\angle B = \angle ACD'$, $AD = AD'$, $BD = CD'$.

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ, \angle DAE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle EAC = 45^\circ.$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD',$$

$$\therefore \angle CAD' + \angle EAC = 45^\circ, \text{ 即 } \angle EAD' = 45^\circ.$$

$$\therefore \angle DAE = \angle D'AE.$$

在 $\triangle DAE$ 和 $\triangle D'AE$ 中,

$$AD = AD', \angle DAE = \angle D'AE, AE = AE,$$

$$\therefore \text{①}.$$

$$\therefore DE = D'E.$$

$$\text{又 } \angle ECD' = \angle ECA + \angle ACD' = \angle ECA + \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ECD' \text{ 中, ②}.$$

$$\therefore CD' = BD = 3, CE = 4,$$

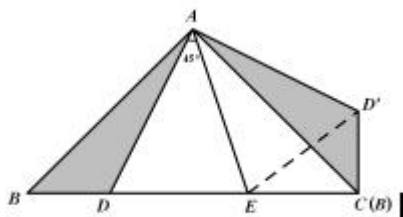


图 2

$$\therefore DE = D'E = \text{③}.$$

【问题解决】

上述问题情境中, “①”处应填: _____; “②”处应填: _____; “③”处应填: _____.

刘老师进一步谈到: 图形的变化强调从运动变化的观点来研究, 只要我们抓住了变化中的不变量, 就能以不变应万变.

【知识迁移】

如图 3, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E 、 F 分别在边 BC 、 CD 上, 满足 $\triangle CEF$ 的周长等于正方形 $ABCD$ 的周长的一半, 连结 AE 、 AF , 分别与对角线 BD 交于 M 、 N 两点. 探究 BM 、 MN 、 DN 的数量关系并

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】
证明.

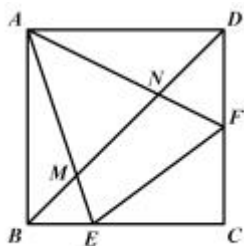


图 3

【拓展应用】

如图 4, 在矩形 $ABCD$ 中, 点 E 、 F 分别在边 BC 、 CD 上, 且 $\angle EAF = \angle CEF = 45^\circ$. 探究 BE 、 EF 、 DF 的数量关系: _____ (直接写出结论, 不必证明).

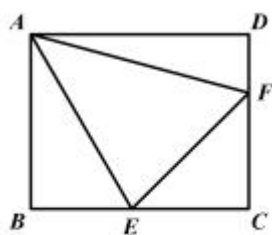


图 4

【问题再探】

如图 5, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 4$, $BC = 3$, 点 D 、 E 在边 AC 上, 且 $\angle DBE = 45^\circ$. 设 $AD = x$, $CE = y$, 求 y 与 x 的函数关系式.

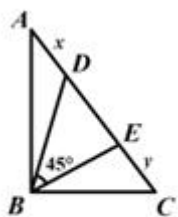


图 5

【答案】 【问题解决】 ① $\triangle ADE \cong \triangle AD'E$; ② $EC^2 + CD'^2 = ED'^2$; ③ 5; 【知识迁移】

$DN^2 + BM^2 = MN^2$, 见解析; 【拓展应用】 $2BE^2 + 2DF^2 = EF^2$; 【问题再探】 $y = \frac{21x - 60}{5x - 28}$

【解析】

【分析】 (1) 【问题解决】 根据题中思路解答即可;

(2) 【知识迁移】 如图, 将 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转 90° , 得到 $\triangle ADF'$. 过点 D 作 $DH \perp BD$ 交边 AF' 于点 H , 连结 NH . 由旋转的特征得 $AE = AF'$, $BE = DF'$, $\angle BAE = \angle DAF'$. 结合题意得 $EF = DF + BE = DF + DF' = F'F$. 证明 $\triangle AEF \cong \triangle AF'F$, 得出 $\angle EAF = \angle F'AF$. 根据正方形性质得

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

出 $\angle ABD = \angle ADB = 45^\circ$. 结合 $DH \perp BD$, 得出 $\angle ADH = \angle HDB - \angle ADB = 45^\circ$. 证明

$\triangle ABM \cong \triangle ADH$, 得出 $AM = AH, BM = DH$. 证明 $\triangle AMN \cong \triangle AHN$. 得出 $MN = HN$. 在 $Rt\triangle HND$ 中, 根据勾股定理即可求解;

(3) 【拓展应用】如图所示, 延长 EF 交 AB 延长线于 M 点, 交 AD 延长线于 N 点, 将 $\triangle ADF$ 绕着点 A 顺时针旋转 90° , 得到 $\triangle AGH$, 连接 HM, HE . 则 $\triangle ADF \cong \triangle AGH$. 则

$DF = GH, AG = AD, AF = AH$, $\angle DAF = \angle HAG$, 根据 $\angle EAF = 45^\circ$, 证明 $\triangle AEH \cong \triangle AEF$, 得出

$EF = HE$, 过点 H 作 $HO \perp CB$ 交 CB 于点 O , 过点 H 作 $HG \perp BM$ 交 BM 于点 M , 则四边形 $OHGB$ 为

矩形. 得出 $OH = BG, OB = HG$, 证明 $\triangle BME, \triangle DNF, \triangle CEF, \triangle AMN$ 是等腰直角三角形, 得出

$GM = DN = DF = HG$, $\angle HME = 90^\circ$, 在 $Rt\triangle OHE$ 中, 根据勾股定理即可证明;

(4) 【问题再探】如图, 将 $\triangle BEC$ 绕点 B 逆时针旋转 90° , 得到 $\triangle BE'C'$, 连结 $E'D$. 过点 E 作 $EG \perp BC$, 垂足为点 G , 过点 E' 作 $E'G' \perp BC'$, 垂足为 G' . 过点 E' 作 $E'F \parallel BA$, 过点 D 作

$DF \parallel BC$ 交 AB 于点 $H, E'F$ 、 DF 交于点 F . 由旋转的特征得

$BE = BE', \angle CBE = \angle C'BE', EG = E'G', BG = BG'$. 根据 $\angle ABC = 90^\circ, \angle DBE = 45^\circ$, 得出

$\angle DBE' = 45^\circ$, 证明 $\triangle EBD \cong \triangle E'BD$, 得出 $DE = DE'$, 根据勾股定理算出 AC , 根据

$AD = x, CE = y$, 表示出 $DE' = 5 - x - y$, 证明 $\triangle AHD \sim \triangle ABC$, 根据相似三角形的性质表示出

$AH = \frac{4}{5}x, HD = \frac{3}{5}x$, $HB = 4 - \frac{4}{5}x$, $EG = \frac{4}{5}y, GC = \frac{3}{5}y$, $E'G' = \frac{4}{5}y, BG' = 3 - \frac{3}{5}y$, 证

明四边形 $FE'G'H$ 为矩形. 得出 $\angle F = 90^\circ, FH = \frac{4}{5}y, DF = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y$, $FE' = 1 - \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y$, 在

$Rt\triangle E'FD$ 中, 根据勾股定理即可求解;

【详解】解: (1) 【问题解决】解: 如图 2, 将 $\triangle ABD$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle ACD'$, 连结 ED' .

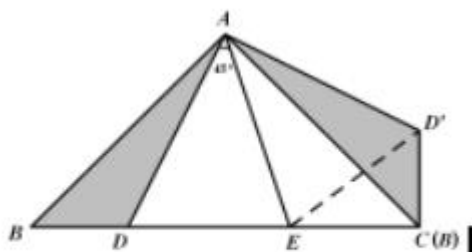


图 2

由旋转的特征得 $\angle BAD = \angle CAD'$, $\angle B = \angle ACD'$, $AD = AD'$, $BD = CD'$.

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ, \angle DAE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle EAC = 45^\circ.$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD',$$

$$\therefore \angle CAD' + \angle EAC = 45^\circ, \text{ 即 } \angle EAD' = 45^\circ.$$

$$\therefore \angle DAE = \angle D'AE.$$

在 $\triangle DAE$ 和 $\triangle D'AE$ 中, $AD = AD', \angle DAE = \angle D'AE, AE = AE$,

$$\therefore \textcircled{1} \triangle ADE \cong \triangle AD'E.$$

$$\therefore DE = D'E.$$

$$\text{又 } \therefore \angle ECD' = \angle ECA + \angle ACD' = \angle ECA + \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{在 Rt} \triangle ECD' \text{ 中, } \textcircled{2} EC^2 + CD'^2 = ED'^2.$$

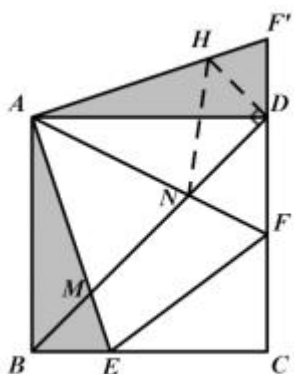
$$\therefore CD' = BD = 3, CE = 4,$$

$$\therefore DE = D'E = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \textcircled{3}.$$

(2) 【知识迁移】 $DN^2 + BM^2 = MN^2$.

证明：如图，将 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转 90° ，得到 $\triangle ADF'$ 。

过点 D 作 $DH \perp BD$ 交边 AF' 于点 H ，连结 NH 。



由旋转的特征得 $AE = AF', BE = DF', \angle BAE = \angle DAF'$ 。

由题意得 $EF + EC + FC = DC + BC = DF + FC + EC + BE$,

$$\therefore EF = DF + BE = DF + DF' = F'F.$$

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AF'F$ 中, $AE = AF', EF = F'F, AF = AF$,

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle AF'F (SSS).$$

$$\therefore \angle EAF = \angle F'AF.$$

又 $\therefore BD$ 为正方形 $ABCD$ 的对角线,

$$\therefore \triangle AEH \cong \triangle AEF \text{ (SAS)}$$

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$$\therefore EF = HE,$$

过点 H 作 $HO \perp CB$ 交 CB 于点 O , 过点 H 作 $HG \perp BM$ 交 BM 于点 M , 则四边形 $OHGB$ 为矩形.

$$\therefore OH = BG, OB = HG,$$

$$\because \angle CEF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CEF = \angle CFE = \angle DFN = \angle DNF = \angle BME = \angle BEM = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle BME, \triangle DNF, \triangle CEF, \triangle AMN$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore CE = CF, BE = BM, DN = DF, AN = AM,$$

$$\therefore AM - AG = AN - AD,$$

$$\therefore GM = DN = DF = HG,$$

$$\therefore \angle HMG = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle HME = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ,$$

在 $Rt\triangle OHE$ 中, $OE^2 + OH^2 = HE^2$, $(OB + BE)^2 + BG^2 = EH^2$,

$$\therefore (GH + BE)^2 + BG^2 = EH^2,$$

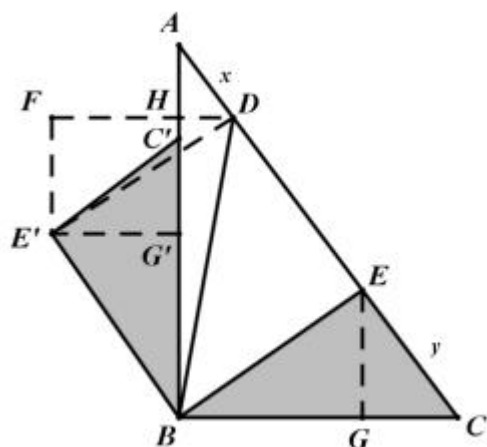
$$\text{即 } (GH + BE)^2 + (BM - GM)^2 = EH^2,$$

$$\text{又 } \therefore EF = HE, DF = GH = GM, BE = BM,$$

$$\therefore (GH + BE)^2 + (BE - GH)^2 = EF^2,$$

$$\text{即 } 2(DF^2 + BE^2) = EF^2,$$

(4) 【问题再探】如图, 将 $\triangle BEC$ 绕点 B 逆时针旋转 90° , 得到 $\triangle BE'C'$, 连结 $E'D$. 过点 E 作 $EG \perp BC$, 垂足为点 G , 过点 E' 作 $E'G' \perp BC'$, 垂足为 G' . 过点 E' 作 $E'F \parallel BA$, 过点 D 作 $DF \parallel BC$ 交 AB 于点 H , $E'F$ 、 DF 交于点 F .



【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

由旋转的特征得 $BE = BE', \angle CBE = \angle C'BE', EG = E'G', BG = BG'$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ, \angle DBE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CBE + \angle DBA = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle C'BE' + \angle DBA = 45^\circ, \text{ 即 } \angle DBE' = 45^\circ,$$

在 $\triangle EBD$ 和 $\triangle E'BD$ 中, $BE = BE', \angle DBE = \angle DBE', BD = BD$,

$$\therefore \triangle EBD \cong \triangle E'BD (SAS),$$

$$\therefore DE = DE',$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ, AB = 4, BC = 3,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5,$$

$$\text{又 } \therefore AD = x, CE = y,$$

$$\therefore DE' = DE = 5 - x - y,$$

$$\therefore DF \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADH = \angle C, \angle AHD = \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AHD \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{AH}{AB} = \frac{HD}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{x}{5}, \text{ 即 } AH = \frac{4}{5}x, HD = \frac{3}{5}x,$$

$$\therefore HB = AB - AH = 4 - \frac{4}{5}x,$$

$$\text{同理可得 } EG = \frac{4}{5}y, GC = \frac{3}{5}y.$$

$$\therefore E'G' = \frac{4}{5}y, BG' = BG = 3 - \frac{3}{5}y,$$

$$\therefore E'G' \perp AB, \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore E'G' \parallel BC \parallel FD,$$

$$\text{又 } \therefore E'F \parallel AB, \angle FHG' = \angle AHD = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $FE'G'H$ 为矩形.

$$\therefore \angle F = 90^\circ, FH = E'G' = \frac{4}{5}y, DF = DH + FH = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y,$$

$$FE' = HG' = HB - BG' = 4 - \frac{4}{5}x - \left(3 - \frac{3}{5}y\right) = 1 - \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y,$$

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

在 $Rt\triangle E'FD$ 中, $E'F^2 + DF^2 = E'D^2$.

$$\therefore \left(1 - \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y\right)^2 + \left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y\right)^2 = (5 - x - y)^2$$

解得 $y = \frac{21x - 60}{5x - 28}$.

【点睛】本题是四边形的综合题，考查的是旋转变换的性质、矩形的性质和判定、正方形的性质和判定、勾股定理、等腰直角三角形的性质和判定、全等三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，灵活运用旋转变换作图，掌握以上知识点是解题的关键.