

2024 年长春市初中学业水平考试

数学

本试卷包括三道大题，共 6 页. 全卷满分为 120 分，考试时间为 120 分钟. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，并将条形码准确粘贴在条形码区域内.
2. 答题时，考生务必按照考试要求在答题卡上的指定区域内作答，在草稿纸、试卷上答题无效.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 根据有理数加法法则，计算 $2+(-3)$ 过程正确的是 ()

A. $+(3+2)$ B. $+(3-2)$ C. $-(3+2)$ D. $-(3-2)$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了有理数的加法，掌握“将两个数的绝对值相减,结果的符号与绝对值较大的数的符号相同”成为解题的关键.

根据将两个数的绝对值相减,结果的符号与绝对值较大的数的符号相同即可解答.

【详解】解： $2+(-3) = -(3-2)$.

故选 D.

2. 南湖公园是长春市著名旅游景点之一，图①是公园中“四角亭”景观的照片，图②是其航拍照片，则图③是“四角亭”景观的 ().



图 ①

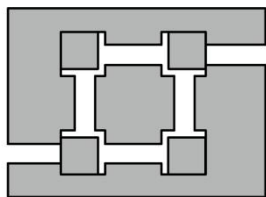


图 ②

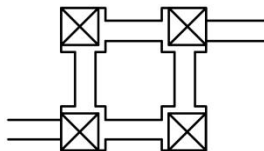


图 ③

- A. 主视图 B. 俯视图 C. 左视图 D. 右视图

【答案】B

【解析】

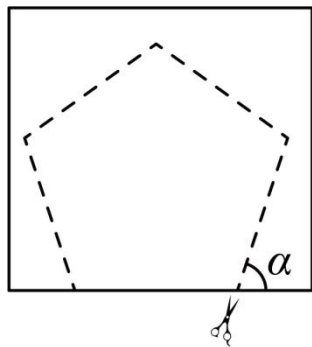
【分析】本题主要考查了几何体的三视图，熟练掌握三视图的定义是解决本题的关键.

根据三视图主视图、俯视图、左视图的定义即可解答.

【详解】解：由题意可知图③是从“四角亭”上方看到的，即为俯视图.

故选 B.

3. 在剪纸活动中，小花同学想用一张矩形纸片剪出一个正五边形，其中正五边形的一条边与矩形的边重合，如图所示，则 $\angle \alpha$ 的大小为 ()



A. 54°

B. 60°

C. 70°

D. 72°

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了多边形内角与外角，正多边形的内角和，熟练掌握正多边形的内角和公式是解题的关键.

根据正五边形的内角和公式和邻补角的性质即可得到结论.

【详解】解： $\angle \alpha = 180^\circ - \frac{(5-2) \times 180^\circ}{5} = 72^\circ$,

故选：D.

4. 下列运算一定正确的是 ()

A. $2a \cdot 3a = 6a$

B. $a^2 \cdot a^3 = a^6$

C. $(ab)^2 = a^2b^2$

D. $(a^3)^2 = a^5$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了单项式乘单项式、同底数幂的乘法以及幂的乘方与积的乘方，掌握相关运算法则是解答本题的关键.

根据单项式乘单项式的运算法则计算并判断 A；根据同底数幂的乘法法则计算并判断 B；根据积的乘方运算法则计算并判断 C；根据幂的乘方运算法则计算并判断 D.

【详解】解：A. $2a \cdot 3a = 6a^2$ ，故本选项不符合题意；

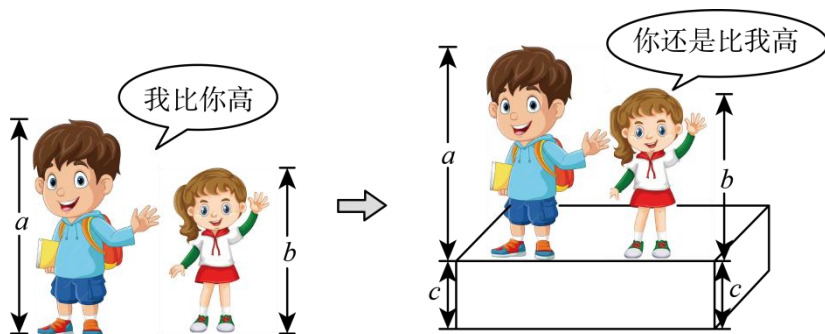
B. $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ，故本选项不符合题意；

C. $(ab)^2 = a^2b^2$ ，故本选项符合题意；

D. $(a^3)^2 = a^6$ ，故本选项不符合题意；

故选：C.

5. 不等关系在生活中广泛存在. 如图, a 、 b 分别表示两位同学的身高, c 表示台阶的高度. 图中两人的对话体现的数学原理是 ()



A. 若 $a > b$, 则 $a + c > b + c$

B. 若 $a > b$, $b > c$, 则 $a > c$

C. 若 $a > b$, $c > 0$, 则 $ac > bc$

D. 若 $a > b$, $c > 0$, 则 $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

【答案】A

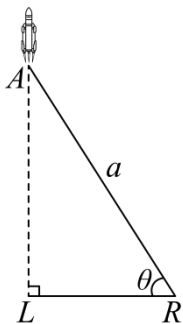
【解析】

【分析】本题主要考查不等式的性质，熟记不等式性质是解决问题的关键. 根据不等式的性质即可解答.

【详解】解：由作图可知： $a > b$ ，由右图可知： $a + c > b + c$ ，即 A 选项符合题意.

故选：A.

6. 2024 年 5 月 29 日 16 时 12 分，“长春净月一号”卫星搭乘谷神星一号火箭在黄海海域成功发射. 当火箭上升到点 A 时，位于海平面 R 处的雷达测得点 R 到点 A 的距离为 a 千米，仰角为 θ ，则此时火箭距海平面的高度 AL 为 ()



A. $a \sin \theta$ 千米

B. $\frac{a}{\sin \theta}$ 千米

C. $a \cos \theta$ 千米

D. $\frac{a}{\cos \theta}$ 千米

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查解直角三角形，熟记锐角三角函数的定义是解题关键，根据锐角的正弦函数的定义即可

求解

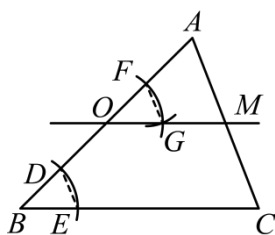
【详解】解：由题意得： $\sin \theta = \frac{AL}{AR} = \frac{AL}{a}$

$\therefore AL = a \sin \theta$ 千米

故选：A

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， O 是边 AB 的中点，按下列要求作图：

- ①以点 B 为圆心、适当长为半径画弧，交线段 BO 于点 D ，交 BC 于点 E ；
- ②以点 O 为圆心、 BD 长为半径画弧，交线段 OA 于点 F ；
- ③以点 F 为圆心、 DE 长为半径画弧，交前一条弧于点 G ，点 G 与点 C 在直线 AB 同侧；
- ④作直线 OG ，交 AC 于点 M 。下列结论不一定成立的是（ ）



A. $\angle AOM = \angle B$

B. $\angle OMC + \angle C = 180^\circ$

C. $AM = CM$

D. $OM = \frac{1}{2} AB$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了作一个角等于已知角，平行线的性质和判定，平行线分线段成比例定理，解题的关键是熟练掌握相关的性质，先根据作图得出 $\angle AOM = \angle B$ ，根据平行线的判定得出 $OM \parallel BC$ ，根据平行线的性质得出 $\angle OMC + \angle C = 180^\circ$ ，根据平行线分线段成比例得出 $\frac{AM}{CM} = \frac{AO}{OB} = 1$ ，即可得出 $AM = CM$ 。

【详解】解：A. 根据作图可知： $\angle AOM = \angle B$ 一定成立，故 A 不符合题意；

B. $\because \angle AOM = \angle B$,

$\therefore OM \parallel BC$,

$\therefore \angle OMC + \angle C = 180^\circ$ 一定成立，故 B 不符合题意；

C. $\because O$ 是边 AB 的中点，

$\therefore AO = BO$,

$\therefore OM \parallel BC$,

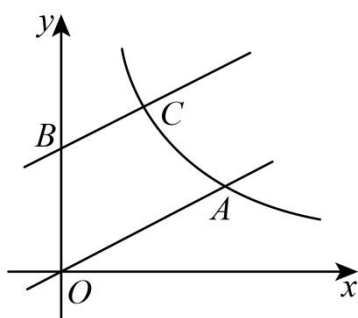
$$\therefore \frac{AM}{CM} = \frac{AO}{OB} = 1,$$

$\therefore AM = CM$ 一定成立，故 C 不符合题意；

D. $OM = \frac{1}{2}AB$ 不一定成立，故 D 符合题意.

8. 如图，在平面直角坐标系中，点 O 是坐标原点，点 $A(4,2)$ 在函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0, x > 0)$ 的图象上. 将直线 OA 沿 y 轴向上平移，平移后的直线与 y 轴交于点 B ，与函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0, x > 0)$ 的图象交于点 C . 若

$BC = \sqrt{5}$ ，则点 B 的坐标是 ()



A. $(0, \sqrt{5})$

B. $(0, 3)$

C. $(0, 4)$

D. $(0, 2\sqrt{5})$

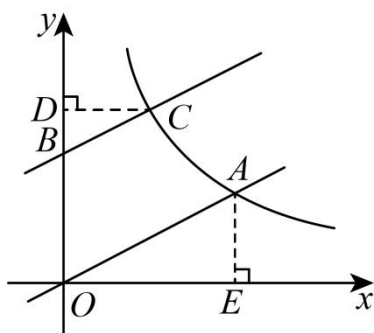
【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查反比例函数、解直角三角形、平移的性质等知识点，掌握数形结合思想成为解题的关键.

如图：过点 A 作 x 轴的垂线交 x 轴于点 E ，过点 C 作 y 轴的垂线交 y 轴于点 D ，先根据点 A 坐标计算出 $\sin \angle OAE$ 、 k 值，再根据平移、平行线的性质证明 $\angle DBC = \angle OAE$ ，进而根据 $\sin \angle DBC = \frac{CD}{BC} = \sin \angle OAE$ 求出 CD ，最后代入反比例函数解析式取得点 C 的坐标，进而确定 $CD = 2$ ， $OD = 4$ ，再运用勾股定理求得 BD ，进而求得 OB 即可解答.

【详解】解：如图，过点 A 作 x 轴的垂线交 x 轴于点 E ，过点 C 作 y 轴的垂线交 y 轴于点 D ，则 $AE \parallel y$ 轴，



$$\therefore A(4,2),$$

$$\therefore OE=4, \quad OA=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5},$$

$$\therefore \sin \angle OAE = \frac{OE}{OA} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}.$$

$\therefore A(4,2)$ 在反比例函数的图象上,

$$\therefore k=4 \times 2=8.$$

$\therefore$ 将直线 OA 向上平移若干个单位长度后得到直线 BC ,

$$\therefore OA \parallel BC,$$

$$\therefore \angle OAE = \angle BOA,$$

$$\therefore AE \parallel y \text{ 轴},$$

$$\therefore \angle DBC = \angle BOA,$$

$$\therefore \angle DBC = \angle OAE,$$

$$\therefore \sin \angle DBC = \frac{CD}{BC} = \sin \angle OAE = \frac{2}{5}\sqrt{5},$$

$$\therefore \frac{CD}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}, \text{ 解得: } CD=2, \text{ 即点 } C \text{ 的横坐标为 } 2,$$

$$\text{将 } x=2 \text{ 代入 } y=\frac{8}{x}, \text{ 得 } y=4,$$

$$\therefore C \text{ 点的坐标为 } (2,4),$$

$$\therefore CD=2, OD=4,$$

$$\therefore BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = 1,$$

$$\therefore OB = OD - BD = 4 - 1 = 3,$$

$$\therefore B(0,3)$$

故选: B.

二、填空题: 本题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分.

9. 单项式 $-2a^2b$ 的次数是_____.

【答案】 3

【解析】

【分析】此题考查单项式有关概念, 根据单项式次数的定义来求解, 解题的关键是需灵活掌握单项式的系数和次数的定义, 单项式中数字因数叫做单项式的系数, 所有字母的指数和叫做这个单项式的次数.

【详解】单项式 $-2a^2b$ 的次数是： $2+1=3$ ，

故答案为： 3 .

10. 计算： $\sqrt{12}-\sqrt{3}=\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 利用二次根式的性质化简，再相减.

【详解】 解： $\sqrt{12}-\sqrt{3}$

$$=2\sqrt{3}-\sqrt{3}$$

$$=\sqrt{3}$$

故答案是： $\sqrt{3}$.

【点睛】 本题考查了二次根式的减法，解题的关键是掌握二次根式的化简及性质.

11. 若抛物线 $y=x^2-x+c$ (c 是常数) 与 x 轴没有交点，则 c 的取值范围是_____.

【答案】 $c>\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的交点问题，掌握抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴没有交点与 $x^2-x+c=0$ 没有实数根是解题的关键.

由抛物线与 x 轴没有交点，运用根的判别式列出关于 c 的一元一次不等式求解即可.

【详解】 解： $\because$ 抛物线 $y=x^2-x+c$ 与 x 轴没有交点，

$\therefore x^2-x+c=0$ 没有实数根，

$$\therefore \Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times c = 1 - 4c < 0, \quad c > \frac{1}{4}.$$

故答案为： $c > \frac{1}{4}$.

12. 已知直线 $y=kx+b$ (k 、 b 是常数) 经过点 $(1,1)$ ，且 y 随 x 的增大而减小，则 b 的值可以是_____ . (写出一个即可)

【答案】 2 (答案不唯一)

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数图象上点的坐标特征以及一次函数的性质，牢记“ $k > 0$ ， y 随 x 的增大而增大； $k < 0$ ， y 随 x 的增大而减小”是解题的关键。

利用一次函数图象上点的坐标特征，可得出 $1 = k + b$ ，由 y 随 x 的增大而减小，利用一次函数的性质，可得出 $k < 0$ ，若代入 $k = -1$ ，求出 b 值即可。

【详解】 解：∵ 直线 $y = kx + b$ (k 、 b 是常数) 经过点 $(1, 1)$ ，

$$\therefore 1 = k + b.$$

∵ y 随 x 的增大而减小，

$$\therefore k < 0,$$

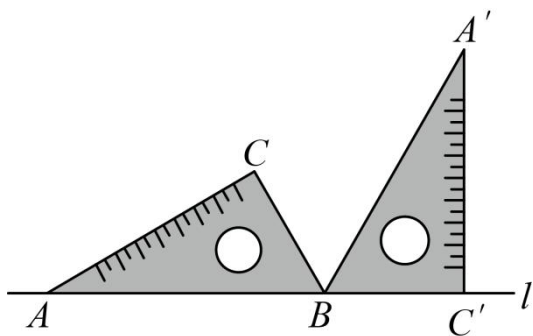
$$\text{当 } k = -1 \text{ 时, } 1 = -1 + b,$$

$$\text{解得: } b = 2,$$

$$\therefore b \text{ 的值可以是 } 2.$$

故答案为：2 (答案不唯一)

13. 一块含 30° 角的直角三角板 ABC 按如图所示的方式摆放，边 AB 与直线 l 重合， $AB = 12 \text{ cm}$ ．现将该三角板绕点 B 顺时针旋转，使点 C 的对应点 C' 落在直线 l 上，则点 A 经过的路径长至少为 _____ cm ．(结果保留 π)



【答案】 $\frac{20\pi}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了旋转的性质、弧长公式等知识点，掌握弧长公式成为解题的关键。

由旋转的性质可得 $\angle ABC = \angle A'BC = 60^\circ$ ，即 $\angle A'BA = 120^\circ$ ，再根据点 A 经过的路径长至少为以 B 为圆心，以 AB 为半径的圆弧的长即可解答。

【详解】 解：∵ 将该三角板绕点 B 顺时针旋转，使点 C 的对应点 C' 落在直线 l 上，

$$\therefore \angle ABC = \angle A'BC = 60^\circ, \text{ 即 } \angle A'BA = 120^\circ,$$

∴点A经过的路径长至少为 $\frac{120^\circ \cdot \pi \cdot 10}{180^\circ} = \frac{20\pi}{3}$.

故答案为: $\frac{20\pi}{3}$.

14. 如图, AB 是半圆的直径, AC 是一条弦, D 是 $\widehat{AC}$ 的中点, $DE \perp AB$ 于点 E , 交 AC 于点 F , DB 交 AC 于点 G , 连结 AD . 给出下面四个结论:

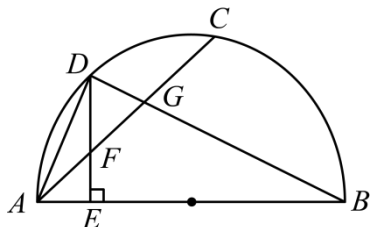
① $\angle ABD = \angle DAC$;

② $AF = FG$;

③当 $DG = 2$, $GB = 3$ 时, $FG = \frac{\sqrt{14}}{2}$;

④当 $\widehat{BD} = 2\widehat{AD}$, $AB = 6$ 时, $\triangle DFG$ 的面积是 $\sqrt{3}$.

上述结论中, 正确结论的序号有_____.



【答案】①②③

【解析】

【分析】如图: 连接 DC , 由圆周角定理可判定①; 先说明 $\angle BDE = \angle AGD$ 、 $\angle ADE = \angle DAC$ 可得

$DF = FG$ 、 $AF = FD$, 即 $AF = FG$ 可判定②; 先证明 $\triangle ADG \sim \triangle BDA$ 可得 $\frac{AD}{BD} = \frac{GD}{AD}$, 即

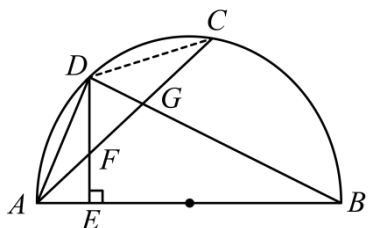
$\frac{AD}{DG + BG} = \frac{GD}{AD}$, 代入数据可得 $AD = \sqrt{10}$, 然后运用勾股定理可得 $AG = \sqrt{14}$, 再结合 $AF = FG$ 即可判

定③; 如图: 假设半圆的圆心为 O , 连接 OD, CO, CD , 易得 $\angle AOD = \angle DOC = 60^\circ$, 从而证明

$\triangle AOD, \triangle ODC$ 是等边三角形, 即 $ADCO$ 是菱形, 然后得到 $\angle DAC = \angle OAC = 30^\circ$, 再解直角三角形可

得 $DG = 2\sqrt{3}$, 根据三角形面积公式可得 $S_{\triangle ADG} = 6\sqrt{3}$, 最后根据三角形的中线将三角形平分即可判定④.

【详解】解: 如图: 连接 DC ,



$\therefore D$ 是 $\widehat{AC}$ 的中点,

$$\therefore \overline{AD} = \overline{DC},$$

$\therefore \angle ABD = \angle DAC$, 即①正确;

$\therefore AB$ 是直径,

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC + \angle AGD = 90^\circ,$$

$$\therefore DE \perp AB$$

$$\therefore \angle BDE + \angle ABD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle DAC,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle AGD,$$

$$\therefore DF = FG,$$

$$\therefore \angle BDE + \angle ABD = 90^\circ, \quad \angle BDE + \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle ABD,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle DAC,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle DAC,$$

$$\therefore AF = FD,$$

$$\therefore AF = FG, \text{即②正确};$$

在 $\triangle ADG$ 和 $\triangle BDA$,

$$\begin{cases} \angle ADG = \angle BDA = 90^\circ \\ \angle DAG = \angle DBA \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ADG \sim \triangle BDA,$$

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{GD}{AD}, \text{即} \frac{AD}{DG + BG} = \frac{GD}{AD},$$

$$\therefore \frac{AD}{2+3} = \frac{2}{AD}, \text{即} AD = \sqrt{10},$$

$$\therefore AG = \sqrt{AD^2 + DG^2} = \sqrt{14},$$

$$\therefore AF = FG,$$

$$\therefore FG = \frac{1}{2} AG = \frac{\sqrt{14}}{2}, \text{即③正确};$$

如图: 假设半圆的圆心为 O , 连接 OD, CO, CD ,

$$\therefore x = \sqrt{2},$$

$$\therefore \text{原式} = 2$$

16. 2021 年吉林省普通高中开始施行新高考选科模式，此模式有若干种学科组合，每位高中生可根据自己的实际情况选择一种。一对双胞胎姐妹考入同一所高中且选择了相同组合，该校要将所有选报这种组合的学生分成 A、B、C 三个班，其中每位学生被分到这三个班的机会均等。用画树状图（或列表）的方法，求这对双胞胎姐妹被分到同一个班的概率。

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查列表法与树状图法、概率公式等知识点，熟练掌握列表法与树状图法以及概率公式是解答本题的关键。

先列表确定出所有等可能的结果数以及这对双胞胎姐妹被分到同一个班的结果数，然后再利用概率公式计算即可。

【详解】 解：列表如下：

	A	B	C
A	A, A	A, B	A, C
B	B, A	B, B	B, C
C	C, A	C, B	C, C

共有 9 种等可能的结果，其中这对双胞胎姐妹被分到同一个班的结果有 3 种，

所以这对双胞胎姐妹被分到同一个班的概率为 $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ 。

17. 《九章算术》被历代数学家尊为“算经之首”。下面是其卷中记载的关于“盈不足”的一个问题：今有共买金，人出四百，盈三千四百；人出三百，盈一百。问人数、金价各几何？这段话的意思是：今有人合伙买金，每人出 400 钱，会剩余 3400 钱；每人出 300 钱，会剩余 100 钱。合伙人数、金价各是多少？请解决上述问题。

【答案】 共 33 人合伙买金，金价为 9800 钱

【解析】

【分析】 设共 x 人合伙买金，金价为 y 钱，根据“每人出 400 钱，会剩余 3400 钱；每人出 300 钱，会剩余 100 钱”，即可得出关于 x, y 的二元一次方程组，解之即可得出结论。

【详解】解：设共 x 人合伙买金，金价为 y 钱，

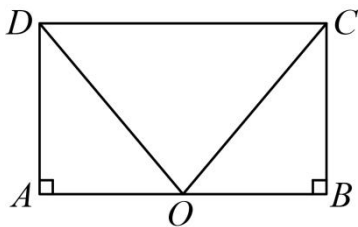
$$\text{依题意得：} \begin{cases} 400x - 3400 = y \\ 300x - 100 = y \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} x = 33 \\ y = 9800 \end{cases}.$$

答：共 33 人合伙买金，金价为 9800 钱。

【点睛】本题考查了二元一次方程组的应用以及数学常识，找准等量关系，正确列出二元一次方程组是解题的关键。

18. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle A = \angle B = 90^\circ$ ， O 是边 AB 的中点， $\angle AOD = \angle BOC$ 。求证：四边形 $ABCD$ 是矩形。



【答案】证明见解析。

【解析】

【分析】本题考查全等三角形的判定与性质、平行四边形的判定及矩形的判定，熟练掌握判定定理是解题关键。利用 SAS 可证明 $\triangle AOD \cong \triangle BOC$ ，得出 $AD = BC$ ，根据 $\angle A = \angle B = 90^\circ$ 得出 $AD \parallel BC$ ，即可证明四边形 $ABCD$ 是平行四边形，进而根据有一个角是直角的平行四边形是矩形即可证明四边形 $ABCD$ 是矩形。

【详解】证明： $\because O$ 是边 AB 的中点，

$$\therefore OA = OB,$$

$$\text{在 } \triangle AOD \text{ 和 } \triangle BOC \text{ 中, } \begin{cases} \angle A = \angle B = 90^\circ \\ OA = OB \\ \angle AOD = \angle BOC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AOD \cong \triangle BOC,$$

$$\therefore AD = BC,$$

$$\because \angle A = \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

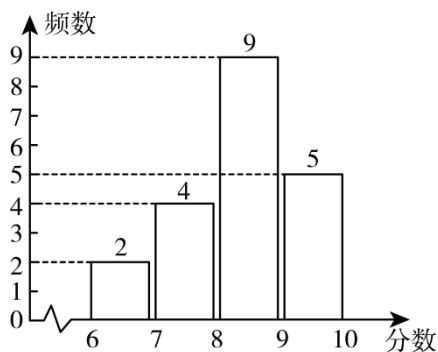
$$\therefore \text{四边形 } ABCD \text{ 是平行四边形,}$$

$$\because \angle A = \angle B = 90^\circ,$$

∴ 四边形 $ABCD$ 是矩形.

19. 某校为调研学生对本校食堂的满意度, 从初中部和高中部各随机抽取 20 名学生对食堂进行满意度评分 (满分 10 分), 将收集到的评分数据进行整理、描述和分析. 下面给出了部分信息:

a. 高中部 20 名学生所评分数的频数分布直方图如下图: (数据分成 4 组: $6 \leq x < 7$, $7 \leq x < 8$, $8 \leq x < 9$, $9 \leq x \leq 10$)



b. 高中部 20 名学生所评分数在 $8 \leq x < 9$ 这一组的是:

8.0 8.1 8.2 8.2 8.4 8.5 8.6 8.7 8.8

c. 初中部、高中部各 20 名学生所评分数的平均数、中位数如下:

	平均数	中位数
初中部	8.3	8.5
高中部	8.3	m

根据以上信息, 回答下列问题:

(1) 表中 m 的值为_____;

(2) 根据调查前制定的满意度等级划分标准, 评分不低于 8.5 分为“非常满意”.

①在被调查的学生中, 设初中部、高中部对食堂“非常满意”的人数分别为 a 、 b , 则 a _____ b ; (填“>” “<” 或 “=”)

②高中部共有 800 名学生在食堂就餐, 估计其中对食堂“非常满意”的学生人数.

【答案】(1) 8.3

(2) ①>; ②估计其中对食堂“非常满意”的学生人数为 360 人

【解析】

【分析】(1) 由题意知，高中部评分的中位数为第10,11位数的平均数，即 $m = \frac{8.2+8.4}{2}$ ，计算求解即可；

(1) ①利用中位数进行决策即可；②根据 $800 \times \frac{4+5}{20}$ ，计算求解即可。

【小问1详解】

解：由题意知，高中部评分的中位数为第10,11位数的平均数，即 $m = \frac{8.2+8.4}{2} = 8.3$ ，

故答案为：8.3；

【小问2详解】

①解：由题意知，初中部评分的中位数为8.5，高中部评分的中位数为8.3，

$\therefore a > b$ ，

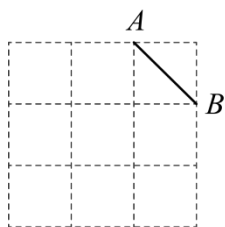
故答案为：>；

②解： $\therefore 800 \times \frac{4+5}{20} = 360$ ，

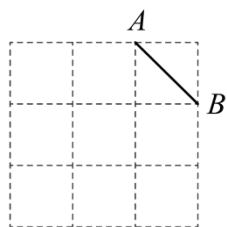
$\therefore$ 估计其中对食堂“非常满意”的学生人数为360人。

【点睛】本题考查了条形统计图，中位数，利用中位数进行决策，用样本估计总体。熟练掌握条形统计图，中位数，利用中位数进行决策，用样本估计总体是解题的关键。

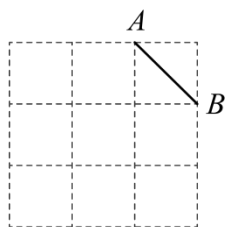
20. 图①、图②、图③均是3×3的正方形网格，每个小正方形的边长均为1，每个小正方形的顶点称为格点。点A、B均在格点上，只用无刻度的直尺，分别在给定的网格中按下列要求作四边形ABCD，使其是轴对称图形且点C、D均在格点上。



图①



图②



图③

(1) 在图①中，四边形ABCD面积为2；

(2) 在图②中，四边形ABCD面积为3；

(3) 在图③中，四边形ABCD面积为4。

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

(3) 见解析

【解析】

【分析】本题考查网格作图、设计图案、轴对称的性质、平移的性质等知识点，根据轴对称的性质、平移的性质作图是解题的关键。

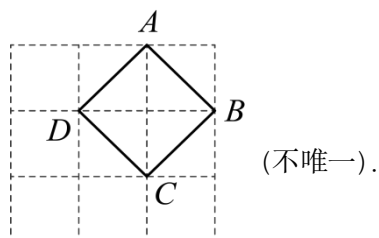
(1) 根据轴对称的性质、平移的性质作出面积为2四边形ABCD即可。

(2) 根据轴对称的性质、平移的性质作出面积为 3 四边形 $ABCD$ 即可.

(3) 根据轴对称的性质、平移的性质作出面积为 4 四边形 $ABCD$ 即可.

【小问 1 详解】

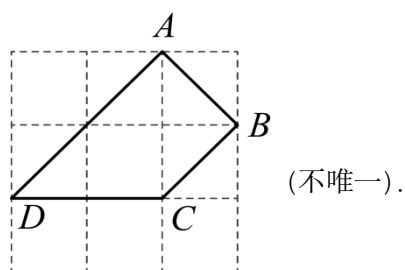
解：如图①：四边形 $ABCD$ 即为所求；



图①

【小问 2 详解】

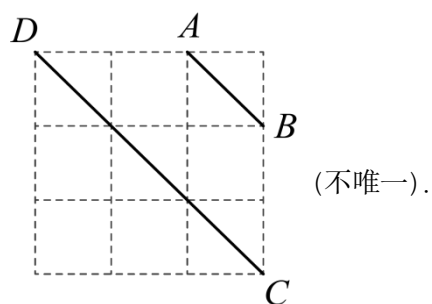
解：如图②：四边形 $ABCD$ 即为所求；



图②

【小问 3 详解】

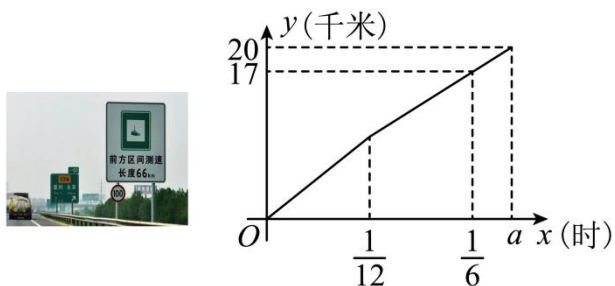
解：如图③：四边形 $ABCD$ 即为所求；



图③

21. 区间测速是指在某一路段前后设置两个监控点，根据车辆通过两个监控点的时间来计算车辆在该路段上的平均行驶速度. 小春驾驶一辆小型汽车在高速公路上行驶，其间经过一段长度为 20 千米的区间测速路段，从该路段起点开始，他先匀速行驶 $\frac{1}{12}$ 小时，再立即减速以另一速度匀速行驶（减速时间忽略不计），当他到达该路段终点时，测速装置测得该辆汽车在整个路段行驶的平均速度为 100 千米/时. 汽车在区间测速路

段行驶的路程 y (千米) 与在此路段行驶的时间 x (时) 之间的函数图象如图所示.



(1) a 的值为_____;

(2) 当 $\frac{1}{12} \leq x \leq a$ 时, 求 y 与 x 之间的函数关系式;

(3) 通过计算说明在此区间测速路段内, 该辆汽车减速前是否超速. (此路段要求小型汽车行驶速度不得超过 120 千米/时)

【答案】(1) $\frac{1}{5}$

(2) $y = 90x + 2 \left(\frac{1}{12} \leq x \leq \frac{1}{5} \right)$

(3) 没有超速

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的应用、一次函数的图像、求函数解析式等知识点, 掌握待定系数法求函数关系式是解题的关键.

(1) 由题意可得: 当以平均时速为 100 千米/时 行驶时, a 小时路程为 20 千米, 据此即可解答;

(2) 利用待定系数法求解即可;

(3) 求出先匀速行驶 $\frac{1}{12}$ 小时的速度, 据此即可解答.

【小问 1 详解】

解: 由题意可得: $100a = 20$, 解得: $a = \frac{1}{5}$.

故答案为: $\frac{1}{5}$.

【小问 2 详解】

解: 设当 $\frac{1}{12} \leq x \leq \frac{1}{5}$ 时, y 与 x 之间的函数关系式为 $y = kx + b$ ($k \neq 0$),

$$\text{则: } \begin{cases} \frac{1}{6}k + b = 17 \\ \frac{1}{5}k + b = 20 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k = 90 \\ b = 2 \end{cases},$$

$$\therefore y = 90x + 2 \left(\frac{1}{12} \leq x \leq \frac{1}{5} \right).$$

【小问3 详解】

解：当 $x = \frac{1}{12}$ 时， $y = 90 \times \frac{1}{12} + 2 = 9.5$,

$\therefore$ 先匀速行驶 $\frac{1}{12}$ 小时的速度为： $9.5 \div \frac{1}{12} = 114$ (千米/时)，

$\therefore 114 < 120$,

$\therefore$ 辆汽车减速前没有超速.

22. 【问题呈现】

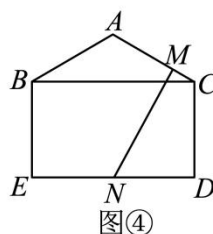
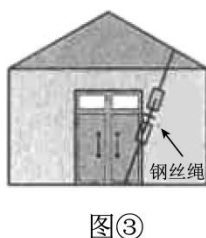
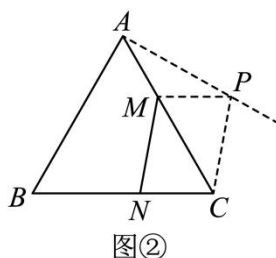
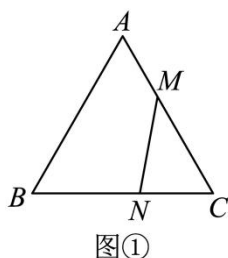
小明在数学兴趣小组活动时遇到一个几何问题：如图①，在等边 $\triangle ABC$ 中， $AB = 3$ ，点 M 、 N 分别在边 AC 、 BC 上，且 $AM = CN$ ，试探究线段 MN 长度的最小值.

【问题分析】

小明通过构造平行四边形，将双动点问题转化为单动点问题，再通过定角发现这个动点的运动路径，进而解决上述几何问题.

【问题解决】

如图②，过点 C 、 M 分别作 MN 、 BC 的平行线，并交于点 P ，作射线 AP . 在【问题呈现】的条件下，完成下列问题：



(1) 证明： $AM = MP$ ；

(2) $\angle CAP$ 的大小为_____度，线段 MN 长度的最小值为_____.

【方法应用】

某种简易房屋在整体运输前需用钢丝绳进行加固处理，如图③. 小明收集了该房屋的相关数据，并画出了示意图，如图④， $\triangle ABC$ 是等腰三角形，四边形 $BCDE$ 是矩形， $AB = AC = CD = 2$ 米， $\angle ACB = 30^\circ$. MN 是一条两端点位置和长度均可调节的钢丝绳，点 M 在 AC 上，点 N 在 DE 上. 在调整钢丝绳端点位置时，其长度也随之改变，但需始终保持 $AM = DN$. 钢丝绳 MN 长度的最小值为多少米.

【答案】问题解决：(1) 见解析 (2) 30° ， $\frac{3}{2}$ ；方法应用：线段 MN 长度的最小值为 $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ 米

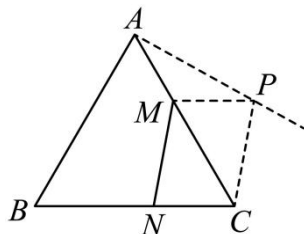
【解析】

【分析】(1) 过点 C 、 M 分别作 MN 、 BC 的平行线，并交于点 P ，作射线 AP ，根据平行四边形性质证明结论即可；

(2) 先证明 $\angle CAP = \angle MPA = 30^\circ$ ，根据垂线段最短求出最小值；

(3) 过点 D 、 M 分别作 MN 、 ED 的平行线，并交于点 H ，作射线 AH ，连接 AD ，求出 $\angle MAH = 15^\circ$ ，进而得 $\angle DAH = 45^\circ$ ，利用垂线段最短求出即可。

【详解】解：问题解决：(1) 证明：过点 C 、 M 分别作 MN 、 BC 的平行线，并交于点 P ，作射线 AP ，



图②

$\therefore$ 四边形 $MNCP$ 是平行四边形，

$$\therefore NC = MP, MN = PC$$

$$\because AM = NC$$

$$\therefore AM = MP;$$

(2) 在等边 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 60^\circ$ ，

$$\because MP \parallel CN$$

$$\therefore \angle PMC = \angle ACB = 60^\circ$$

$$\because AM = MP$$

$$\therefore \angle CAP = \angle MPA = 30^\circ;$$

当 $CP \perp AP$ 时， CP 最小，此时 MN 最小，

在 $\text{Rt}\triangle ACP$ 中， $AC = 3, \angle CAP = 30^\circ$

$$\therefore CP = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2},$$

$\therefore$ 线段 MN 长度的最小值为 $\frac{3}{2}$ ；

方法应用：过点 D 、 M 分别作 MN 、 ED 的平行线，并交于点 H ，作射线 AH ，连接 AD ，

$\therefore$ 四边形 $MNDH$ 是平行四边形，

$$\therefore ND = MH, MN = DH, MH \parallel ED$$

$$\because AM = ND$$

$$\therefore AM = MH,$$

∵ 四边形 $BCDE$ 是矩形,

$$\backslash BC \parallel ED, \angle BCD = 90^\circ$$

$$\backslash BC \parallel MH$$

$$\backslash \angle ACB = \angle CMH = 30^\circ$$

$$\therefore AM = MH$$

$$\backslash \angle MAH = 15^\circ$$

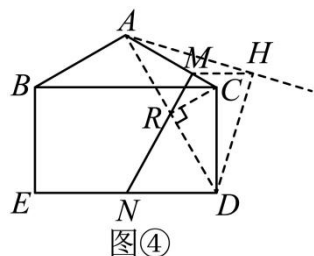
$$\therefore AC = CD = 3\text{m}, \angle ACD = \angle ACB + \angle BCD = 120^\circ$$

$$\therefore \angle DAC = 30^\circ$$

$$\therefore \angle DAH = 45^\circ$$

∴ 当 $DH \perp AH$ 时, DH 最小, 此时 MN 最小,

作 $CR \perp AD$ 于点 R ,



在 $\text{Rt}\triangle ACR$ 中, $AC = 3, \angle CAR = 30^\circ$

$$\backslash CR = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2},$$

$$\backslash AR = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\backslash AD = 2AR = 3\sqrt{3}$$

在 $\text{Rt}\triangle ADH$ 中, $AD = 3\sqrt{3}, \angle DAH = 45^\circ$

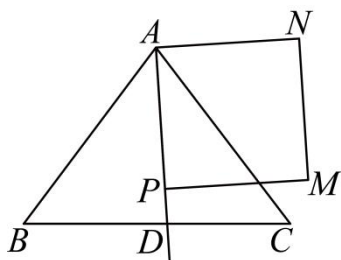
$$\backslash DH = AH = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{6}}{2},$$

∴ 线段 MN 长度的最小值为 $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ 米.

【点睛】 本题考查了平行四边形的判定与性质、等腰三角形的判定与性质、三角形外角的性质, 垂线段最短及矩形性质, 熟练掌握相关性质是解题关键.

23. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 5$, $BC = 6$. 点 D 是边 BC 上的一点 (点 D 不与点 B 、 C 重合), 作

射线 AD ，在射线 AD 上取点 P ，使 $AP = BD$ ，以 AP 为边作正方形 $APMN$ ，使点 M 和点 C 在直线 AD 同侧。



- (1) 当点 D 是边 BC 的中点时，求 AD 的长；
- (2) 当 $BD = 4$ 时，点 D 到直线 AC 的距离为 _____；
- (3) 连结 PN ，当 $PN \perp AC$ 时，求正方形 $APMN$ 的边长；
- (4) 若点 N 到直线 AC 的距离是点 M 到直线 AC 距离的 3 倍，则 CD 的长为 _____。（写出一个即可）

【答案】(1) 4

(2) $\frac{8}{5}$

(3) $\frac{17}{7}$

(4) $\frac{25}{6}$ 或 $\frac{25}{9}$

【解析】

【分析】本题考查等腰三角形性质，勾股定理，锐角三角函数，熟练掌握面积法是解题的关键；(1) 根据等腰三角形三线合一性质，利用勾股定理即可求解；(2) 利用面积法三角形面积相等即可；(3) 设 $AP = x$ ，则 $BD = x$ ， $CD = 6 - x$ ，过点 D 作 $DH \perp AC$ 于 Q

，根据 $AQ + CQ = AC$ ，建立方程；即可求解；(4) 第一种情况， M, N 在 AC 异侧时，设 $MQ = m$ ， $NQ = 3m$ ，

则 $AN = 4m$ ，证明 $\triangle CDE \sim \triangle ANQ$ ，得到 $\frac{CE}{NQ} = \frac{CD}{AQ}$ ，即可求解；第二种情况，当 M, N 在 AC 同侧，

设 $CD = x$ ，则 $CH = \frac{3}{5}x$ ， $DH = \frac{4}{5}x$ ， $AH = \frac{3}{2} \times \frac{4}{5}x$ ，求得 $\frac{3}{5}x + \frac{3}{2} \times \frac{4}{5}x = 5$ ，解方程即可求解；

【小问 1 详解】

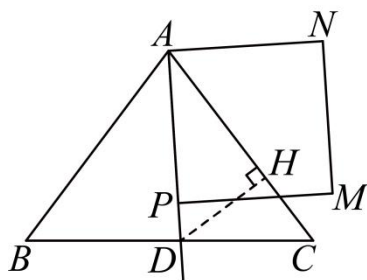
解：根据题意可知： $\because AB = AC = 5$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形，故点 D 是边 BC 的中点时， $AD \perp BC$ ；

在 $Rt\triangle ADC$ 中， $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$ ；

【小问 2 详解】

根据题意作 $DH \perp AC$ ，如图所示；



当 $BD = 4$ 时，则 $CD = 2$ ，

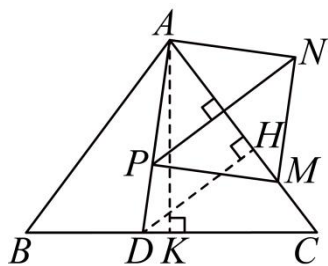
设点 D 到直线 AC 的距离为 $DH = h$ ，

$$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = \frac{1}{2} \times 5 \times h,$$

$$\text{解得： } h = \frac{8}{5};$$

【小问 3 详解】

如图，当 $NP \perp AC$ 时，点 M 落在 AC 上，



设 $AP = x$ ，则 $BD = x$ ， $CD = 6 - x$ ，

过点 D 作 $DH \perp AC$ 于 Q

$$\text{则 } CQ = \frac{3}{5}CD = \frac{3}{5}(6-x), \quad DQ = \frac{4}{5}CD = \frac{4}{5}(6-x)$$

$$AQ = DQ = \frac{4}{5}CD = \frac{4}{5}(6-x),$$

$$\because AQ + CQ = AC,$$

$$\therefore \frac{3}{5}(6-x) + \frac{4}{5}(6-x) = 5$$

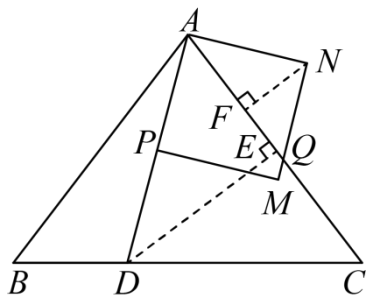
$$\text{解得： } x = \frac{17}{7}$$

$$\text{故 } AP = \frac{17}{7},$$

所以正方形 $APMN$ 的边长为 $\frac{17}{7}$ ；

【小问 4 详解】

如图， M ， N 在 AC 异侧时；



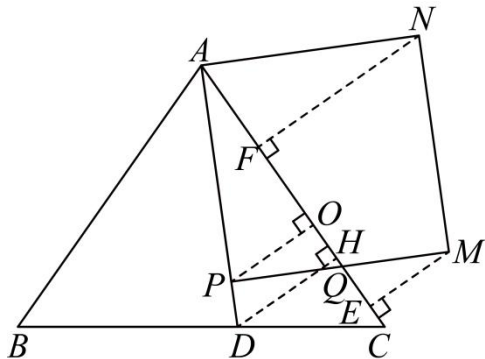
设 $MQ = m$, $NQ = 3m$, 则 $AN = 4m$

 $\therefore \triangle ANQ$ 三边的比值为 $3:4:5$,
$$\therefore \angle AQN = \angle C,$$
$$\therefore \angle CAD = \angle C,$$
$$\therefore \triangle CDE \sim \triangle ANQ$$

$$\frac{CE}{NQ} = \frac{CD}{AQ}$$

$$\therefore CD = \frac{5}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{25}{6}$$

当 M, N 在 AC 同侧



设 $MQ = m$, 则 $AN = AP = 3m$, $PQ = 2m$,

$$\therefore \triangle APO \text{ 三边比为 } 2:3:\sqrt{13},$$
$$\therefore \triangle AQD \text{ 三边比为 } 2:3:\sqrt{13},$$

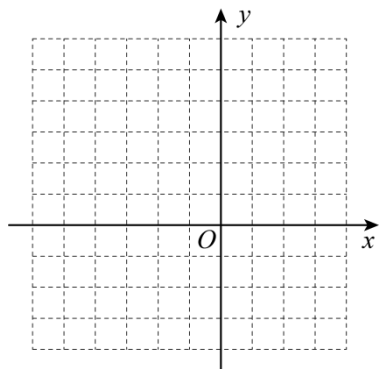
设 $CD = x$, 则 $CH = \frac{3}{5}x$, $DH = \frac{4}{5}x$, $AH = \frac{3}{2} \times \frac{4}{5}x$

$$\therefore \frac{3}{5}x + \frac{3}{2} \times \frac{4}{5}x = 5$$

解得: $CD = x = \frac{25}{9}$

综上所述：CD 的长为 $\frac{25}{6}$ 或 $\frac{25}{9}$

24. 在平面直角坐标系中，点 O 是坐标原点，抛物线 $y = x^2 + 2x + c$ (c 是常数) 经过点 $(-2, -2)$ 。点 A 、 B 是该抛物线上不重合的两点，横坐标分别为 m 、 $-m$ ，点 C 的横坐标为 $-5m$ ，点 C 的纵坐标与点 A 的纵坐标相同，连结 AB 、 AC 。



- (1) 求该抛物线对应的函数表达式；
 - (2) 求证：当 m 取不为零的任意实数时， $\tan \angle CAB$ 的值始终为 2；
 - (3) 作 AC 的垂直平分线交直线 AB 于点 D ，以 AD 为边、 AC 为对角线作菱形 $ADCE$ ，连结 DE 。
- ①当 DE 与此抛物线的对称轴重合时，求菱形 $ADCE$ 的面积；
- ②当此抛物线在菱形 $ADCE$ 内部的点的纵坐标 y 随 x 的增大而增大时，直接写出 m 的取值范围。

【答案】(1) $y = x^2 + 2x - 2$

(2) 见详解 (3) ① $S_{\text{菱形}ADCE} = 9$ ；② $m \leq -3$ 或 $-1 \leq m < 0$ 或 $0 < m \leq 4 - \sqrt{13}$

【解析】

【分析】(1) 将 $(-2, -2)$ 代入 $y = x^2 + 2x + c$ ，解方程即可；

(2) 过点 B 作 $BH \perp AC$ 于点 H ，由题意得 $A(m, m^2 + 2m - 2)$ ， $B(-m, m^2 - 2m - 2)$ ，则

$$BH = |y_A - y_B| = 4|m|, \quad AH = |x_A - x_B| = 2|m|, \quad \text{因此 } \tan \angle CAB = \frac{BH}{AH} = 2;$$

(3) ①记 AC, DE 交于点 M ， $C(-5m, m^2 + 2m - 2)$ ，而对称轴为直线 $x = -1$ ，则 $\frac{-m + 5m}{2} = -1$ ，解得：

$$m = \frac{1}{2}, \text{ 则 } AM = \frac{3}{2}, AC = 3, \text{ 由 } \tan \angle CAB = \frac{DM}{AM} = \frac{DM}{\frac{3}{2}} = 2, \text{ 得 } DM = 3, \text{ 则 } DE = 6, \text{ 因此 } S_{\text{菱形}ADCE} = 9;$$

②分类讨论，数形结合，记抛物线顶点为点 F ，则 $F(-1, -3)$ ，故菱形中只包含在对称轴右侧的抛物线，当 $m > 0$ 时，符合题意；当 m 继续变大，直至当直线 CD 经过点 F 时，符合题意，过点 F 作 $FQ \perp AC$ 于点

Q ，由 $\angle CAD = \angle FCQ$ ，得到 $\frac{m^2 + 2m - 2 - (-3)}{-1 - (-5m)} = 2$ ，解得： $m = 4 - \sqrt{13}$ 或 $m = 4 + \sqrt{13}$ （舍），故

$0 < m \leq 4 - \sqrt{13}$ ，当 $m > 4 - \sqrt{13}$ 时，发现此时菱形包含了对称轴左侧的抛物线，不符合题意；当 $m < 0$ 时，

符合题意：当 m 继续变小，直至点 A 与点 F 重合，此时 $m = -1$ ，故 $-1 \leq m < 0$ ；当 m 继续变小，直线 AE 经

过点 F 时，也符合题意，过点 F 作 $FQ \perp AC$ 于点 Q ，同上可得， $\frac{m^2 + 2m - 2 - (-3)}{-1 - m} = 2$ ，解得： $m = -3$

或 $m = -1$ （舍），当 m 继续变小时，仍符合题意，因此 $m \leq -3$ ，故 m 的取值范围为： $m \leq -3$ 或 $-1 \leq m < 0$

或 $0 < m \leq 4 - \sqrt{13}$ 。

【小问 1 详解】

解：将 $(-2, -2)$ 代入 $y = x^2 + 2x + c$ ，

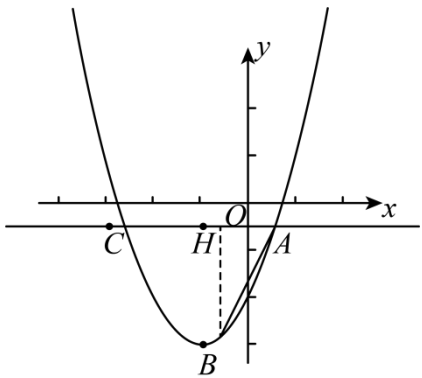
得： $4 - 4 + c = -2$ ，

解得： $x = -2$ ，

$\therefore$ 抛物线表达式为： $y = x^2 + 2x - 2$ ；

【小问 2 详解】

解：过点 B 作 $BH \perp AC$ 于点 H ，则 $\angle AHB = 90^\circ$ ，



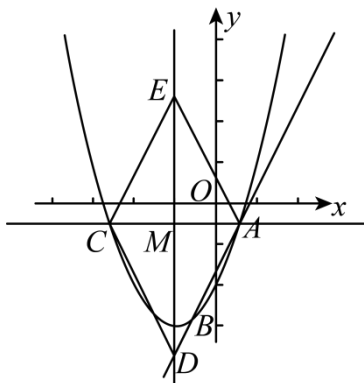
由题意得： $A(m, m^2 + 2m - 2)$ ， $B(-m, m^2 - 2m - 2)$ ，

$\therefore BH = |y_A - y_B| = 4|m|$ ， $AH = |x_A - x_B| = 2|m|$ ，

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle AHB$ 中， $\tan \angle CAB = \frac{BH}{AH} = \frac{4|m|}{2|m|} = 2$ ；

【小问 3 详解】

解：①如图，记 AC, DE 交于点 M ，



由题意得, $C(-5m, m^2 + 2m - 2)$,

由 $-\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1$,

得: 对称轴为直线: $x=-1$

$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 是菱形,

$\therefore$ 点 A 、 C 关于 DE 对称, $AC = 2AM$, $DE = 2DM$,

$\therefore DE$ 与此抛物线的对称轴重合,

$$\therefore \frac{-m+5m}{2} = -1,$$

解得: $m = \frac{1}{2}$,

$$\therefore x_A = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AM = \frac{1}{2} - (-1) = \frac{3}{2}$$

$$\therefore AC = 3,$$

$$\therefore \tan \angle CAB = \frac{DM}{AM} = \frac{DM}{\frac{3}{2}} = 2,$$

$\therefore DM = 3$, 则 $DE = 6$,

$$\therefore S_{\text{菱形}ADCE} = \frac{1}{2} DE \times AC = 9;$$

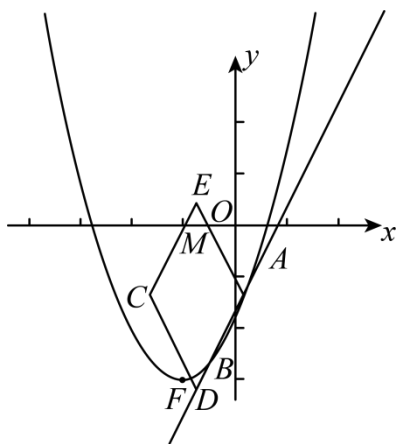
②记抛物线顶点为点 F , 把 $x=-1$ 代入 $y=x^2+2x-2$, 得: $y=-3$,

$$\therefore F(-1, -3),$$

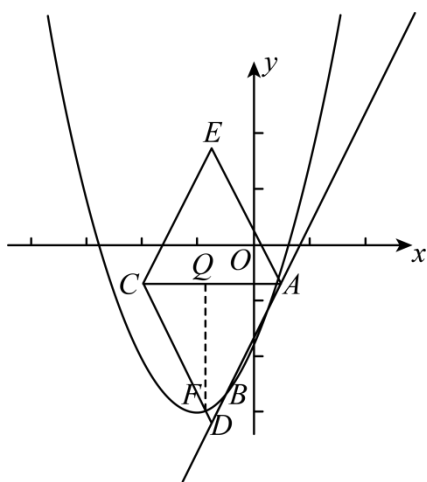
$\therefore$ 抛物线在菱形 $ADCE$ 内部的点的纵坐标 y 随 x 的增大而增大,

∴菱形中只包含在对称轴右侧的抛物线,

当 $m > 0$ 时, 如图, 符合题意,



当 m 继续变大, 直至当直线 CD 经过点 F 时, 符合题意, 如图:



过点 F 作 $FQ \perp AC$ 于点 Q ,

$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 是菱形,

$\therefore DA = DC$,

$\therefore \angle CAD = \angle FCQ$,

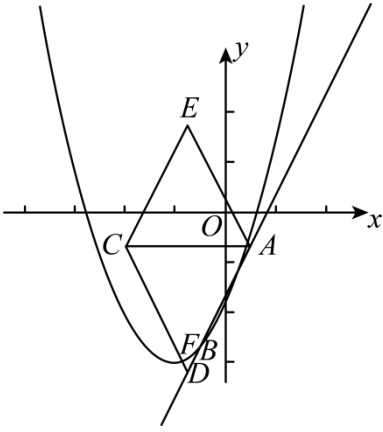
$\therefore \tan \angle FCQ = \tan \angle CAD = \frac{FQ}{CQ} = 2$,

$\therefore \frac{m^2 + 2m - 2 - (-3)}{-1 - (-5m)} = 2$,

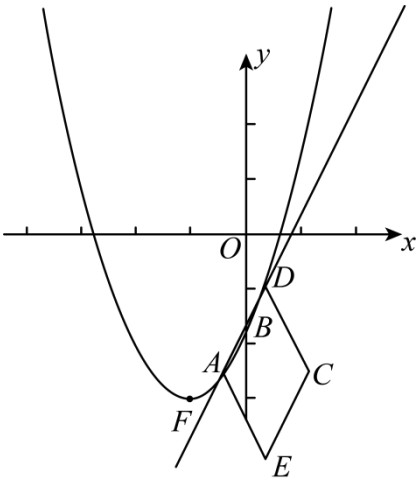
解得: $m = 4 - \sqrt{13}$ 或 $m = 4 + \sqrt{13}$ (舍),

$\therefore 0 < m \leq 4 - \sqrt{13}$,

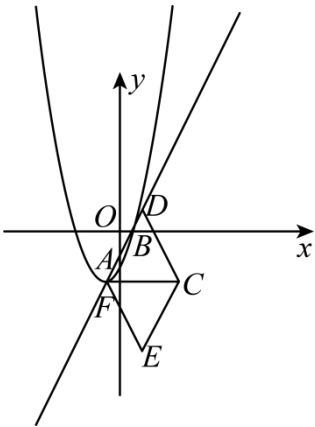
当 $m > 4 - \sqrt{13}$ 时, 如图, 发现此时菱形包含了对称轴左侧的抛物线, 不符合题意;



当 $m < 0$ 时，如图，符合题意：

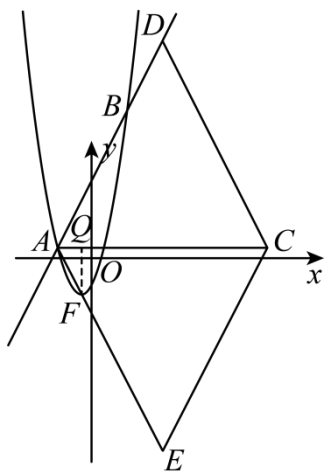


当 m 继续变小，直至点 A 与点 F 重合，此时 $m = -1$ ，符合题意，如图：



$\therefore -1 \leq m < 0$ ；

当 m 继续变小，直至直线 AE 经过点 F 时，也符合题意，如图：



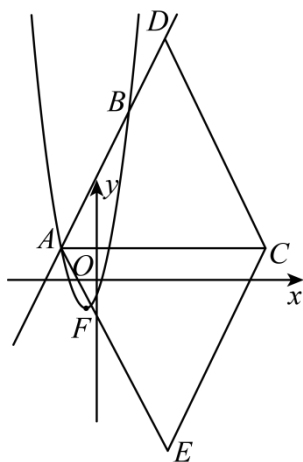
过点 F 作 $FQ \perp AC$ 于点 Q , 同上可得,

$$\tan \angle FAQ = \frac{FQ}{AQ} = 2,$$

$$\therefore \frac{m^2 + 2m - 2 - (-3)}{-1 - m} = 2,$$

解得: $m = -3$ 或 $m = -1$ (舍),

当 m 继续变小时, 仍符合题意, 如图:



$$\therefore m \leq -3,$$

综上所述, m 的取值范围为: $m \leq -3$ 或 $-1 \leq m < 0$ 或 $0 < m \leq 4 - \sqrt{13}$.

【点睛】本题考查了抛物线与几何的综合，菱形的性质，待定系数法求函数解析式，求锐角的正切值，正确理解题意，利用数形结合的思想，找出临界状态是解决本题的关键.