

吉林省 2024 年初中学业水平考试

数学试题

数学试卷共 7 页，包括六道大题，共 26 道小题，全卷满分 120 分。考试时间为 120 分钟。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

注意事项：

1. 答题前，考生务必将姓名、准考证号填写在答题卡上，并将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时，考生务必按照考试要求在答题卡上的指定区域内作答，在草稿纸、试卷上答题无效。

一、单项选择题（每小题 2 分，共 12 分）

1. 若 $(-3)^{\square}$ 的运算结果为正数，则 $\square$ 内的数字可以为（ ）

- A. 2 B. 1 C. 0 D. -1

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了有理数的乘法计算，根据有理数的乘法计算法则，分别计算出 -3 与四个选项中的数的乘积即可得到答案。

【详解】解： $(-3) \times 2 = -6$ ， $(-3) \times 1 = -3$ ， $(-3) \times 0 = 0$ ， $(-3) \times (-1) = 3$ ，

四个算式的运算结果中，只有 3 是正数，

故选：D。

2. 长白山天池系由火山口积水成湖，天池湖水碧蓝，水平如镜，群峰倒映，风景秀丽，总蓄水量约达 2040000000m^3 ，数据 2040000000 用科学记数法表示为（ ）

- A. 2.04×10^{10} B. 2.04×10^9 C. 20.4×10^8 D. 0.204×10^{10}

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了科学记数法，科学记数法的表现形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同，当原数绝对值大于等于 10 时， n 是正数，当原数绝对值小于 1 时 n 是负数；由此进行求解即可得到答案。

【详解】解： $2040000000 = 2.04 \times 10^9$

故选 B.

3. 葫芦在我国古代被看作吉祥之物. 下图是一个工艺葫芦的示意图, 关于它的三视图说法正确的是 ()



- A. 主视图与左视图相同
B. 主视图与俯视图相同
C. 左视图与俯视图相同
D. 主视图、左视图与俯视图都相同

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了简单几何体的三视图, 根据三视图的定义找到葫芦的三视图即可得到答案.

【详解】解: 葫芦的俯视图是两个同心圆, 且带有圆心, 主视图和俯视图都是下面一个较大的圆, 中间一个较小的圆, 上面是一条线段,

故选: A.

4. 下列方程中, 有两个相等实数根的是 ()

- A. $(x-2)^2 = -1$
B. $(x-2)^2 = 0$
C. $(x-2)^2 = 1$
D. $(x-2)^2 = 2$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的根, 解一元二次方程, 熟练掌握开平方法解方程是解题的关键. 分别对每一个选项运用直接开平方法进行解方程即可判断.

【详解】解: A、 $(x-2)^2 = -1 < 0$, 故该方程无实数解, 故本选项不符合题意;

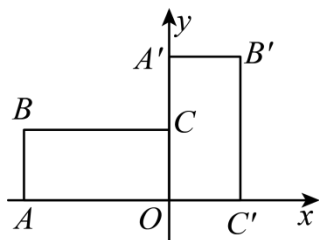
B、 $(x-2)^2 = 0$, 解得: $x_1 = x_2 = 2$, 故本选项符合题意;

C、 $(x-2)^2 = 1$, $x-2 = \pm 1$, 解得 $x_1 = 3, x_2 = 1$, 故本选项不符合题意;

D、 $(x-2)^2 = 2$, $x-2 = \pm\sqrt{2}$, 解得 $x_1 = 2+\sqrt{2}, x_2 = 2-\sqrt{2}$, 故本选项不符合题意.

故选: B.

5. 如图, 在平面直角坐标系中, 点 A 的坐标为 $(-4, 0)$, 点 C 的坐标为 $(0, 2)$. 以 OA, OC 为边作矩形 OABC, 若将矩形 OABC 绕点 O 顺时针旋转 90° , 得到矩形 OA'B'C', 则点 B' 的坐标为 ()



- A. $(-4, -2)$ B. $(-4, 2)$ C. $(2, 4)$ D. $(4, 2)$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了坐标与图形变化—旋转，矩形的性质等等，先根据题意得到 $OA = 4$ ， $OC = 2$ ，再由矩形的性质可得 $AB = OC = 2$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ，由旋转的性质可得 $OA' = OA = 4$ ， $A'B' = AB = 2$ ， $\angle OA'B' = 90^\circ$ ，据此可得答案.

【详解】解： $\because$ 点 A 的坐标为 $(-4, 0)$ ，点 C 的坐标为 $(0, 2)$ ，

$\therefore OA = 4$ ， $OC = 2$ ，

$\because$ 四边形 $OABC$ 是矩形，

$\therefore AB = OC = 2$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ，

$\because$ 将矩形 $OABC$ 绕点 O 顺时针旋转 90° ，得到矩形 $OA'B'C'$ ，

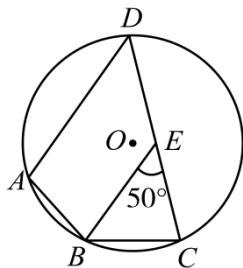
$\therefore OA' = OA = 4$ ， $A'B' = AB = 2$ ， $\angle OA'B' = 90^\circ$ ，

$\therefore A'B' \perp y$ 轴，

$\therefore$ 点 B' 的坐标为 $(2, 4)$ ，

故选：C.

6. 如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$ ，过点 B 作 $BE \parallel AD$ ，交 CD 于点 E . 若 $\angle BEC = 50^\circ$ ，则 $\angle ABC$ 的度数是 ()



- A. 50° B. 100° C. 130° D. 150°

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了平行线的性质，圆的内接四边形的性质，熟练掌握知识点是解题的关键.

先根据 $BE \parallel AD$ 得到 $\angle D = \angle BEC = 50^\circ$ ，再由四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$ 得到 $\angle ABC + \angle D = 180^\circ$ ，即可求解。

【详解】解： $\because BE \parallel AD$ ， $\angle BEC = 50^\circ$ ，

$$\therefore \angle D = \angle BEC = 50^\circ,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$ ，

$$\therefore \angle ABC + \angle D = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ,$$

故选：C.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

7. 当分式 $\frac{1}{x+1}$ 的值为正数时，写出一个满足条件的 x 的值为_____.

【答案】0 (答案不唯一)

【解析】

【分析】本题主要考查了根据分式的值的情况求参数，根据题意可得 $x+1 > 0$ ，则 $x > -1$ ，据此可得答案.

【详解】解： $\because$ 分式 $\frac{1}{x+1}$ 的值为正数，

$$\therefore x+1 > 0,$$

$$\therefore x > -1,$$

$\therefore$ 满足题意的 x 的值可以为 0，

故答案为：0 (答案不唯一).

8. 因式分解： $a^2 - 3a =$ _____.

【答案】 $a(a-3)$

【解析】

【分析】直接把公因式 a 提出来即可.

【详解】解： $a^2 - 3a = a(a-3)$.

故答案为 $a(a-3)$.

9. 不等式组 $\begin{cases} x-2 > 0 \\ x-3 < 0 \end{cases}$ 的解集为_____.

【答案】 $2 < x < 3$

【解析】

【分析】本题主要考查了解一元一次不等式组，先求出每个不等式的解集，再根据“同大取大，同小取小，大小小大中间找，大大小小找不到（无解）”求出不等式组的解集即可.

【详解】解：
$$\begin{cases} x-2>0 \text{①} \\ x-3<0 \text{②} \end{cases}$$

解不等式①得： $x>2$,

解不等式②得： $x<3$,

$\therefore$ 原不等式组的解集为 $2<x<3$,

故答案为： $2<x<3$.

10. 如图，从长春站去往胜利公园，与其它道路相比，走人民大街路程最近，其蕴含的数学道理是_____.



【答案】 两点之间，线段最短

【解析】

【分析】 本题考查了两点之间线段最短，熟记相关结论即可.

【详解】 从长春站去往胜利公园，走人民大街路程最近，

其蕴含的数学道理是： 两点之间，线段最短

故答案为： 两点之间，线段最短.

11. 正六边形的每个内角等于_____°.

【答案】 120

【解析】

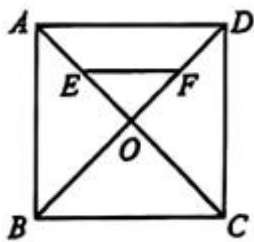
【详解】 解： 六边形的内角和为： $(6-2) \times 180^\circ = 720^\circ$,

$\therefore$ 正六边形的每个内角为： $\frac{720^\circ}{6} = 120^\circ$,

故答案为： 120

12. 如图，正方形 $ABCD$ 的对角线 AC ， BD 相交于点 O ，点 E 是 OA 的中点，点 F 是 OD 上一点. 连接

EF . 若 $\angle FEO = 45^\circ$ ，则 $\frac{EF}{BC}$ 的值为_____.



【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了相似三角形的性质与判定，正方形的性质，先由正方形的性质得到 $\angle OAD = 45^\circ$ ， $AD = BC$ ，再证明 $EF \parallel AD$ ，进而可证明 $\triangle OEF \sim \triangle OAD$ ，由相似三角形的性质可得 $\frac{EF}{AD} = \frac{OE}{OA} = \frac{1}{2}$ ，即 $\frac{EF}{BC} = \frac{1}{2}$ 。

【详解】 解： $\because$ 正方形 $ABCD$ 的对角线 AC ， BD 相交于点 O ，

$\therefore \angle OAD = 45^\circ$ ， $AD = BC$ ，

$\because$ 点 E 是 OA 的中点，

$$\therefore \frac{OE}{OA} = \frac{1}{2}，$$

$\therefore \angle FEO = 45^\circ$ ，

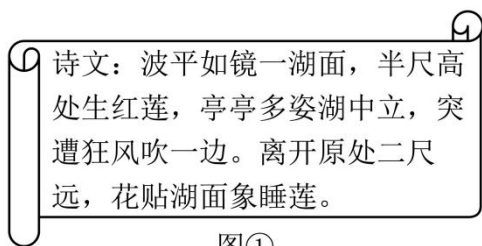
$\therefore EF \parallel AD$ ，

$\therefore \triangle OEF \sim \triangle OAD$ ，

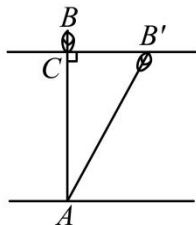
$$\therefore \frac{EF}{AD} = \frac{OE}{OA} = \frac{1}{2}，\text{ 即 } \frac{EF}{BC} = \frac{1}{2}，$$

故答案为： $\frac{1}{2}$ 。

13. 图①中有一首古算诗，根据诗中的描述可以计算出红莲所在位置的湖水深度，其示意图如图②，其中 $AB = AB'$ ， $AB \perp B'C$ 于点 C ， $BC = 0.5$ 尺， $B'C = 2$ 尺。设 AC 的长度为 x 尺，可列方程为_____。



图①



图②

【答案】 $x^2 + 2^2 = (x + 0.5)^2$

【解析】

【分析】 本题考查了勾股定理的实际应用，正确理解题意，运用勾股定理建立方程是解题的关键.

设 AC 的长度为 x 尺，则 $AB = AB' = x + 0.5$ ，在 $\text{Rt}\triangle AB'C$ 中，由勾股定理即可建立方程.

【详解】 解： 设 AC 的长度为 x 尺，则 $AB = AB' = x + 0.5$ ，

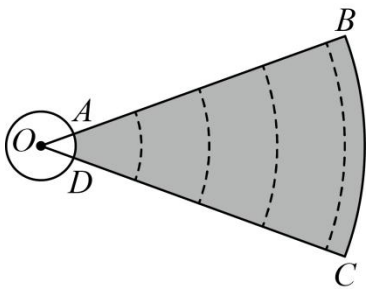
$\therefore AB \perp B'C$ ，

由勾股定理得： $AC^2 + B'C^2 = AB'^2$ ，

$$\therefore x^2 + 2^2 = (x + 0.5)^2,$$

故答案为： $x^2 + 2^2 = (x + 0.5)^2$.

14. 某新建学校因场地限制，要合理规划体育场地，小明绘制的铅球场地设计图如图所示，该场地由 $\odot O$ 和扇形 OBC 组成， OB, OC 分别与 $\odot O$ 交于点 A, D . $OA = 1\text{m}$ ， $OB = 10\text{m}$ ， $\angle AOD = 40^\circ$ ，则阴影部分的面积为_____ m^2 (结果保留 π).



【答案】 11π

【解析】

【分析】 本题考查了扇形面积公式，熟练掌握扇形面积公式是解题的关键.

利用阴影部分面积等于大扇形减去小扇形面积，结合扇形面积公式即可求解.

【详解】 解： 由题意得： $S_{\text{阴影}} = \frac{40\pi(10^2 - 1^2)}{360} = 11\pi$ ，

故答案为： 11π .

三、解答题 (每小题 5 分，共 20 分)

15. 先化简，再求值： $(a+1)(a-1) + a^2 + 1$ ，其中 $a = \sqrt{3}$.

【答案】 $2a^2$ ， 6

【解析】

【分析】 本题考查了整式的化简求值，平方差公式，先利用平方差公式化简，再进行合并同类项，最后代入求值即可.

【详解】解：原式 $= a^2 - 1 + a^2 + 1$

$$= 2a^2,$$

当 $a = \sqrt{3}$ 时,

$$\text{原式} = 2 \times (\sqrt{3})^2$$

$$= 6.$$

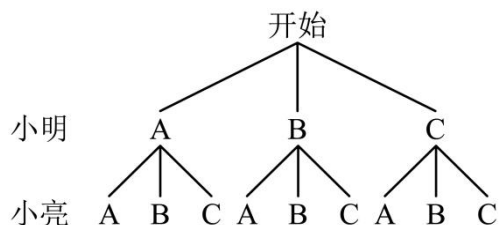
16. 吉林省以“绿水青山就是金山银山，冰天雪地也是金山银山”为指引，不断加大冰雪旅游的宣传力度，推出各种优惠活动，“小土豆”“小砂糖橘”等成为一道靓丽的风景线，某滑雪场为吸引游客，每天抽取一定数量的幸运游客，每名幸运游客可以从“滑雪”“滑雪圈”“雪地摩托”三个项目中随机抽取一个免费游玩。若三个项目被抽中的可能性相等，用画树状图或列表的方法，求幸运游客小明与小亮恰好抽中同一个项目的概率。

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】本题考查了用树状图法求概率。树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，适合两步或两步以上完成的事件。用到的知识点为：概率 = 所求情况数与总情况数之比。画出树状图，可知共有 9 种等可能的结果数，小明与小亮恰好抽中同一个项目的结果数有 3 种，再由概率公式求解即可。

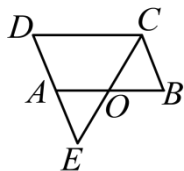
【详解】解：将“滑雪”“滑雪圈”“雪地摩托”三个项目分别记为事件 A 、 B 、 C ，可画树状图为：



由树状图可知共有 9 种等可能的结果数，小明与小亮恰好抽中同一个项目的结果数有 3 种，

$$\therefore \text{幸运游客小明与小亮恰好抽中同一个项目的概率 } P = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

17. 如图，在 $ABCD$ 中，点 O 是 AB 的中点，连接 CO 并延长，交 DA 的延长线于点 E ，求证： $AE = BC$.



【答案】证明见解析

【解析】

【分析】本题主要考查了全等三角形的性质与判定，平行四边形的性质，先根据平行四边形对边平行推出 $\angle OAE = \angle OBC$ ， $\angle OCB = \angle E$ ，再由线段中点的定义得到 $OA = OB$ ，据此可证明 $\triangle AOE \cong \triangle BOC$ (AAS)，进而可证明 $AE = BC$ 。

【详解】证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle OAE = \angle OBC$ ， $\angle OCB = \angle E$ ，

$\because$ 点 O 是 AB 的中点，

$\therefore OA = OB$ ，

$\therefore \triangle AOE \cong \triangle BOC$ (AAS)，

$\therefore AE = BC$ 。

18. 钢琴素有“乐器之王”的美称，键盘上白色琴键和黑色琴键共有 88 个，白色琴键比黑色琴键多 16 个。求白色琴键和黑色琴键的个数。



【答案】白色琴键 52 个，黑色琴键 36 个

【解析】

【分析】本题考查了列一元一次方程解应用题，正确理解题意是解题的关键。

设黑色琴键 x 个，则白色琴键 $(x+16)$ 个，可得方程 $x + (x+16) = 88$ ，再解方程即可。

【详解】解：设黑色琴键 x 个，则白色琴键 $(x+16)$ 个，

由题意得： $x + (x+16) = 88$ ，

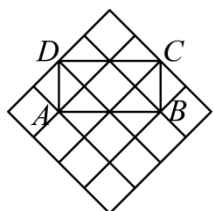
解得： $x = 36$ ，

$\therefore$ 白色琴键： $36 + 16 = 52$ (个)，

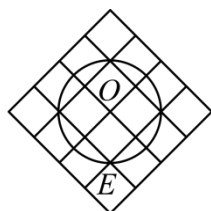
答：白色琴键 52 个，黑色琴键 36 个。

四、解答题 (每小题 7 分，共 28 分)

19. 图①、图②均是 4×4 的正方形网格，每个小正方形的顶点称为格点。点 A, B, C, D, E, O 均在格点上。图①中已画出四边形 $ABCD$ ，图②中已画出以 OE 为半径的 $\odot O$ ，只用无刻度的直尺，在给定的网格中按要求画图。



图①



图②

(1) 在图①中，面出四边形 $ABCD$ 的一条对称轴.

(2) 在图②中，画出经过点 E 的 $\odot O$ 的切线.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题主要考查了正方形的性质与判定，矩形的性质与判定，切线的判定，画对称轴等等：

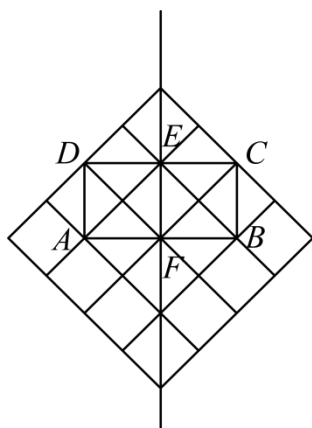
(1) 如图所示，取格点 E 、 F ，作直线 EF ，则直线 EF 即为所求；

(2) 如图所示，取格点 G 、 H ，作直线 GH ，则直线 GH 即为所求.

【小问 1 详解】

解：如图所示，取格点 E 、 F ，作直线 EF ，则直线 EF 即为所求；

易证明四边形 $ABCD$ 是矩形，且 E 、 F 分别为 AB 、 CD 的中点；

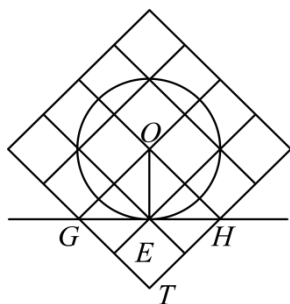


图①

【小问 2 详解】

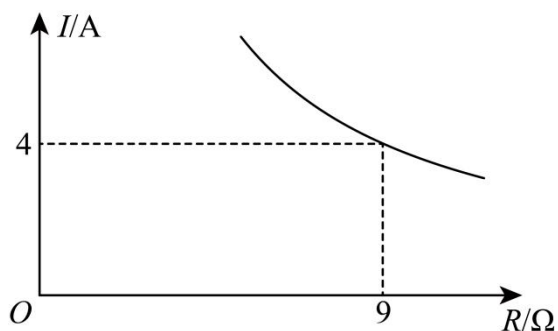
解：如图所示，取格点 G 、 H ，作直线 GH ，则直线 GH 即为所求；

易证明四边形 $OGTH$ 是正方形，点 E 为正方形 $OGTH$ 的中心，则 $OE \perp GH$.



图②

20. 已知蓄电池的电压为定值，使用蓄电池时，电流 I (单位：A) 与电阻 R (单位： Ω) 是反比例函数关系，它的图象如图所示.



(1) 求这个反比例函数的解析式 (不要求写出自变量 R 的取值范围).

(2) 当电阻 R 为 3Ω 时，求此时的电流 I .

【答案】(1) $I = \frac{36}{R}$

(2) 12A

【解析】

【分析】本题主要考查了反比例函数的实际应用：

(1) 直接利用待定系数法求解即可；

(2) 根据 (1) 所求出当 $R = 3\Omega$ 时 I 的值即可得到答案.

【小问 1 详解】

解：设这个反比例函数的解析式为 $I = \frac{U}{R} (U \neq 0)$,

把 $(9, 4)$ 代入 $I = \frac{U}{R} (U \neq 0)$ 中得： $4 = \frac{U}{9} (U \neq 0)$,

解得 $U = 36$,

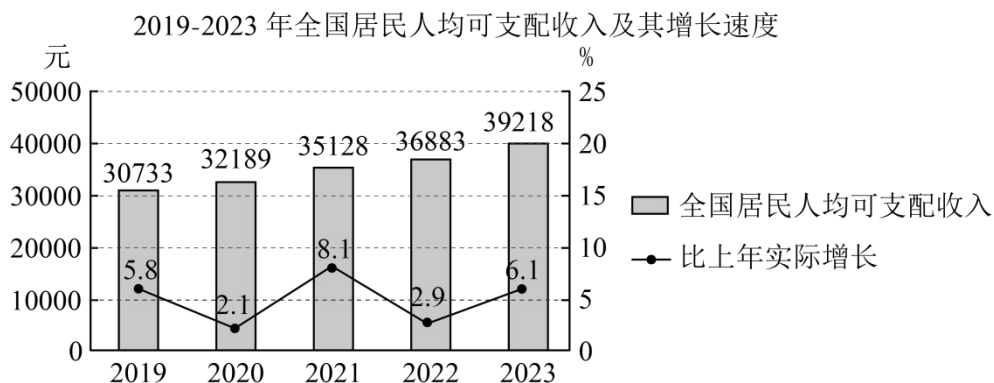
$\therefore$ 这个反比例函数的解析式为 $I = \frac{36}{R}$;

【小问 2 详解】

解：在 $I = \frac{36}{R}$ 中，当 $R = 3\Omega$ 时， $I = \frac{36}{3} = 12A$,

$\therefore$ 此时的电流 I 为 12A.

21. 中华人民共和国 2019—2023 年全国居民人均可支配收入及其增长速度情况如图所示.



根据以上信息回答下列问题：

- (1) 2019–2023 年全国居民人均可支配收入中，收入最高的一年比收入最低的一年多多少元？
 - (2) 直接写出 2019–2023 年全国居民人均可支配收入的中位数。
 - (3) 下列判断合理的是_____ (填序号)。
- ① 2019–2023 年全国居民人均可支配收入里逐年上升趋势。
- ② 2019–2023 年全国居民人均可支配收入实际增长速度最慢的年份是 2020 年。因此这 5 年中，2020 年全国居民人均可支配收入最低。

【答案】(1) 8485 元

(2) 35128 元

(3) ①

【解析】

【分析】 本题主要考查了频数分布直方图，频数分布折线图，中位数：

- (1) 用 2023 年的全国居民人均可支配收入减去 2019 年全国居民人均可支配收入即可得到答案；
- (2) 根据中位数的定义求解即可；
- (3) 根据统计图的数据即可得到答案。

【小问 1 详解】

解： $39218 - 30733 = 8485$ 元，

答： 2019–2023 年全国居民人均可支配收入中，收入最高的一年比收入最低的一年多 8485 元。

【小问 2 详解】

解： 2019–2023 年这五年的全国居民人均可支配收入分别为 30733 元，32189 元，35128 元，36883 元，39218 元，

∴ 2019–2023 年全国居民人均可支配收入的中位数为 35128 元；

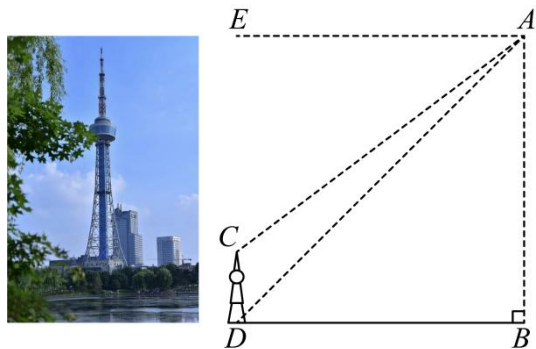
【小问 3 详解】

解： 由统计图可知 2019–2023 年全国居民人均可支配收入里逐年上升趋势，故①正确；

由统计图可知 2019–2023 年全国居民人均可支配收入实际增长速度最慢的年份是 2020 年。但这 5 年中，2019 年全国居民人均可支配收入最低，故②错误；

故答案为：①。

22. 图①中的吉林省广播电视塔，又称“吉塔”。某直升飞机于空中 A 处探测到吉塔，此时飞行高度 $AB = 873\text{m}$ ，如图②，从直升飞机上看塔尖 C 的俯角 $\angle EAC = 37^\circ$ ，看塔底 D 的俯角 $\angle EAD = 45^\circ$ ，求吉塔的高度 CD （结果精确到 0.1m）。（参考数据： $\sin 37^\circ = 0.60$ ， $\cos 37^\circ = 0.80$ ， $\tan 37^\circ = 0.75$ ）



图①

图②

【答案】218.3m

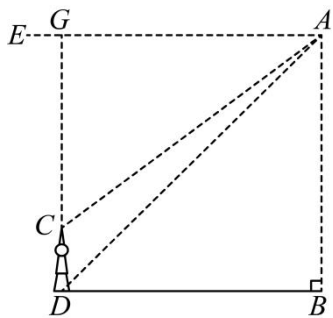
【解析】

【分析】本题考查了解直角三角形的应用，正确理解题意和添加辅助线是解题的关键。

先解 $\text{Rt}\triangle GAD$ 得到 $AG = \frac{DG}{\tan \angle EAD} = DG = 873$ ，再解 $\text{Rt}\triangle GAC$ ，

$CG = AG \cdot \tan \angle EAC = 873 \times 0.75 = 654.75$ ，即可求解 CD 。

【详解】解：延长 DC 交 AE 于点 G ，由题意得 $AB = DG = 873\text{m}$ ， $\angle DGA = 90^\circ$



在 $\text{Rt}\triangle GAD$ 中， $\angle EAD = 45^\circ$ ，

$$\therefore AG = \frac{DG}{\tan \angle EAD} = DG = 873,$$

在 $\text{Rt}\triangle GAC$ 中， $\angle EAC = 37^\circ$ ，

$$\therefore CG = AG \cdot \tan \angle EAC = 873 \times 0.75 = 654.75,$$

$$\therefore CD = DG - CG = 873 - 654.75 \approx 218.3\text{m},$$

答：吉塔的高度 CD 约为 218.3m .

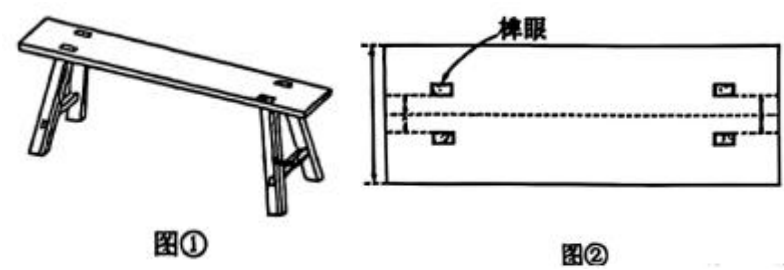
五、解答题（每小题 8 分，共 16 分）

23. 综合与实践

某班同学分三个小组进行“板凳中的数学”的项目式学习研究，第一小组负责调查板凳的历史及结构特点；第二小组负责研究板凳中蕴含的数学知识；第三小组负责汇报和交流，下面是第三小组汇报的部分内容，请你阅读相关信息，并解答“建立模型”中的问题.

【背景调查】

图①中的板凳又叫“四脚八叉凳”，是中国传统家具，其榫卯结构体现了古人含蓄内敛的审美观. 榫眼的设计很有讲究，木工一般用铅笔画出凳面的对称轴，以对称轴为基准向两边各取相同的长度，确定榫眼的位置，如图②所示. 板凳的结构设计体现了数学的对称美.



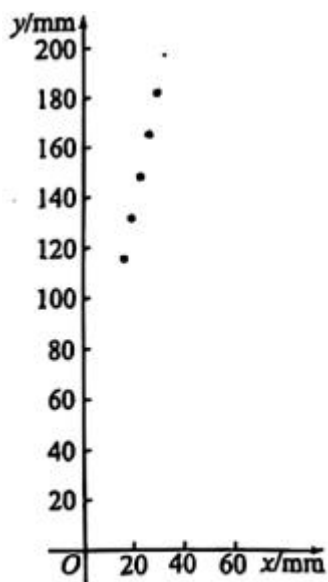
【收集数据】

小组收集了一些板凳并进行了测量. 设以对称轴为基准向两边各取相同的长度为 x ，凳面的宽度为 $y\text{mm}$ ，记录如下：

以对称轴为基准向两边各取相同的长度 x/mm	16.5	19.8	23.1	26.4	29.7
凳面的宽度 y/mm	115.5	132	148.5	165	181.5

【分析数据】

如图③，小组根据表中 x ， y 的数值，在平面直角坐标系中描出了各点.



图③

【建立模型】

请你帮助小组解决下列问题：

(1) 观察上述各点的分布规律，它们是否在同一条直线上？如果在同一条直线上，求出这条直线所对应的函数解析式；如果不在同一条直线上，说明理由。

(2) 当凳面宽度为 213mm 时，以对称轴为基准向两边各取相同的长度是多少？

【答案】(1) 在同一条直线上，函数解析式为： $y = 5x + 33$

(2) 36mm

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的实际应用，待定系数法求函数解析式，已知函数值求自变量，熟练掌握知识点，正确理解题意是解题的关键。

(1) 用待定系数法求解即可；

(2) 将 $y = 213$ 代入函数解析式，解方程即可。

【小问 1 详解】

解： 设函数解析式为： $y = kx + b (k \neq 0)$ ，

$\therefore$ 当 $x = 16.5, y = 115.5$ ， $x = 23.1, y = 148.5$ ，

$$\therefore \begin{cases} 16.5k + b = 115.5 \\ 23.1k + b = 148.5 \end{cases}$$

解得： $\begin{cases} k=5 \\ b=33 \end{cases}$,

$\therefore$ 函数解析式为： $y=5x+33$,

经检验其余点均在直线 $y=5x+33$ 上，

$\therefore$ 函数解析式为 $y=5x+33$ ，这些点在同一条直线上；

【小问 2 详解】

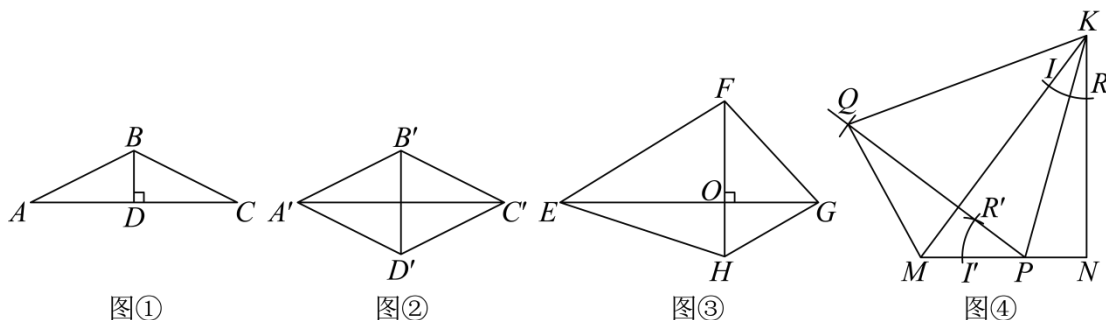
解：把 $y=213$ 代入 $y=5x+33$ 得：

$$5x+33=213,$$

解得： $x=36$,

$\therefore$ 当凳面宽度为 213mm 时，以对称轴为基准向两边各取相同的长度为 36mm.

24. 小明在学习时发现四边形面积与对角线存在关联，下面是他的研究过程：



【探究论证】

(1) 如图①，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=BC$ ， $BD \perp AC$ ，垂足为点 D 。若 $CD=2$ ， $BD=1$ ，则 $S_{\triangle ABC} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 如图②，在菱形 $A'B'C'D'$ 中， $A'C'=4$ ， $B'D'=2$ ，则 $S_{\text{菱形}A'B'C'D'} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) 如图③，在四边形 $EFGH$ 中， $EG \perp FH$ ，垂足为点 O 。若 $EG=5$ ， $FH=3$ ，则 $S_{\text{四边形}EFGH} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

若 $EG=a$ ， $FH=b$ ，猜想 $S_{\text{四边形}EFGH}$ 与 a ， b 的关系，并证明你的猜想。

【理解运用】

(4) 如图④，在 $\triangle MNK$ 中， $MN=3$ ， $KN=4$ ， $MK=5$ ，点 P 为边 MN 上一点。

小明利用直尺和圆规分四步作图：

- (i) 以点 K 为圆心，适当长为半径画弧，分别交边 KN ， KM 于点 R ， I ；
- (ii) 以点 P 为圆心， KR 长为半径画弧，交线段 PM 于点 I' ；
- (iii) 以点 I' 为圆心， IR 长为半径画弧，交前一条弧于点 R' ，点 R' ， K 在 MN 同侧；

(iv) 过点 P 画射线 PR' ，在射线 PR' 上截取 $PQ = KN$ ，连接 KP ， KQ ， MQ 。

请你直接写出 $S_{\text{四边形}MPKQ}$ 的值。

【答案】(1) 2, (2) 4, (3) $\frac{15}{2}$, $S_{\text{四边形}EFGH} = \frac{1}{2}ab$, 证明见详解, (4) 10

【解析】

【分析】(1) 根据三角形的面积公式计算即可；

(2) 根据菱形的面积公式计算即可；

(3) 结合图形有， $S_{\text{四边形}EFGH} = S_{\triangle EFG} + S_{\triangle EHG}$ ，即可得

$$S_{\text{四边形}EFGH} = \frac{1}{2} \times EG \times FO + \frac{1}{2} \times EG \times HO = \frac{1}{2} \times EG \times (FO + HO), \text{ 问题随之得解；}$$

(4) 先证明 $\triangle MNK$ 是直角三角形，由作图可知： $\angle MKN = \angle MPQ$ ，即可证明 $KM \perp PQ$ ，再结合 (3) 的结论直接计算即可。

【详解】(1) $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = BC$ ， $BD \perp AC$ ， $CD = 2$ ，

$$\therefore AD = CD = 2,$$

$$\therefore AC = 4,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AC \times BD = 2,$$

故答案为：2；

(2) $\because$ 在菱形 $A'B'C'D'$ 中， $A'C' = 4$ ， $B'D' = 2$ ，

$$\therefore S_{\text{菱形}A'B'C'D'} = \frac{1}{2} \times B'D' \times A'C' = 4,$$

故答案为：4；

(3) $\because EG \perp FH$ ，

$$\therefore S_{\triangle EFG} = \frac{1}{2} \times EG \times FO, \quad S_{\triangle EHG} = \frac{1}{2} \times EG \times HO,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}EFGH} = S_{\triangle EFG} + S_{\triangle EHG},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}EFGH} = \frac{1}{2} \times EG \times FO + \frac{1}{2} \times EG \times HO = \frac{1}{2} \times EG \times (FO + HO),$$

$$\therefore S_{\text{四边形}EFGH} = \frac{1}{2} \times EG \times (FO + HO) = \frac{1}{2} \times EG \times FH,$$

$$\because EG = 5, \quad FH = 3,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}EFGH} = \frac{1}{2} \times EG \times FH = \frac{15}{2},$$

故答案为： $\frac{15}{2}$ ，

猜想： $S_{\text{四边形}EFGH} = \frac{1}{2}ab$,

证明： $\because EG \perp FH$,

$$\therefore S_{\triangle EFG} = \frac{1}{2} \times EG \times FO, \quad S_{\triangle EHG} = \frac{1}{2} \times EG \times HO,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}EFGH} = S_{\triangle EFG} + S_{\triangle EHG},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}EFGH} = \frac{1}{2} \times EG \times FO + \frac{1}{2} \times EG \times HO = \frac{1}{2} \times EG \times (FO + HO),$$

$$\therefore S_{\text{四边形}EFGH} = \frac{1}{2} \times EG \times (FO + HO) = \frac{1}{2} \times EG \times FH,$$

$$\therefore EG = a, \quad FH = b,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}EFGH} = \frac{1}{2}ab;$$

(4) 根据尺规作图可知： $\angle QPM = \angle MKN$,

$\therefore$ 在 $\triangle MNK$ 中， $MN = 3$, $KN = 4$, $MK = 5$,

$$\therefore MK^2 = KN^2 + MN^2,$$

$\therefore \triangle MNK$ 是直角三角形，且 $\angle MNK = 90^\circ$,

$$\therefore \angle NMK + \angle MKN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle QPM = \angle MKN,$$

$$\therefore \angle NMK + \angle QPM = 90^\circ,$$

$$\therefore MK \perp PQ,$$

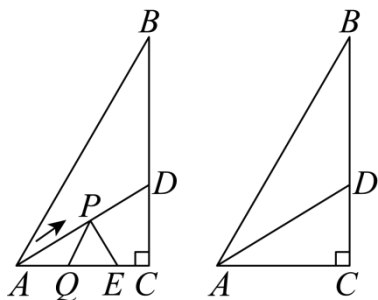
$$\therefore PQ = KN = 4, \quad MK = 5,$$

$$\therefore \text{根据 (3) 的结论有: } S_{\text{四边形}MPKQ} = \frac{1}{2} \times MK \times PQ = 10.$$

【点睛】 本题考查了等腰三角形的性质，菱形的性质，作一个角等于已知角的尺规作图，勾股定理的逆定理等知识，难度不大，掌握作一个角等于已知角的尺规作图方法，是解答本题的关键。

六、解答题 (每小题 10 分，共 20 分)

25. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $AC = 3\text{cm}$, AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线. 动点 P 从点 A 出发，以 $\sqrt{3}\text{cm/s}$ 的速度沿折线 $AD-DB$ 向终点 B 运动. 过点 P 作 $PQ \parallel AB$, 交 AC 于点 Q , 以 PQ 为边作等边三角形 PQE , 且点 C, E 在 PQ 同侧，设点 P 的运动时间为 $t(\text{s}) (t > 0)$, PQE 与 $\triangle ABC$ 重合部分图形的面积为 $S(\text{cm}^2)$.



(1) 当点 P 在线段 AD 上运动时, 判断 $\triangle APQ$ 的形状 (不必证明), 并直接写出 AQ 的长 (用含 t 的代数式表示).

(2) 当点 E 与点 C 重合时, 求 t 的值.

(3) 求 S 关于 t 的函数解析式, 并写出自变量 t 的取值范围.

【答案】(1) 等腰三角形, $AQ = t$

(2) $t = \frac{3}{2}$

(3)
$$\begin{cases} S = \frac{\sqrt{3}}{4}t^2, 0 < t \leq \frac{3}{2} \\ S = -\frac{7\sqrt{3}}{4}t^2 + 6\sqrt{3}t - \frac{9}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2} < t < 2 \\ S = \frac{\sqrt{3}}{2}(t-1)^2, 2 \leq t < 4 \end{cases}$$

【解析】

【分析】(1) 过点 Q 作 $QH \perp AD$ 于点 H , 根据“平行线+角平分线”即可得到 $QA = QP$, 由 $QH \perp AP$,

得到 $HA = \frac{1}{2}AP = \frac{\sqrt{3}}{2}t$, 解 $\text{Rt}\triangle AHQ$ 得到 $AQ = t$;

(2) 由 PQE 为等边三角形得到 $QE = QP$, 而 $QA = QP$, 则 $QE = QA$, 故 $AE = 2AQ = 2t = 3$, 解得 $t = \frac{3}{2}$;

(3) 当点 P 在 AD 上, 点 E 在 AC 上, 重合部分为 PQE , 过点 P 作 $PG \perp QE$ 于点 G , $PG = \frac{1}{2}AP = \frac{\sqrt{3}}{2}t$,

则 $S = \frac{1}{2}QE \cdot PG = \frac{\sqrt{3}}{4}t^2$, 此时 $0 < t \leq \frac{3}{2}$; 当点 P 在 AD 上, 点 E 在 AC 延长线上时, 记 PE 与 AC 交于

点 F , 此时重合部分为四边形 $FPQC$, 此时 $CF = CE \cdot \tan \angle E = \sqrt{3}(2t - 3)$, 因此

$S_{\triangle FCE} = \frac{1}{2}CE \cdot CF = \frac{\sqrt{3}}{2}(2t - 3)^2$, 故可得 $S = S_{\triangle PQE} - S_{\triangle FCE} = -\frac{7\sqrt{3}}{4}t^2 + 6\sqrt{3}t - \frac{9}{2}\sqrt{3}$, 此时 $\frac{3}{2} < t < 2$;

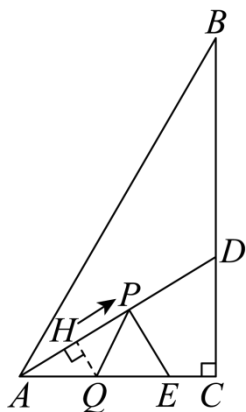
当点 P 在 DB 上, 重合部分为 $\triangle PQC$, 此时 $PD = \sqrt{3}t - 2\sqrt{3}$, $PC = CD + PD = \sqrt{3}t - \sqrt{3} = \sqrt{3}(t-1)$,

解直角三角形得 $QC = \frac{PC}{\tan \angle PQC} = \frac{\sqrt{3}}{3}PC = t-1$, 故 $S = \frac{1}{2}QC \cdot PC = \frac{\sqrt{3}}{2}(t-1)^2$, 此时 $2 \leq t < 4$, 再

综上所述即可求解.

【小问 1 详解】

解: 过点 Q 作 $QH \perp AD$ 于点 H , 由题意得: $AP = \sqrt{3}t$



$$\because \angle C = 90^\circ, \angle B = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 60^\circ,$$

$$\because AD \text{ 平分 } \angle BAC,$$

$$\therefore \angle PAQ = \angle BAD = 30^\circ,$$

$$\because PQ \parallel AB,$$

$$\therefore \angle APQ = \angle BAD = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle PAQ = \angle APQ,$$

$$\therefore QA = QP,$$

$$\therefore \triangle APQ \text{ 为等腰三角形},$$

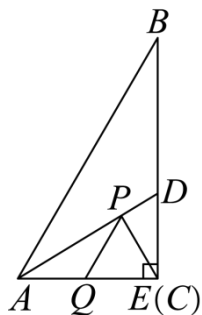
$$\because QH \perp AP,$$

$$\therefore HA = \frac{1}{2}AP = \frac{\sqrt{3}}{2}t,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle AHQ \text{ 中, } AQ = \frac{AH}{\cos \angle PAQ} = t;$$

【小问 2 详解】

解：如图，



$\therefore PQE$ 为等边三角形，

$\therefore QE = QP$ ，

由 (1) 得 $QA = QP$ ，

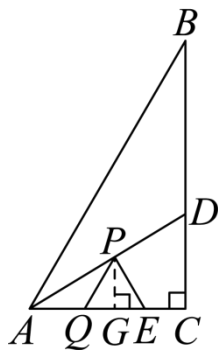
$\therefore QE = QA$ ，

即 $AE = 2AQ = 2t = 3$ ，

$\therefore t = \frac{3}{2}$ ；

【小问 3 详解】

解：当点 P 在 AD 上，点 E 在 AC 上，重合部分为 PQE ，过点 P 作 $PG \perp QE$ 于点 G ，



$\therefore \angle PAQ = 30^\circ$ ，

$\therefore PG = \frac{1}{2}AP = \frac{\sqrt{3}}{2}t$ ，

$\therefore PQE$ 是等边三角形，

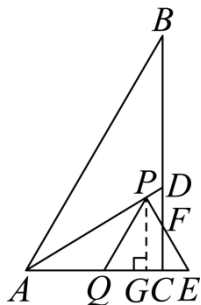
$\therefore QE = PQ = AQ = t$ ，

$\therefore S = \frac{1}{2}QE \cdot PG = \frac{\sqrt{3}}{4}t^2$ ，

由 (2) 知当点 E 与点 C 重合时, $t = \frac{3}{2}$,

$$\therefore S = \frac{\sqrt{3}}{4} t^2 \left(0 < t \leq \frac{3}{2} \right);$$

当点 P 在 AD 上, 点 E 在 AC 延长线上时, 记 PE 与 AC 交于点 F , 此时重合部分为四边形 $FPQC$, 如图,



$\because PQE$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle E = 60^\circ,$$

$$\text{而 } CE = AE - AC = 2t - 3,$$

$$\therefore CF = CE \cdot \tan \angle E = \sqrt{3}(2t - 3),$$

$$\therefore S_{\triangle FCE} = \frac{1}{2} CE \cdot CF = \frac{1}{2} (2t - 3) \times \sqrt{3}(2t - 3) = \frac{\sqrt{3}}{2} (2t - 3)^2,$$

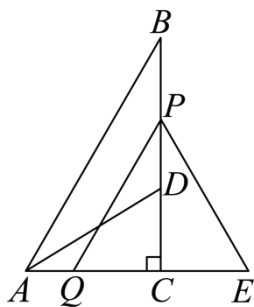
$$\therefore S = S_{\triangle PQE} - S_{\triangle FCE} = \frac{\sqrt{3}}{4} t^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} (2t - 3)^2 = -\frac{7\sqrt{3}}{4} t^2 + 6\sqrt{3}t - \frac{9}{2}\sqrt{3},$$

当点 P 与点 D 重合时, 在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中, $AD = \frac{AC}{\cos \angle DAC} = 2\sqrt{3} = AP = \sqrt{3}t$,

$$\therefore t = 2,$$

$$\therefore S = -\frac{7\sqrt{3}}{4} t^2 + 6\sqrt{3}t - \frac{9}{2}\sqrt{3} \left(\frac{3}{2} < t < 2 \right);$$

当点 P 在 DB 上, 重合部分为 $\triangle PQC$, 如图,



$$\because \angle DAC = 30^\circ \quad \angle DCA = 90^\circ,$$

$$\text{由上知 } DC = \sqrt{3},$$

$$\therefore AD = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{此时 } PD = \sqrt{3}t - 2\sqrt{3},$$

$$\therefore PC = CD + PD = \sqrt{3}t - \sqrt{3} = \sqrt{3}(t-1),$$

$$\because PQE \text{ 是等边三角形},$$

$$\therefore \angle PQE = 60^\circ,$$

$$\therefore QC = \frac{PC}{\tan \angle PQC} = \frac{\sqrt{3}}{3} PC = t-1,$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} QC \cdot PC = \frac{\sqrt{3}}{2} (t-1)^2,$$

$$\because \angle B = \angle BAD = 30^\circ,$$

$$\therefore DA = DB = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{当点 } P \text{ 与点 } B \text{ 重合时, } \sqrt{3}t = AD + DB = 4\sqrt{3},$$

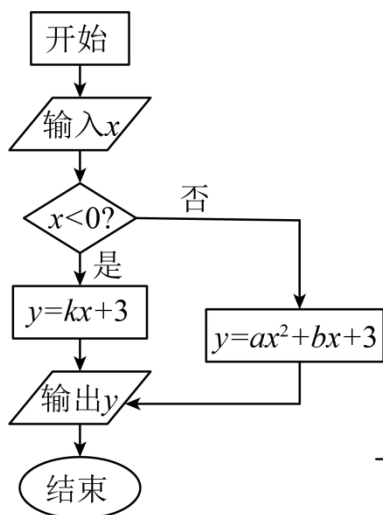
$$\text{解得: } t = 4,$$

$$\therefore S = \frac{\sqrt{3}}{2} (t-1)^2 (2 \leq t < 4),$$

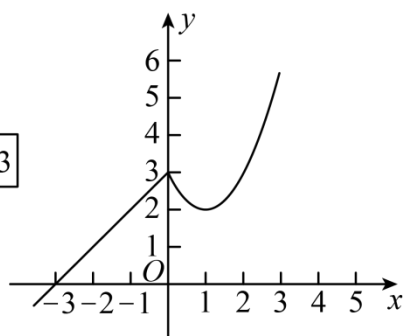
$$\text{综上所述: } \begin{cases} S = \frac{\sqrt{3}}{4} t^2, 0 < t \leq \frac{3}{2} \\ S = -\frac{7\sqrt{3}}{4} t^2 + 6\sqrt{3}t - \frac{9}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2} < t < 2 \\ S = \frac{\sqrt{3}}{2} (t-1)^2, 2 \leq t < 4 \end{cases}$$

【点睛】本题考查了直角三角形的性质，解直角三角形的相关计算，等腰三角形的判定与性质，等边三角形的性质，平行线的性质，熟练掌握知识点，正确添加辅助线是解决本题的关键。

26. 小明利用一次函数和二次函数知识，设计了一个计算程序，其程序框图如图(1)所示，输入 x 的值为 -2 时，输出 y 的值为 1 ；输入 x 的值为 2 时，输出 y 的值为 3 ；输入 x 的值为 3 时，输出 y 的值为 6 。



(图1)



(图2)

(1) 直接写出 k , a , b 的值.

(2) 小明在平面直角坐标系中画出了关于 x 的函数图像, 如图 (2).

I. 当 y 随 x 的增大而增大时, 求 x 的取值范围.

II. 若关于 x 的方程 $ax^2 + bx + 3 - t = 0$ (t 为实数), 在 $0 < x < 4$ 时无解, 求 t 的取值范围.

III. 若在函数图像上有点 P , Q (P 与 Q 不重合). P 的横坐标为 m , Q 的横坐标为 $-m+1$. 小明对 P , Q 之间 (含 P , Q 两点) 的图像进行研究, 当图像对应函数的最大值与最小值均不随 m 的变化而变化, 直接写出 m 的取值范围.

【答案】 (1) $k=1, a=1, b=-2$

(2) I: $x \leq 0$ 或 $x \geq 1$; II: $t < 2$ 或 $t \geq 11$; III: $-1 \leq m \leq 0$ 或 $1 \leq m \leq 2$

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数与一次函数的图像与性质, 待定系数法求函数解析式, 一元二次方程的解, 正确理解题意, 利用数形结合的思想是解决本题的关键.

(1) 先确定输入 x 值的范围, 确定好之后将 x , y 的值代入所给的 y 关于 x 的函数解析式种解方程或方程组即可;

(2) I: 可知一次函数解析式为: $y = x + 3$, 二次函数解析式为: $y = x^2 - 2x + 3$, 当 $x > 0$ 时, $y = x^2 - 2x + 3$, 对称轴为直线 $x = 1$, 开口向上, 故 $x \geq 1$ 时, y 随着 x 的增大而增大; 当 $x \leq 0$ 时, $y = x + 3$, $k = 1 > 0$, 故 $x \leq 0$ 时, y 随着 x 的增大而增大;

II: 问题转化为抛物线 $y = x^2 - 2x + 3$ 与直线 $y = t$ 在 $0 < x < 4$ 时无交点, 考虑两个临界状态, 当 $t = 2$ 时, 抛物线 $y = x^2 - 2x + 3$ 与直线 $y = t$ 在 $0 < x < 4$ 时正好一个交点, 因此当 $t < 2$ 时, 抛物线 $y = x^2 - 2x + 3$ 与

直线 $y = t$ 在 $0 < x < 4$ 时没有交点；当 $x = 4$, $y = 11$, 故当 $t = 11$ 时, 抛物线 $y = x^2 - 2x + 3$ 与直线 $y = t$ 在 $0 < x \leq 4$ 时正好一个交点, 因此当 $t \geq 11$ 时, 抛物线 $y = x^2 - 2x + 3$ 与直线 $y = t$ 在 $0 < x < 4$ 时没有交点, 当 $t < 2$ 或 $t \geq 11$ 时, 抛物线 $y = x^2 - 2x + 3$ 与直线 $y = t$ 在 $0 < x < 4$ 时没有交点, 即方程 $ax^2 + bx + 3 - t = 0$ 无解;

Ⅲ: 可求点 P 、 Q 关于直线 $x = \frac{1}{2}$ 对称, 当 $x = 1$, $y_{\text{最小值}} = 2$, 当 $x = 0$ 时, $y_{\text{最大值}} = 3$, 当图像对应函数的最大值与最小值均不随 m 的变化而变化, 而当 $x = 2$ 时, $y = 3$, $x = -1$ 时, $y = 2$, 故①当 $m > \frac{1}{2}$, 由题

意得: $\begin{cases} -1 \leq -m+1 \leq 0 \\ 1 \leq m \leq 2 \end{cases}$, 则 $1 \leq m \leq 2$; ②当 $m < \frac{1}{2}$, 由题意得: $\begin{cases} -1 \leq m \leq 0 \\ 1 \leq -m+1 \leq 2 \end{cases}$, 则 $-1 \leq m \leq 0$, 综上:

$-1 \leq m \leq 0$ 或 $1 \leq m \leq 2$.

【小问 1 详解】

解: $\because x = -2 < 0$,

$\therefore$ 将 $x = -2$, $y = 1$ 代入 $y = kx + 3$,

得: $-2k + 3 = 1$,

解得: $k = 1$,

$\because x = 2 > 0, x = 3 > 0$,

$\therefore$ 将 $x = 2, y = 3$, $x = 3, y = 6$ 代入 $y = ax^2 + bx + 3$

得: $\begin{cases} 4a + 2b + 3 = 3 \\ 9a + 3b + 3 = 6 \end{cases}$,

解得: $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$;

【小问 2 详解】

解: I, $\because k = 1, a = 1, b = -2$,

$\therefore$ 一次函数解析式为: $y = x + 3$, 二次函数解析式为: $y = x^2 - 2x + 3$

当 $x > 0$ 时, $y = x^2 - 2x + 3$, 对称轴为直线 $x = 1$, 开口向上,

$\therefore x \geq 1$ 时, y 随着 x 的增大而增大;

当 $x \leq 0$ 时, $y = x + 3$, $k = 1 > 0$,

$\therefore x \leq 0$ 时, y 随着 x 的增大而增大,

综上, x 的取值范围: $x \leq 0$ 或 $x \geq 1$;

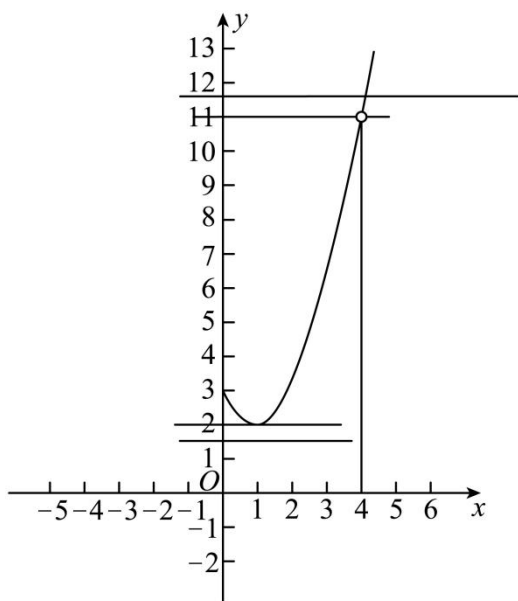
II, $\because ax^2 + bx + 3 - t = 0$,

$\therefore ax^2 + bx + 3 = t$, 在 $0 < x < 4$ 时无解,

$\therefore$ 问题转化为抛物线 $y = x^2 - 2x + 3$ 与直线 $y = t$ 在 $0 < x < 4$ 时无交点,

$\therefore$ 对于 $y = x^2 - 2x + 3$, 当 $x = 1$ 时, $y = 2$

$\therefore$ 顶点为 $(1, 2)$, 如图:



$\therefore$ 当 $t = 2$ 时, 抛物线 $y = x^2 - 2x + 3$ 与直线 $y = t$ 在 $0 < x < 4$ 时正好一个交点,

$\therefore$ 当 $t < 2$ 时, 抛物线 $y = x^2 - 2x + 3$ 与直线 $y = t$ 在 $0 < x < 4$ 时没有交点;

当 $x = 4$, $y = 16 - 8 + 3 = 11$,

$\therefore$ 当 $t = 11$ 时, 抛物线 $y = x^2 - 2x + 3$ 与直线 $y = t$ 在 $0 < x \leq 4$ 时正好一个交点,

$\therefore$ 当 $t \geq 11$ 时, 抛物线 $y = x^2 - 2x + 3$ 与直线 $y = t$ 在 $0 < x < 4$ 时没有交点,

$\therefore$ 当 $t < 2$ 或 $t \geq 11$ 时, 抛物线 $y = x^2 - 2x + 3$ 与直线 $y = t$ 在 $0 < x < 4$ 时没有交点,

即: 当 $t < 2$ 或 $t \geq 11$ 时, 关于 x 的方程 $ax^2 + bx + 3 - t = 0$ (t 为实数), 在 $0 < x < 4$ 时无解;

III: $\because x_p = m, x_q = -m + 1$,

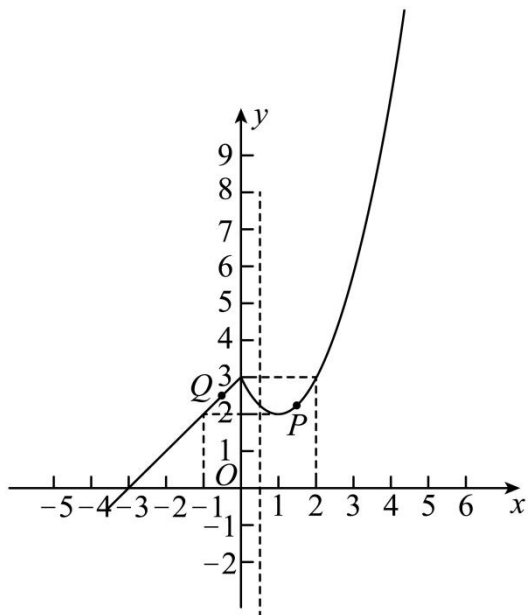
$$\therefore \frac{m+(-m+1)}{2} = \frac{1}{2},$$

$\therefore$ 点 P 、 Q 关于直线 $x = \frac{1}{2}$ 对称,

当 $x = 1$, $y_{\text{最小值}} = 1 - 2 + 3 = 2$, 当 $x = 0$ 时, $y_{\text{最大值}} = 3$,

$\therefore$ 当图像对应函数的最大值与最小值均不随 m 的变化而变化, 而当 $x = 2$ 时, $y = 3$, $x = -1$ 时, $y = 2$,

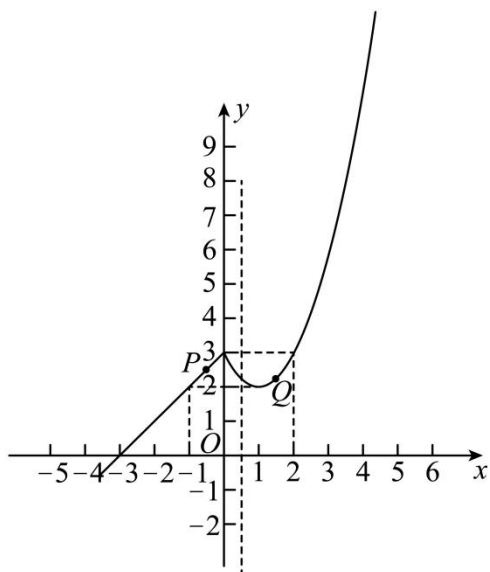
$\therefore$ ①当 $m > \frac{1}{2}$, 如图:



由题意得:
$$\begin{cases} -1 \leq -m+1 \leq 0 \\ 1 \leq m \leq 2 \end{cases},$$

$\therefore 1 \leq m \leq 2$;

②当 $m < \frac{1}{2}$, 如图:



由题意得：
$$\begin{cases} -1 \leq m \leq 0 \\ 1 \leq -m+1 \leq 2 \end{cases},$$

$$\therefore -1 \leq m \leq 0,$$

综上： $-1 \leq m \leq 0$ 或 $1 \leq m \leq 2$.