

2024 年内蒙古通辽市初中毕业生学业考试试卷

数学

注意事项：

1. 本试卷共 8 页，26 道小题，满分为 120 分，考试时间为 120 分钟。
2. 根据网上阅卷需要，本试卷中的所有试题均要求在答题卡上作答，答在本试卷上的答案无效。

一、选择题（本题包括 12 道小题，每小题 3 分，共 36 分，每小题只有一个正确答案。请在答题卡上将代表正确答案的字母用 2B 铅笔涂黑）

1. 某地区某日最高气温是零上 8°C ，记作 $+8^{\circ}\text{C}$ ，最低气温是零下 3°C ，应该记作（ ）

A. -3°C B. $+3^{\circ}\text{C}$ C. -5°C D. $+5^{\circ}\text{C}$

【答案】A

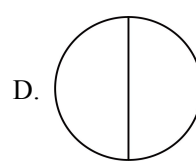
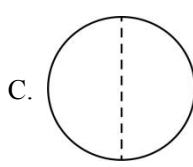
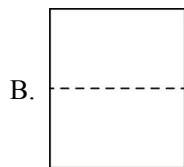
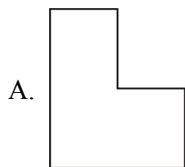
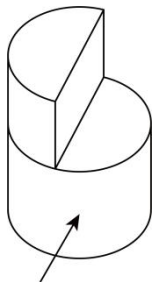
【解析】

【分析】此题主要考查正负数的意义，正数与负数表示意义相反的两种量，根据温度零上记为正，则气温零下就记为负解题即可。

【详解】解：某日最高气温是零上 8°C ，记作 $+8^{\circ}\text{C}$ ，最低气温是零下 3°C ，则记为 -3°C 。

故选：A。

2. 如图，这个几何体的俯视图是（ ）

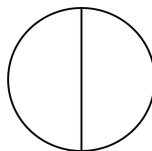


【答案】D

【解析】

【分析】本题考查俯视图的确定，理解俯视图的定义，具备良好的空间想象能力是解题关键。俯视图即为从上面看到的图形，由此判断即可。

【详解】解：根据俯视图的定义，该几何体的俯视图是



故选：D.

3. 在学校文艺汇演中，7 名参加舞蹈表演的女生身高（单位：cm）如下：

170 175 169 171 172 170 173

这组数据的中位数是（ ）

A. 175 B. 172 C. 171 D. 170

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查中位数，将一组数据按照从小到大（或从大到小）的顺序排列，如果数据的个数是奇数，则处于中间位置的数就是这组数据的中位数. 如果这组数据的个数是偶数，则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数.

【详解】解：将这组数据从小到大排列为 169、170、170、171、172、173、175，
所以这组数据的中位数为 171.

故选：C.

4. 下列运算结果正确的是（ ）

A. $4xy - 3xy = 1$

B. $(-a^2)^3 = -a^6$

C. $\sqrt{(-5)^2} = -5$

D. $\sqrt{3} + \sqrt{12} = \sqrt{15}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查的是合并同类项，积的乘方运算，算术平方根的含义，二次根式的加减运算，根据以上运算的运算法则逐一计算即可

【详解】解： $4xy - 3xy = xy$ ，故 A 不符合题意；

$(-a^2)^3 = -a^6$ ，故 B 符合题意；

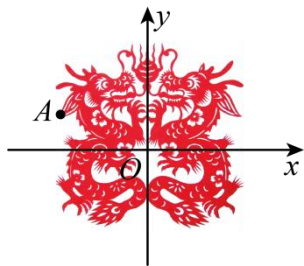
$\sqrt{(-5)^2} = 5$ ，故 C 不符合题意；

$\sqrt{3} + \sqrt{12} = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ ，故 D 不符合题意；

故选 B

5. 剪纸是我国民间艺术之一，如图放置的剪纸作品，它的对称轴与平面直角坐标系的坐标轴重合. 则点

$A(-4, 2)$ 关于对称轴对称的点的坐标为 ()



- A. $(-4, -2)$ B. $(4, -2)$ C. $(4, 2)$ D. $(-2, -4)$

【答案】C

【解析】

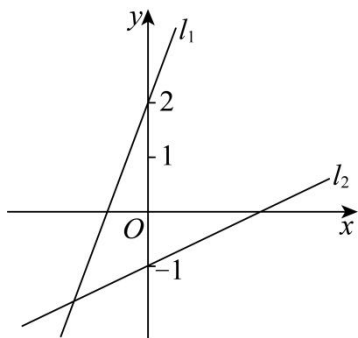
【分析】本题考查关于 y 轴对称的点的坐标. 掌握关于 y 轴对称的点的纵坐标相等, 横坐标互为相反数是解题关键. 根据关于 y 轴对称的点的坐标特点即可得出答案.

【详解】解: $\because$ 图形的对称轴是 y 轴,

$\therefore$ 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $A(-4, 2)$ 关于 y 轴对称的点的坐标为 $(4, 2)$,

故选: C.

6. 如图, 在同一平面直角坐标系中, 一次函数 $y = k_1x + b_1$ 与 $y = k_2x + b_2$ (其中 $k_1k_2 \neq 0$, k_1, k_2, b_1, b_2 为常数) 的图象分别为直线 l_1, l_2 . 下列结论正确的是 ()



- A. $b_1 + b_2 > 0$ B. $b_1b_2 > 0$ C. $k_1 + k_2 < 0$ D. $k_1k_2 < 0$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查的是一次函数的图象与性质, 直接利用一次函数的图象经过的象限以及与 y 轴的交点位置再判断即可.

【详解】解: 由一次函数 $l_1: y = k_1x + b_1$ 的图象可得:

$$k_1 > 0, b_1 > 1,$$

由一次函数 $l_2: y = k_2x + b_2$ 的图象可得:

$$k_2 > 0, b_2 = -1,$$

$$\therefore b_1 + b_2 > 0, b_1b_2 < 0, k_1 + k_2 > 0, k_1k_2 > 0,$$

正确的结论是 A, 符合题意,

故选 A.

7. 不透明的袋子中装有 1 个红球, 2 个白球, 这些球除颜色外无其他差别, 从中随机摸出一个球, 放回并摇匀, 再从中随机摸出一个球, 那么两次都摸出白球的概率是 ()

A. $\frac{1}{9}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{4}{9}$

D. $\frac{2}{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了列表法或树状图法求概率. 根据题意, 列出表格, 可得一共有 9 种等可能结果, 其中两次都摸出白球的有 4 种, 再由概率公式计算, 即可求解.

【详解】解: 根据题意, 列出表格如下:

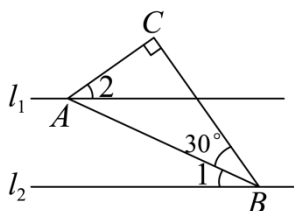
	红	白 1	白 2
红	(红, 红)	(白 1, 红)	(白 2, 红)
白 1	(红, 白 1)	(白 1, 白 1)	(白 2, 白 1)
白 2	(红, 白 2)	(白 1, 白 2)	(白 2, 白 2)

一共有 9 种等可能结果, 其中两次都摸出白球的有 4 种,

所以两次都摸出白球的概率是 $\frac{4}{9}$.

故选: C

8. 将三角尺 ABC 按如图位置摆放, 顶点 A 落在直线 l_1 上, 顶点 B 落在直线 l_2 上, 若 $l_1 \parallel l_2$, $\angle 1 = 25^\circ$, 则 $\angle 2$ 的度数是 ()



- A. 45° B. 35° C. 30° D. 25°

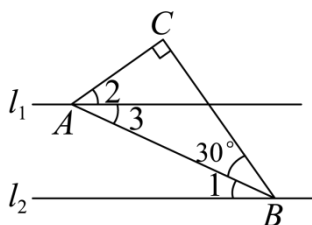
【答案】B

【解析】

【分析】本题考查平行线的性质，有关三角板中角度的计算.

由平行线的性质可求出 $\angle 3 = \angle 1 = 25^\circ$ ，又由三角板中 $\angle CAB = 60^\circ$ ，根据角的和差即可求出 $\angle 2$.

【详解】解：如图， $\because l_1 \parallel l_2$



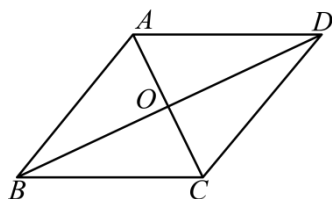
$$\therefore \angle 3 = \angle 1 = 25^\circ,$$

$$\because \text{在三角板 } ABC \text{ 中, } \angle CAB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle CAB - \angle 3 = 60^\circ - 25^\circ = 35^\circ.$$

故选：B

9. 如图， $ABCD$ 的对角线 AC ， BD 交于点 O ，以下条件不能证明 $ABCD$ 是菱形的是（ ）



- A. $\angle BAC = \angle BCA$ B. $\angle ABD = \angle CBD$
C. $OA^2 + OD^2 = AD^2$ D. $AD^2 + OA^2 = OD^2$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了菱形的判定，勾股定理的逆定理，等腰三角形的判定. 根据菱形的判定，勾股定理的逆定理，等腰三角形的判定，逐项判断即可求解.

【详解】解：A、 $\because \angle BAC = \angle BCA$,

$$\therefore AB = BC,$$

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $ABCD$ 是菱形, 故本选项不符合题意;

B、∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AD \parallel BC$,

∴ $\angle ADB = \angle CBD$,

∴ $\angle ABD = \angle ADB$,

∴ $\angle ABD = \angle CBD$

∴ $AB = AD$,

∴ $ABCD$ 是菱形, 故本选项不符合题意;

C、∵ $OA^2 + OD^2 = AD^2$,

∴ $\angle AOD = 90^\circ$, 即 $AC \perp BD$,

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $ABCD$ 是菱形, 故本选项不符合题意;

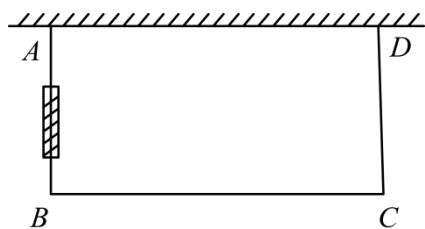
D、∵ $AD^2 + OA^2 = OD^2$,

∴ $\angle OAD = 90^\circ$, 无法得到 $ABCD$ 是菱形, 故本选项符合题意;

故选: D

10. 如图, 小程的爸爸用一段10m长的铁丝网围成一个一边靠墙(墙长5.5m)的矩形鸭舍, 其面积为 15m^2 ,

在鸭舍侧面中间位置留一个1m宽的门(由其它材料制成), 则 BC 长为 ()



A. 5m 或 6m

B. 2.5m 或 3m

C. 5m

D. 3m

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了列一元二次方程解实际问题的运用, 矩形的面积公式的运用, 正确寻找题目的等量关系是解题的关键. 设矩形场地垂直于墙一边长为 x m, 可以得出平行于墙的一边的长为 $(10 - 2x + 1)$ m. 根据矩形的面积公式建立方程即可.

【详解】解: 设矩形场地垂直于墙一边长为 x m,
则平行于墙的一边的长为 $(10 - 2x + 1)$ m,

由题意得 $x(10-2x+1)=15$,

解得: $x_1=3$, $x_2=\frac{5}{2}$,

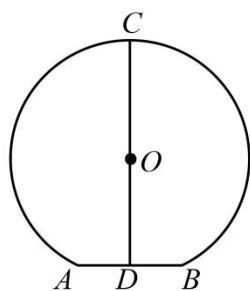
当 $x=3$ 时, 平行于墙的一边的长为 $10-2\times 3+1=5<5.5$;

当 $x=\frac{5}{2}$ 时, 平行于墙的一边的长为 $10-2\times \frac{5}{2}+1=6>5.5$, 不符合题意;

$\therefore$ 该矩形场地 BC 长为 5 米,

故选 C.

11. 如图, 圆形拱门最下端 AB 在地面上, D 为 AB 的中点, C 为拱门最高点, 线段 CD 经过拱门所在圆的圆心, 若 $AB=1\text{m}$, $CD=2.5\text{m}$, 则拱门所在圆的半径为 ()



A. 1.25m

B. 1.3m

C. 1.4m

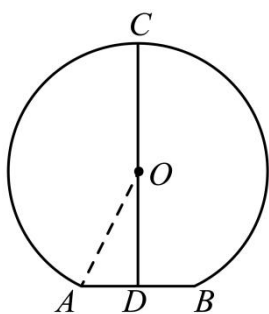
D. 1.45m

【答案】B

【解析】

【分析】 本题考查的是垂径定理的实际应用. 勾股定理的应用, 如图, 连接 OA , 先证明 $CD \perp AB$, $AD=BD=0.5$, 再进一步的利用勾股定理计算即可;

【详解】 解: 如图, 连接 OA ,



$\because D$ 为 AB 的中点, C 为拱门最高点, 线段 CD 经过拱门所在圆的圆心, $AB=1\text{m}$,

$\therefore CD \perp AB$, $AD=BD=0.5$,

设拱门所在圆的半径为 r ,

$\therefore OA=OC=r$, 而 $CD=2.5\text{m}$,

$\therefore OD=2.5-r$,

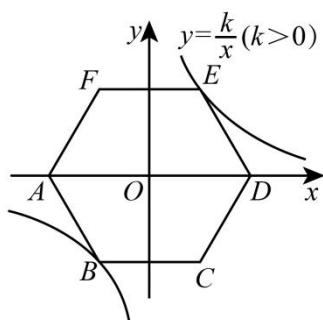
$$\therefore r^2 = 0.5^2 + (2.5 - r)^2,$$

解得： $r = 1.3$,

$\therefore$ 拱门所在圆的半径为 1.3m ;

故选 B

12. 如图，平面直角坐标系中，原点 O 为正六边形 $ABCDEF$ 的中心， $EF \parallel x$ 轴，点 E 在双曲线 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数， $k > 0$) 上，将正六边形 $ABCDEF$ 向上平移 $\sqrt{3}$ 个单位长度，点 D 恰好落在双曲线上，则 k 的值为 ()



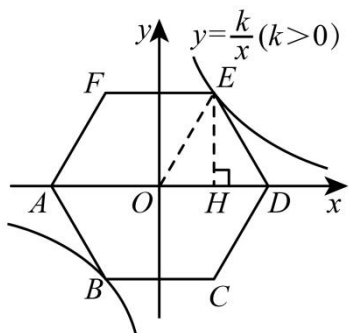
- A. $4\sqrt{3}$ B. $3\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{3}$ D. 3

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题主要考查了求反比例函数解析式，正六边形的性质，等边三角形的性质与判定，勾股定理等等，过点 E 作 $EH \perp x$ 轴于 H ，连接 OE ，可证明 $\triangle OED$ 是等边三角形，则 $DE = OD$ ， $OH = DH = \frac{1}{2}OD$ ，进而得到 $EH = \frac{\sqrt{3}}{2}OD$ ，设 $OD = 2m$ ，则 $OH = m$ ， $HE = \sqrt{3}m$ ，则 $E(m, \sqrt{3}m)$ ， $D(2m, 0)$ ，即可得到点 $(2m, \sqrt{3})$ 在双曲线上，再由点 E 也在双曲线上，得到 $k = 2m \cdot \sqrt{3} = m \cdot \sqrt{3}m$ ，据此求解即可。

【详解】 解： 如图所示，过点 E 作 $EH \perp x$ 轴于 H ，连接 OE ，



$\therefore$ 原点 O 为正六边形 $ABCDEF$ 的中心，

$$\therefore OE = OD, \quad \angle EOD = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle OED$ 是等边三角形,

$$\therefore DE = OD,$$

$$\because EH \perp OD,$$

$$\therefore OH = DH = \frac{1}{2}OD,$$

$$\therefore EH = \sqrt{DE^2 - DH^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}OD,$$

设 $OD = 2m$, 则 $OH = m$, $HE = \sqrt{3}m$,

$$\therefore E(m, \sqrt{3}m), \quad D(2m, 0),$$

$\therefore$ 将正六边形 $ABCDEF$ 向上平移 $\sqrt{3}$ 个单位长度, 点 D 恰好落在双曲线上,

$$\therefore \text{点 } (2m, \sqrt{3}) \text{ 在双曲线上},$$

又 $\because$ 点 E 也在双曲线上,

$$\therefore k = 2m \cdot \sqrt{3} = m \cdot \sqrt{3}m,$$

解得 $m = 2$ 或 $m = 0$ (舍去),

$$\therefore k = 2m \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3},$$

故选: A.

二、填空题 (本题包括 5 道小题, 每小题 3 分, 共 15 分, 将答案直接填在答题卡对应题的横线上)

13. 因式分解 $3ax^2 - 6axy + 3ay^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $3a(x - y)^2$

【解析】

【分析】 先提公因式, 再利用完全平方公式进行因式分解即可.

【详解】 解: 原式 $= 3a(x^2 - 2xy + y^2) = 3a(x - y)^2$;

故答案为: $3a(x - y)^2$.

【点睛】 本题考查因式分解. 解题的关键是掌握因式分解的方法.

14. 如图, 根据机器零件的设计图纸, 用不等式表示零件长度 L 的合格尺寸 (L 的取值范围) $\underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $39.99 \leq L \leq 40.01$

【解析】

【分析】 本题考查由实际问题抽象出一元一次不等式组，是基础考点，掌握相关知识是解题关键．根据机器零件的设计图纸给定的数值，可求出 L 的取值范围．

【详解】 解：由题意得， $40 - 0.01 \leq L \leq 40 + 0.01$

$\therefore 39.99 \leq L \leq 40.01$ ．

故答案为： $39.99 \leq L \leq 40.01$

15. 分式方程 $\frac{3}{x-2} = \frac{2}{x}$ 的解为_____．

【答案】 $x = -4$

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程，先化为整式方程，然后求解并检验即可求解．

【详解】 解： $\frac{3}{x-2} = \frac{2}{x}$

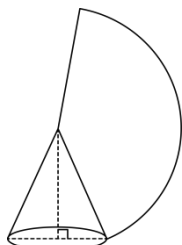
$$3x = 2(x-2)$$

解得： $x = -4$

经检验 $x = -4$ 是原方程的解，

故答案为： $x = -4$ ．

16. 如图，为便于研究圆锥与扇形的关系，小方同学利用扇形纸片恰好围成一个底面半径为 5cm ，母线长为 12cm 的圆锥的侧面，那么这个扇形纸片的面积是_____ cm^2 （结果用含 π 的式子表示）．



【答案】 60π

【解析】

【分析】 本题考查了圆锥侧面积的计算，圆锥的底面圆的周长等于侧面展开扇形的弧长，再利用扇形的面积公式计算即可．

【详解】解：∵底面半径为5cm，

∴圆锥底面圆的周长为 $2\pi \times 5 = 10\pi(\text{cm})$ ，

即扇形纸片的弧长为 $10\pi\text{cm}$ ，

∴母线长为12cm，

∴圆锥的侧面积 $\frac{1}{2} \times 12 \times 10\pi = 60\pi(\text{cm}^2)$ 。

故答案为： 60π

17. 关于抛物线 $y = x^2 - 2mx + m^2 + m - 4$ (m 是常数)，下列结论正确的是_____ (填写所有正确结论的序号)。

①当 $m = 0$ 时，抛物线的对称轴是 y 轴；

②若此抛物线与 x 轴只有一个公共点，则 $m = -4$ ；

③若点 $A(m-2, y_1)$ ， $B(m+1, y_2)$ 在抛物线上，则 $y_1 < y_2$ ；

④无论 m 为何值，抛物线的顶点到直线 $y = x$ 的距离都等于 $2\sqrt{2}$ 。

【答案】 ①④##④①

【解析】

【分析】本题主要考查了二次函数的图象和性质。①把 $m = 0$ 代入解析式，即可判断；②利用一元二次方程根的判别式，即可判断；③把抛物线解析式化为顶点式可得抛物线的对称轴为直线 $x = m$ ，再由二次函数的性质，即可判断；④根据题意可得抛物线的顶点坐标在直线 $y = x - 4$ 上，即可判断。

【详解】解：当 $m = 0$ 时， $y = x^2 - 4$ ，此时抛物线的对称轴是 y 轴，故①正确；

∴此抛物线与 x 轴只有一个公共点，

∴方程 $x^2 - 2mx + m^2 + m - 4 = 0$ 的有两个相等的实数根，

$$\therefore \Delta = (-2m)^2 - 4(m^2 + m - 4) = 0,$$

解得： $m = 4$ ，故②错误；

$$\therefore y = x^2 - 2mx + m^2 + m - 4 = (x - m)^2 + m - 4,$$

∴抛物线的对称轴为直线 $x = m$ ，

∴ $1 > 0$ ，

∴离对称轴距离越远的点的纵坐标越大，

∴点 $A(m-2, y_1)$ ， $B(m+1, y_2)$ 在抛物线上，且 $|m-2-m| > |m+1-m|$ ，

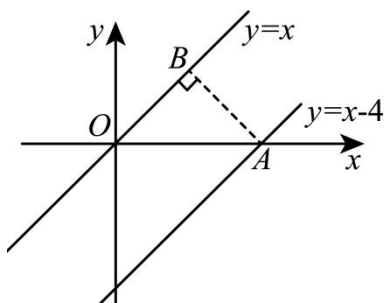
$\therefore y_1 > y_2$ ，故③错误；

$$\because y = x^2 - 2mx + m^2 + m - 4 = (x - m)^2 + m - 4,$$

$\therefore$ 抛物线的顶点坐标为 $(m, m - 4)$ ，

$\therefore$ 抛物线的顶点坐标在直线 $y = x - 4$ 上，

如图，过点 A 作 $AB \perp$ 直线 $y = x$ 于点 B ，则点 $A(4, 0)$ ， $\angle AOB = 45^\circ$ ， $OA = 4$ ，



$\therefore \triangle OAB$ 是等腰直角三角形，

$\therefore AB = \frac{\sqrt{2}}{2} OA = 2\sqrt{2}$ ，即抛物线的顶点到直线 $y = x$ 的距离都等于 $2\sqrt{2}$ ，故④正确.

故答案为：①④

三、解答题（本题包括 9 道小题，共 69 分，每小题分值均在各题号后面标出，请在答题卡上写出解答各题的文字说明、证明过程或计算步骤）

18. 计算： $|\sqrt{3} - 2| + 2\sin 60^\circ - (-\pi)^0$.

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题考查的是含特殊角的三角函数值的混合运算，先计算绝对值，零指数幂，代入特殊角的三角函数值，再合并即可；

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解：} & |\sqrt{3} - 2| + 2\sin 60^\circ - (-\pi)^0 \\ &= 2 - \sqrt{3} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \\ &= 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

19. 先化简，再求值： $(2a + b)(2a - b) - (a + b)(4a - b)$ ，其中 $a = -\sqrt{2}$ ， $b = 2$.

【答案】 $-3ab, 6\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查的是整式的混合运算，化简求值，先计算整式的乘法运算，再合并同类项，最后代入计算即可；

【详解】 解： $(2a+b)(2a-b)-(a+b)(4a-b)$

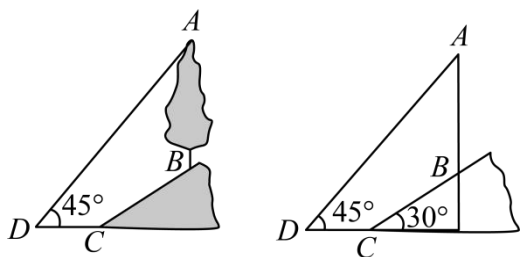
$$= 4a^2 - b^2 - 4a^2 + ab - 4ab + b^2$$

$$= -3ab,$$

当 $a = -\sqrt{2}, b = 2$ 时，

$$\text{原式} = -3 \times (-\sqrt{2}) \times 2 = 6\sqrt{2};$$

20. 在“综合与实践”活动课上，活动小组测量一棵杨树的高度．如图，从 C 点测得杨树底端 B 点的仰角是 30° ， BC 长 6 米，在距离 C 点 4 米处的 D 点测得杨树顶端 A 点的仰角为 45° ，求杨树 AB 的高度（精确到 0.1 米， AB, BC, CD 在同一平面内，点 C, D 在同一水平线上．参考数据： $\sqrt{3} \approx 1.73$ ）．

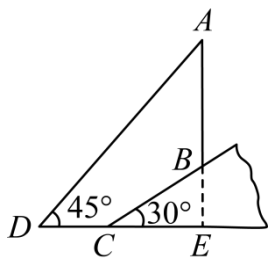


【答案】 6.2 米

【解析】

【分析】 本题考查了解直角三角形的应用——仰角俯角问题，勾股定理，等腰直角三角形性质定理，熟练掌握勾股定理是解题的关键．分别在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 表示出 BE, CE ，在得出 DE ，在 $\text{Rt}\triangle AED$ 中，根据等腰三角形的性质得 $AE = DE$ ，即可得出答案．

【详解】 解：过点 B 作 $BE \perp DC$ 于点 E ，



在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 中， $\angle BCE = 30^\circ$ ， $BC = 6$ 米，

$$\therefore BE = \frac{1}{2}BC = 3 \text{ 米}, \quad CE = \sqrt{BC^2 - BE^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3} \text{ 米},$$

$$\because DC = 4 \text{ 米},$$

$$\therefore DE = DC + CE = (4 + 3\sqrt{3}) \text{ 米}$$

在 $\text{Rt}\triangle AED$ 中, $\angle ADE = 45^\circ$,

$$\therefore AE = DE = (4 + 3\sqrt{3}) \text{ 米},$$

$$\therefore AB = AE - BE = 4 + 3\sqrt{3} - 3 = (1 + 3\sqrt{3}) \text{ 米},$$

$$\because \sqrt{3} \approx 1.73,$$

$$\therefore AB = 1 + 3 \times 1.73 \approx 6.19 \approx 6.2 \text{ 米}.$$

答: 杨树 AB 的高度约 6.2 米.

21. 为迎接 2024 年 5 月 26 日的科尔沁马拉松赛, 某中学七年级提前开展了一次“马拉松”历史知识测试. 七年级 600 名学生全部参加本次测试, 调查研究小组随机抽取 50 名学生的测试成绩 (百分制) 作为一个样本.

【收集数据】

调查研究小组收集到 50 名学生的测试成绩:

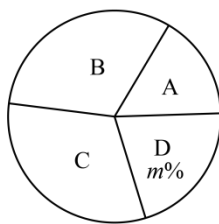
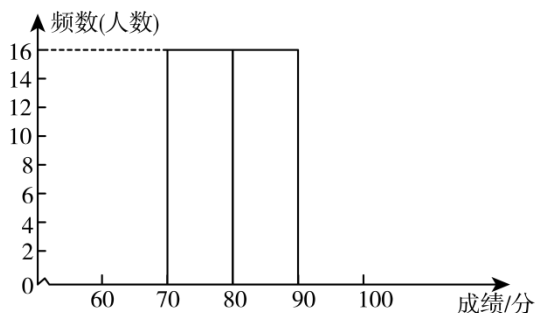
60	61	62	94	73	73	85	85	87	72
63	64	70	66	74	65	67	75	76	71
94	93	84	91	76	82	83	83	92	84
80	80	82	92	91	86	77	86	88	72
70	71	93	90	81	90	74	78	81	75

【整理描述数据】

通过整理数据, 得到以下尚不完整的频数分布表, 频数分布直方图和扇形统计图:

组别	成绩分组	频数
A	$60 \leq x < 70$	a
B	$70 \leq x < 80$	16
C	$80 \leq x < 90$	16

D	$90 \leq x \leq 100$	b
-----	----------------------	-----



- (1) 频数分布表中 $a = \underline{\quad\quad}$, $b = \underline{\quad\quad}$, 并补全频数分布直方图;
 (2) 扇形统计图中 $m = \underline{\quad\quad}$, D 所对应的扇形的圆心角度数是 $\underline{\quad\quad}$.

【应用数据】

- (3) 若成绩不低于 90 分为优秀, 请你估计参加这次知识测试的七年级学生中, 成绩为优秀的人数.

【答案】 (1) 8; 10, 补全图形见解析; (2) 20; 72° ; (3) 120 人

【解析】

【分析】 本题考查的是从统计图表中获取信息, 利用样本估计总体;

- (1) 根据整理数据的结果可得 a, b 的值, 再补全频数分布直方图即可;
 (2) 由 D 的人数除以总人数可得 m 的值, 由 360° 乘以 D 的百分比可得圆心角的大小;
 (3) 由总人数乘以 D 的百分比即可得到答案;

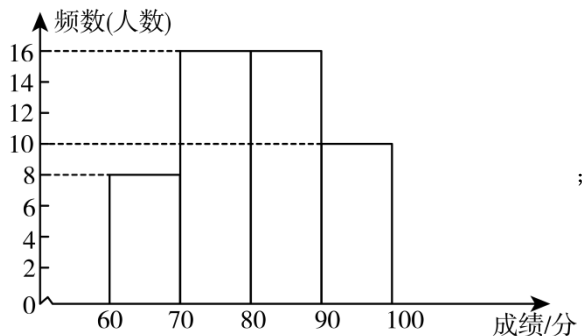
【详解】 解: (1) 整理数据可得: $60 \leq x < 70$ 有: 60、61、62、63、64、66、65、67;

$$\therefore a = 8;$$

$90 \leq x \leq 100$ 的有: 94、94、93、91、92、92、91、93、90、90、

$$\therefore b = 10;$$

补全图形如下:



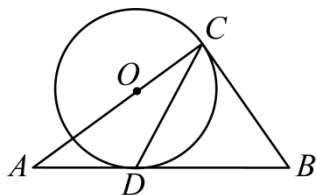
$$(2) \text{ 由 } \frac{10}{50} = 20\%,$$

$$\therefore m = 20;$$

D 所对应的扇形的圆心角度数是 $360^\circ \times 20\% = 72^\circ$;

(3) 若成绩不低于 90 分为优秀，估计参加这次知识测试的七年级学生中，成绩为优秀的有 $600 \times 20\% = 120$ (人)；

22. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 O 为 AC 边上一点，以点 O 为圆心， OC 为半径作圆与 AB 相切于点 D ，连接 CD 。



- (1) 求证： $\angle ABC = 2\angle ACD$ ；
 (2) 若 $AC = 8$ ， $BC = 6$ ，求 $\odot O$ 的半径。

【答案】(1) 证明见解析

(2) 3

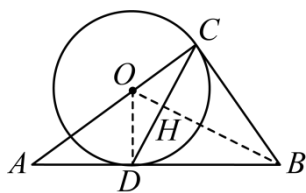
【解析】

【分析】(1) 连接 OD ，根据题意可得 $\angle ODA = 90^\circ$ ，根据余角的性质可得 $\angle AOD = \angle ABC$ ，根据圆周角定理可得 $\angle AOD = 2\angle ACD$ ，等量代换即可得证；

(2) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，勾股定理求得 $AB = 10$ ，证明 $\text{Rt}\triangle ODB \cong \text{Rt}\triangle OCB$ (HL)，设 $\odot O$ 的半径为 r ，则 $OD = OC = r$ ， $OA = 8 - r$ ，在 $\text{Rt}\triangle AOD$ 中， $r^2 + 4^2 = (8 - r)^2$ ，解方程即可求解。

【小问 1 详解】

证明：如图，连接 OD ，



$\because AB$ 为切线，

$\therefore OD \perp AB$ ，

$\therefore \angle ODA = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle A + \angle AOD = 90^\circ$ ，

$\because \angle ACB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ABC + \angle A = 90^\circ$

$\therefore \angle AOD = \angle ABC$ ，

$\because \angle AOD = 2\angle ACD$ ，

$$\therefore \angle ABC = 2\angle ACD.$$

【小问 2 详解】

解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ ，

$$\because \angle OCB = 90^\circ = \angle ODB,$$

在 $\text{Rt}\triangle ODB$ 和 $\text{Rt}\triangle OCB$ 中， $OD = OC$ ， $OB = OB$ ，

$$\therefore \text{Rt}\triangle ODB \cong \text{Rt}\triangle OCB (\text{HL}),$$

$$\therefore BD = BC = 6,$$

$$\therefore AD = AB - BD = 4,$$

设 $\odot O$ 的半径为 r ，则 $OD = OC = r$ ， $OA = 8 - r$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AOD$ 中， $r^2 + 4^2 = (8 - r)^2$ ，

解得 $r = 3$ ，

$\therefore \odot O$ 半径的长为 3

【点睛】本题考查了圆周角定理，切线的性质，全等三角形的判定与性质，勾股定理的应用，掌握以上知识是解题的关键.

23. 某中学为加强新时代中学生劳动教育，开辟了劳动教育实践基地. 在基地建设过程中，需要采购煎蛋器和三明治机. 经过调查，购买 2 台煎蛋器和 1 台三明治机需 240 元，购买 1 台煎蛋器和 3 台三明治机需 395 元.

- (1) 求煎蛋器和三明治机每台价格各是多少元；
- (2) 学校准备采购这两种机器共 50 台，其中要求三明治机的台数不少于煎蛋器台数的一半，请你给出最节省费用的购买方案.

【答案】(1) 煎蛋器单价为 65 元/台，三明治机单价为 110 元/台；

(2) 购买方案为：购买煎蛋器 33 台，三明治机 17 台.

【解析】

【分析】(1) 设煎蛋器每台 x 元，三明治机每台 y 元，根据购买 2 台煎蛋器和 1 台三明治机需 240 元，购买 1 台煎蛋器和 3 台三明治机需 395 元，列出方程组，解方程组即可；

(2) 设煎蛋器采购 a 台，则三明治机采购 $(50 - a)$ 台，根据三明治机的台数不少于煎蛋器台数的一半，列出不等式，可得 a 的范围，设总的购买费用为 w 元，再结合一次函数的性质可得答案.

【小问 1 详解】

解：设煎蛋器每台 x 元，三明治机每台 y 元.

由题意得：
$$\begin{cases} 2x + y = 240 \\ x + 3y = 395 \end{cases},$$

解得：
$$\begin{cases} x = 65 \\ y = 110 \end{cases},$$

答：煎蛋器单价为 65 元/台，三明治机单价为 110 元/台；

【小问 2 详解】

解：设煎蛋器采购 a 台，则三明治机采购 $(50 - a)$ 台，

由题意得： $50 - a \geq \frac{1}{2}a,$

解得： $a \leq \frac{100}{3},$

$\therefore a$ 只能取正整数，

$\therefore a$ 的最大值为 33，

设总的购买费用为 w 元，

$$\therefore w = 65a + 110(50 - a)$$

$$= -45a + 5500,$$

$$\therefore k = -45 < 0,$$

$\therefore$ 当 $a = 33$ 时，费用最低，

此时的购买方案为：购买煎蛋器 33 台，三明治机 17 台；

答：购买方案为：购买煎蛋器 33 台，三明治机 17 台。

【点睛】 本题考查的是二元一次方程组的应用，一元一次不等式的应用，一次函数的应用，确定相等关系与不等关系是解本题的关键。

24. 【实际情境】

手工课堂上，老师给每个制作小组发放一把花折伞和制作花折伞的材料及工具。同学们认真观察后，组装了花折伞的骨架，粘贴了彩色伞面，制作出精美的花折伞。



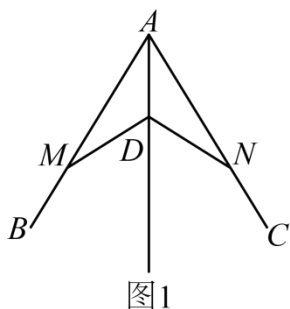


图1

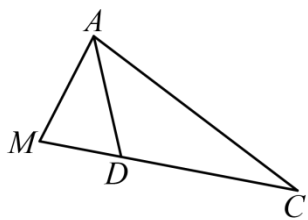


图2

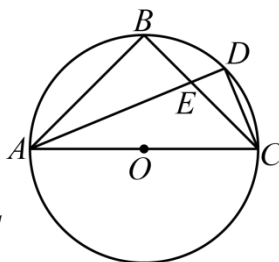


图3

【模型建立】

(1) 如图 1, 从花折伞中抽象出“伞形图”. $AM = AN$, $DM = DN$. 求证: $\angle AMD = \angle AND$.

【模型应用】

(2) 如图 2, $\triangle AMC$ 中, $\angle MAC$ 的平分线 AD 交 MC 于点 D . 请你从以下两个条件:

① $\angle AMD = 2\angle C$; ② $AC = AM + MD$ 中选择一个作为已知条件, 另一个作为结论, 并写出结论成立的证明过程. (注: 只需选择一种情况作答)

【拓展提升】

(3) 如图 3, AC 为 $\odot O$ 的直径, $\widehat{AB} = \widehat{BC}$, $\angle BAC$ 的平分线 AD 交 BC 于点 E , 交 $\odot O$ 于点 D , 连接 CD . 求证: $AE = 2CD$.

【答案】(1) 见解析; (2) 选择②为条件, ①为结论或选择①为条件, ②为结论; 证明见解析; (3) 见解析

【解析】

【分析】本题主要考查了全等三角形的判定和性质, 圆周角定理, 等腰三角形的判定和性质, 直角三角形斜边上的中线性, 三角形的外角性质等:

(1) 利用 SSS 证明 $\triangle ADM \cong \triangle ADN$, 即可;

(2) 选择②为条件, ①为结论: 在 AC 取点 N , 使 $AN = AM$, 连接 DN , 证明 $\triangle ADM \cong \triangle ADN$, 可得 $DM = DN$, $\angle AMD = \angle AND$, 再由 $AC = AM + MD$, 可得 $DN = CN$, 从而得到 $\angle C = \angle CDN$, 即可; 选择①为条件, ②为结论: 在 AC 取点 N , 使 $AN = AM$, 连接 DN , 证明 $\triangle ADM \cong \triangle ADN$, 可得 $DM = DN$, $\angle AMD = \angle AND$, 再由 $\angle AMD = 2\angle C$, 可得 $\angle C = \angle CDN$, 从而得到 $DN = CN$, 即可;

(3) 连接 BD , 取 AE 的中点 F , 连接 BF , 根据圆周角定理可得 $BD = CD$, 从而得到 $\angle BCD = \angle CBD$, 再由 AC 为 $\odot O$ 的直径, 可得 $AE = 2BF = 2AF$, 从而得到 $\angle ABF = \angle BAF$, 然后根据 $\widehat{AB} = \widehat{BC}$, 可得 $AB = BC$, 可证明 $\triangle ABF \cong \triangle CBD$, 从而得到 $BF = BD = CD$, 即可.

【详解】解: (1) 在 $\triangle ADM$ 和 $\triangle ADN$ 中,

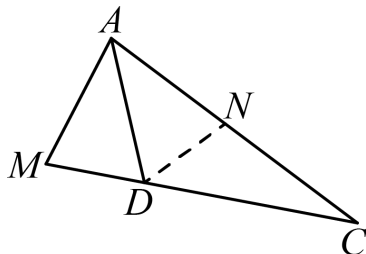
$$\therefore AM = AN, DM = DN, AD = AD,$$

$$\therefore \triangle ADM \cong \triangle ADN (\text{SSS}),$$

$$\therefore \angle AMD = \angle AND;$$

(2) 解：选择②为条件，①为结论

如图，在 AC 取点 N ，使 $AN = AM$ ，连接 DN ，



$$\because AD \text{ 平分 } \angle MAC,$$

$$\therefore \angle DAM = \angle DAN,$$

在 $\triangle ADM$ 和 $\triangle ADN$ 中，

$$\because AM = AN, \angle DAM = \angle DAN, AD = AD,$$

$$\therefore \triangle ADM \cong \triangle ADN (\text{SAS}),$$

$$\therefore DM = DN, \angle AMD = \angle AND,$$

$$\because AC = AM + MD, AC = AN + NC,$$

$$\therefore DM = CN,$$

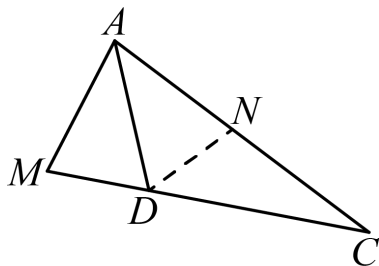
$$\therefore DN = CN,$$

$$\therefore \angle C = \angle CDN,$$

$$\therefore \angle AMD = \angle AND = \angle CDN + \angle C = 2\angle C;$$

选择①为条件，②为结论

如图，在 AC 取点 N ，使 $AN = AM$ ，连接 DN ，



$$\because AD \text{ 平分 } \angle MAC,$$

$$\therefore \angle DAM = \angle DAN,$$

在 $\triangle ADM$ 和 $\triangle ADN$ 中，

$$\because AM = AN, \angle DAM = \angle DAN, AD = AD,$$

$$\therefore \triangle ADM \cong \triangle ADN (\text{SAS}),$$

$$\therefore DM = DN, \quad \angle AMD = \angle AND,$$

$$\because \angle AMD = 2\angle C,$$

$$\therefore \angle AND = 2\angle C = \angle CDN + \angle C,$$

$$\therefore \angle CDN = \angle C,$$

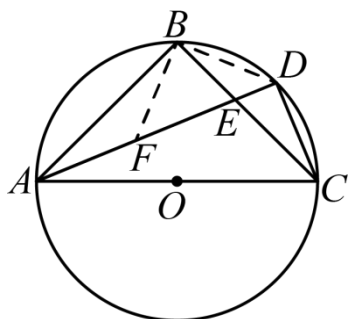
$$\therefore DN = CN,$$

$$\therefore DM = CN,$$

$$\because AC = AN + NC,$$

$$\therefore AC = AM + MD;$$

(3) 如图, 连接 BD , 取 AE 的中点 F , 连接 BF ,



$$\because \angle BAC \text{ 的平分线 } AD,$$

$$\therefore \widehat{DC} = \widehat{BD},$$

$$\therefore BD = CD,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle CBD,$$

$$\because AC \text{ 为 } \odot O \text{ 的直径},$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore AE = 2BF = 2AF,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle BAF,$$

$$\because \angle BAF = \angle BCD,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle CBD,$$

$$\because \widehat{AB} = \widehat{BC},$$

$$\therefore AB = BC,$$

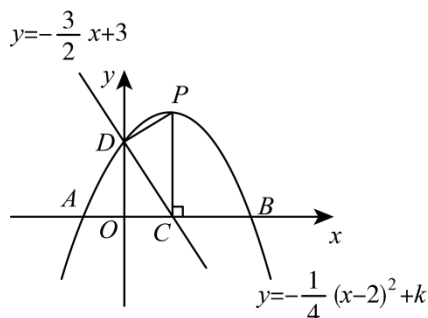
$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CBD,$$

$$\therefore BF = BD = CD,$$

$$\therefore AE = 2CD.$$

25. 如图，在平面直角坐标系中，直线 $y = -\frac{3}{2}x + 3$ 与 x 轴， y 轴分别交于点 C ， D ，抛物线

$y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + k$ (k 为常数) 经过点 D 且交 x 轴于 A, B 两点.



(1) 求抛物线表示的函数解析式;

(2) 若点 P 为抛物线的顶点，连接 AD ， DP ， CP 。求四边形 $ACPD$ 的面积。

【答案】(1) $y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 4$

(2) 10

【解析】

【分析】本题考查函数图象与坐标轴的交点，待定系数法求解析式，三角形的面积

(1) 分别把 $y = 0$ ， $x = 0$ 代入函数 $y = -\frac{3}{2}x + 3$ 中，可求得点 $C(2, 0)$ ， $D(0, 3)$ ，将点 D 坐标代入函数 $y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + k$ ，求出 k 的值，即可解答；

(2) 由抛物线的函数解析式可得顶点 P 的坐标为 $(2, 4)$ ，因此 $PC \perp x$ 轴， $PC = 4$ ，过点 D 作 $DE \perp PC$ 于点 E ，则 $DE = 2$ ，根据三角形的面积公式可求出 $S_{\triangle CDP} = \frac{1}{2}PC \cdot DE = 4$ ；把 $y = 0$ 代入函数 $y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 4$ 中，求得 $A(-2, 0)$ ，因此 $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}AC \cdot DO = 6$ ，再根据 $S_{\text{四边形}ACPD} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle CDP}$ 即可解答。

【小问 1 详解】

解：把 $y = 0$ 代入函数 $y = -\frac{3}{2}x + 3$ 中，得 $-\frac{3}{2}x + 3 = 0$ ，

解得 $x = 2$ ，

$\therefore C(2, 0)$ ，

把 $x = 0$ 代入函数 $y = -\frac{3}{2}x + 3$ 中，得 $y = 3$ ，

$\therefore D(0, 3)$ ，

$\therefore$ 抛物线 $y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + k$ (k 为常数) 经过点 D ,

$$\therefore -\frac{1}{4} \times (0-2)^2 + k = 3, \text{ 解得 } k = 4,$$

$\therefore$ 抛物线表示的函数解析式为 $y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 4$;

【小问 2 详解】

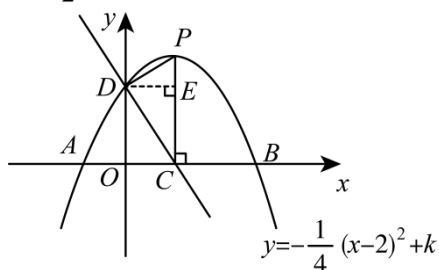
解: $\because$ 抛物线的函数解析式为 $y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 4$,

$\therefore$ 顶点 P 的坐标为 $(2, 4)$,

$\therefore C(2, 0)$,

$\therefore PC \perp x$ 轴, $PC = 4$,

$$y = -\frac{3}{2}x + 3$$



过点 D 作 $DE \perp PC$ 于点 E , 则 $DE = 2$,

$$\therefore S_{\triangle CDP} = \frac{1}{2} PC \cdot DE = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4;$$

把 $y = 0$ 代入函数 $y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 4$ 中, 得 $-\frac{1}{4}(x-2)^2 + 4 = 0$,

解得 $x_1 = -2$, $x_2 = 6$,

$\therefore A(-2, 0)$, $B(6, 0)$,

$\therefore AC = 4$,

$\therefore D(0, 3)$,

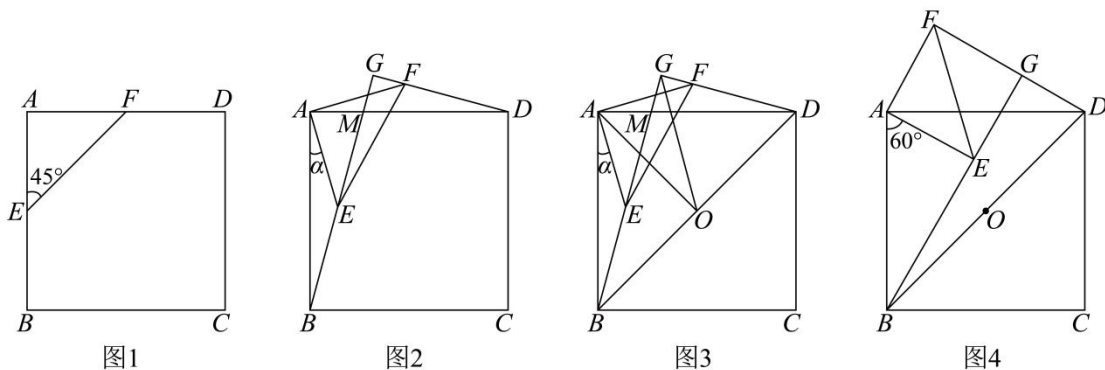
$\therefore DO = 3$

$$\therefore S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot DO = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ACPD} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle CDP} = 6 + 4 = 10.$$

26. 数学活动课上, 某小组将一个含 45° 的三角尺 AEF 利一个正方形纸板 $ABCD$ 如图 1 摆放, 若 $AE = 1$,

$AB = 2$. 将三角尺 AEF 绕点 A 逆时针方向旋转 α ($0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$) 角, 观察图形的变化, 完成探究活动.



【初步探究】

如图 2，连接 BE ， DF 并延长，延长线相交于点 G ， BG 交 AD 于点 M 。

问题 1 BE 和 DF 的数量关系是_____，位置关系是_____。

【深入探究】

应用问题 1 的结论解决下面的问题。

问题 2 如图 3，连接 BD ，点 O 是 BD 的中点，连接 OA ， OG 。求证 $OA = OD = OG$ 。

【尝试应用】

问题 3 如图 4，请直接写出当旋转角 α 从 0° 变化到 60° 时，点 G 经过路线的长度。

【答案】(1) $BE = DF$ ； $BE \perp DF$ ；(2) 证明见解析；(3) $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$

【解析】

【分析】(1) 如图，由四边形 $ABCD$ 是正方形， $\triangle AEF$ 是等腰直角三角形， $AE = 1$ ，证明 $\triangle BAE \cong \triangle DAF$ ，再进一步可得结论；

(2) 如图，由 $\angle BAD = 90^\circ$ ， $\angle BGD = 90^\circ$ ，再结合直角三角形斜边上的中线的性质可得结论；

(3) 如图，证明 G 在以 O 为圆心， OD 为半径的 $\odot O$ 上，过 F 作 $FN \perp AD$ 于 N ，当 $\angle BAE = \alpha = 60^\circ$ 时，证明 $\angle AFD = 90^\circ$ ，可得 $\angle ADF = 30^\circ$ ， $\angle AOG = 2\angle ADF = 60^\circ$ ，证明四边形 $AEGF$ 是正方形，可得当旋转角 α 从 0° 变化到 60° 时， G 在 $\widehat{AG}$ 上运动，再进一步解答即可；

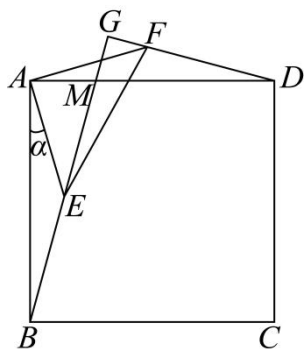
【详解】解： $BE = DF$ ； $BE \perp DF$ ；理由如下：

如图， $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB = BC = CD = AD = 2$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ，

$\because \triangle AEF$ 是等腰直角三角形， $AE = 1$ ，

$\therefore AE = AF = 1$ ， $\angle EAF = 90^\circ$ ，



$$\therefore \angle BAE = \angle DAF,$$

$$\therefore \triangle BAE \cong \triangle DAF,$$

$$\therefore BE = DF, \quad \angle ABE = \angle ADF,$$

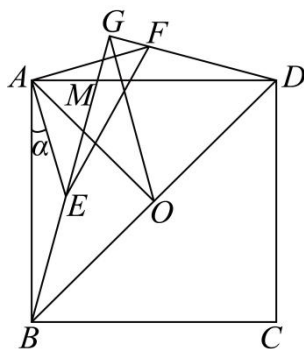
$$\therefore \angle AMB = \angle DMG,$$

$$\therefore \angle BGD = \angle BAM = 90^\circ,$$

$$\therefore BE \perp DF;$$

(2) 如图, $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ,$$



$\therefore$ 点 O 是 BD 的中点,

$$\therefore OA = OB = OD,$$

$$\therefore BE \perp DF,$$

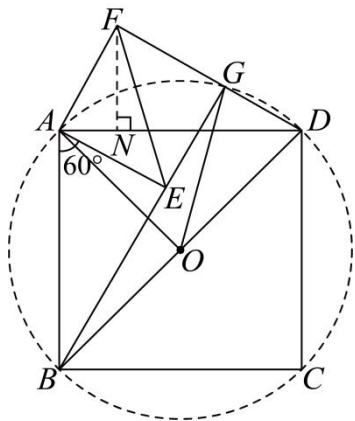
$$\therefore \angle BGD = 90^\circ,$$

$\therefore$ 点 O 是 BD 的中点,

$$\therefore OG = OB = OD,$$

$$\therefore OA = OD = OG;$$

(3) 如图, $\therefore \angle BGD = 90^\circ, \quad OB = OG = OD,$



$\therefore G$ 在以 O 为圆心, OD 为半径的 $\odot O$ 上,

过 F 作 $FN \perp AD$ 于 N ,

当 $\angle BAE = \alpha = 60^\circ$ 时,

$\therefore \angle DAF = \alpha = 60^\circ$, $\angle AFN = 30^\circ$,

$\therefore AF = AE = 1$,

$\therefore AN = \frac{1}{2}AF = \frac{1}{2}$, $FN = \sqrt{AF^2 - AN^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore DN = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $DF = \sqrt{FN^2 + DN^2} = \sqrt{3}$,

$\therefore AF^2 + DF^2 = 1 + 3 = 4 = AD^2$,

$\therefore \angle AFD = 90^\circ$,

$\therefore \angle ADF = 30^\circ$,

$\therefore \angle AOG = 2\angle ADF = 60^\circ$,

而 $\angle EAF = \angle EGF = 90^\circ$, $AE = AF = 1$,

$\therefore$ 四边形 $AEGF$ 是正方形,

$\therefore$ 当旋转角 α 从 0° 变化到 60° 时, G 在 $\widehat{AG}$ 上运动,

$\therefore AB = 2$, $OA = OB$, $AO \perp BD$,

$\therefore OA = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$,

$\therefore$ 点 G 经过路线的长度为 $\frac{60\pi \times \sqrt{2}}{180} = \frac{\sqrt{2}\pi}{3}$.

【点睛】 本题考查的是正方形的性质与判定, 旋转的性质, 勾股定理的应用, 含 30° 度角的直角三角形的性质, 圆周角的应用, 勾股定理的逆定理的应用, 弧长的计算, 作出合适的辅助线是解本题的关键.

