

2024 年初中学业水平考试试卷

数 学

注意事项：

1. 本试卷共 6 页，满分 120 分。考试时间为 120 分钟。
2. 答题前，考生务必先将自己的考生号、姓名、座位号等信息填写在试卷和答题卡的指定位置。请认真核对条形码上的相关信息后，将条形码粘贴在答题卡的指定位置。
3. 答题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
4. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本大题共有 10 小题，每小题 3 分，共 30 分。每小题只有一个正确选项，请将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。

1. 计算 $\sqrt{9^2 - 6^2}$ 所得结果是 ()

- A. 3 B. $\sqrt{6}$ C. $3\sqrt{5}$ D. $\pm 3\sqrt{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查化简二次根式，根据二次根式的性质，化简即可。

【详解】解： $\sqrt{9^2 - 6^2} = \sqrt{81 - 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ ；

故选 C.

2. 若 m, n 互为倒数，且满足 $m + mn = 3$ ，则 n 的值为 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了倒数的定义，根据 m, n 互为倒数，则 $m \cdot n = 1$ ，把 $m \cdot n = 1$ 代入 $m + mn = 3$ ，即可得出 m 的值，进一步即可得出 n 的值。

【详解】解： $\because m, n$ 互为倒数，

$$\therefore m \cdot n = 1,$$

$$\because m + mn = 3,$$

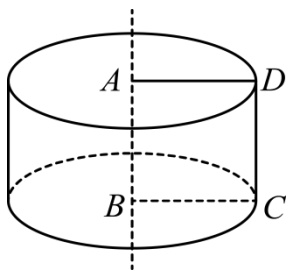
$$\therefore m = 2,$$

$$\text{则 } n = \frac{1}{2},$$

故选：B.

3. 如图，正方形 $ABCD$ 边长为 2，以 AB 所在直线为轴，将正方形 $ABCD$ 旋转一周，所得圆柱的主视图的

面积为 ()



A. 8

B. 4

C. 8π

D. 4π

【答案】A

【解析】

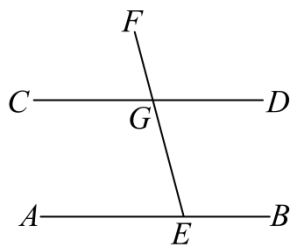
【分析】本题考查三视图，根据题意，得到主视图为长为 4，高为 2 的长方形，进行求解即可.

【详解】解：由图可知：圆柱体的主视图为长为 4，高为 2 的长方形，

$\therefore$ 面积为 $2 \times 4 = 8$;

故选 A.

4. 如图，直线 $AB \parallel CD$ ，点 E 在直线 AB 上，射线 EF 交直线 CD 于点 G ，则图中与 $\angle AEF$ 互补的角有 ()



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了平行线的性质，对顶角的性质，补角的定义等知识，利用平行线的性质得出

$\angle AEF + \angle CGE = 180^\circ$ ，得出结合对顶角的性质 $\angle AEF + \angle DGF = 180^\circ$ ，根据邻补角的定义得出

$\angle AEF + \angle BEG = 180^\circ$ ，即可求出中与 $\angle AEF$ 互补的角，即可求解.

【详解】解： $\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle AEF + \angle CGE = 180^\circ$,

$\because \angle CGE = \angle DGF$,

$\therefore \angle AEF + \angle DGF = 180^\circ$,

又 $\angle AEF + \angle BEG = 180^\circ$,

∴图中与 $\angle AEF$ 互补的角有 $\angle CGE$ ， $\angle DGF$ ， $\angle BEG$ ，共3个.

故选：C.

5. 为发展学生的阅读素养，某校开设了《西游记》《三国演义》《水浒传》和《红楼梦》四个整本书阅读项目，甲、乙两名同学都通过抽签的方式从这四个阅读项目中随机抽取一个，则他们恰好抽到同一个阅读项目的概率是（ ）

A. $\frac{1}{16}$

B. $\frac{1}{12}$

C. $\frac{1}{6}$

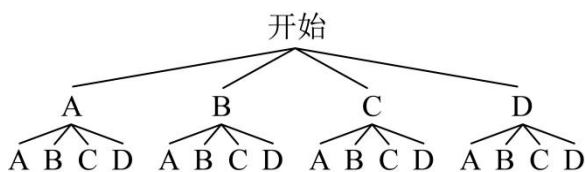
D. $\frac{1}{4}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查概率的计算，掌握画树状图法或列表法是关键，事件发生的概率=事件发生的次数÷所有可能出现的次数，解题的易错点是分清题目中抽签是否放回，先画树状图求出两位同学恰好都抽到同一个阅读项目的情况，再根据概率公式求解即可.

【详解】解：设《西游记》《三国演义》《水浒传》和《红楼梦》四个整本书阅读项目分别为A、B、C、D，画树状图如下：



一共有16种等可能的结果，其中恰好抽到同一个阅读项目的结果有4种可能，

∴他们恰好抽到同一个阅读项目的概率是 $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ ，

故选：D.

6. 将抛物线 $y = x^2 + 2x$ 向下平移2个单位后，所得新抛物线的顶点式为（ ）

A. $y = (x+1)^2 - 3$

B. $y = (x+1)^2 - 2$

C. $y = (x-1)^2 - 3$

D. $y = (x-1)^2 - 2$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了二次函数的平移以及顶点式，根据平移的规律“上加下减，左加右减”可得出平移后的抛物线为 $y = x^2 + 2x - 2$ ，再把 $y = x^2 + 2x - 2$ 化为顶点式即可.

【详解】解：抛物线 $y = x^2 + 2x$ 向下平移2个单位后，

则抛物线变为 $y = x^2 + 2x - 2$ ，

∴ $y = x^2 + 2x - 2$ 化成顶点式则为 $y = (x+1)^2 - 3$ ，

故选：A.

7. 若 $2m-1$, m , $4-m$ 这三个实数在数轴上所对应的点从左到右依次排列, 则 m 的取值范围是 ()

- A. $m < 2$ B. $m < 1$ C. $1 < m < 2$ D. $1 < m < \frac{5}{3}$

【答案】B

【解析】

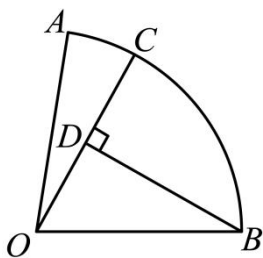
【分析】本题考查实数与数轴, 求不等式组的解集, 根据数轴上的数右边的比左边的大, 列出不等式组, 进行求解即可.

【详解】解: 由题意, 得: $2m-1 < m < 4-m$,

解得: $m < 1$;

故选 B.

8. 如图, 在扇形 AOB 中, $\angle AOB = 80^\circ$, 半径 $OA = 3$, C 是 $\widehat{AB}$ 上一点, 连接 OC , D 是 OC 上一点, 且 $OD = DC$, 连接 BD . 若 $BD \perp OC$, 则 $\widehat{AC}$ 的长为 ()



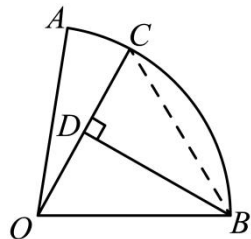
- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. π

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了弧长公式, 等边三角形的判定与性质, 线段垂直平分线的性质; 连接 BC , 根据 $OD = DC$, $BD \perp OC$, 易证 $\triangle OBC$ 是等腰三角形, 再根据 $OB = OC$, 推出 $\triangle OBC$ 是等边三角形, 得到 $\angle BOC = 60^\circ$, 即可求出 $\angle AOC = 20^\circ$, 再根据弧长公式计算即可.

【详解】解: 连接 BC ,



$\because OD = DC$, $BD \perp OC$,

$\therefore OB = BC$,

$\therefore \triangle OBC$ 是等腰三角形,

$\therefore OB = OC$,

$\therefore OB = OC = BC$,

$\triangle OBC$ 是等边三角形,

$\therefore \angle BOC = 60^\circ$,

$\therefore \angle AOB = 80^\circ$,

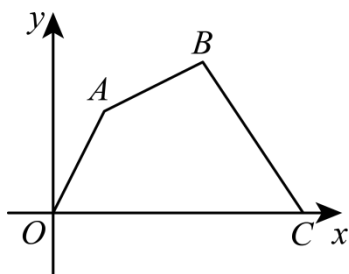
$\therefore \angle AOC = \angle AOB - \angle BOC = 20^\circ$,

$\therefore OA = 3$,

$$\therefore \widehat{AC} = \frac{20 \times 3\pi}{180} = \frac{\pi}{3},$$

故选: B.

9. 如图, 在平面直角坐标系中, 四边形 $OABC$ 各顶点的坐标分别是 $O(0,0)$, $A(1,2)$, $B(3,3)$, $C(5,0)$, 则四边形 $OABC$ 的面积为 ()



A. 14

B. 11

C. 10

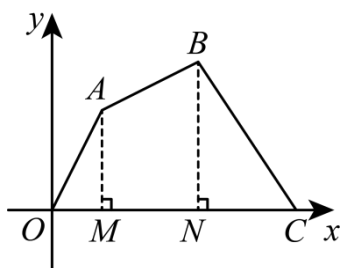
D. 9

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了坐标与图形, 过 A 作 $AM \perp OC$ 于 M , 过 B 作 $BN \perp OC$ 于 N , 根据 A 、 B 、 C 的坐标可求出 OM , AM , MN , BN , CN , 然后根据 $S_{\text{四边形}OABC} = S_{\triangle AOM} + S_{\text{梯形}AMNB} + S_{\triangle BCN}$ 求解即可.

【详解】解: 过 A 作 $AM \perp OC$ 于 M , 过 B 作 $BN \perp OC$ 于 N ,



$\therefore O(0,0)$, $A(1,2)$, $B(3,3)$, $C(5,0)$,

$$\therefore OM = 1, AM = 2, ON = BN = 3, CO = 5,$$

$$\therefore MN = ON - OM = 2, CN = OC - ON = 2,$$

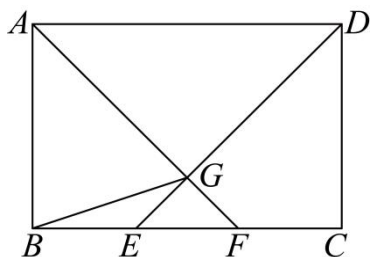
$$\therefore \text{四边形 } OABC \text{ 的面积为 } S_{\triangle AOM} + S_{\text{梯形 } AMNB} + S_{\triangle BCN}$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times 2 + \frac{1}{2} \times (2+3) \times 2 + \frac{1}{2} \times 3 \times 2$$

$$= 9,$$

故选：D.

10. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， E, F 是边 BC 上两点，且 $BE = EF = FC$ ，连接 DE, AF ， DE 与 AF 相交于点 G ，连接 BG 。若 $AB = 4$ ， $BC = 6$ ，则 $\sin \angle GBF$ 的值为（ ）



A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$

B. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{2}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查矩形的性质，相似三角形的判定和性质，求角的正弦值：过点 G 作 $GH \perp BC$ ，证明 $\triangle AGD \sim \triangle FGE$ ，得到 $\frac{FG}{AG} = \frac{EF}{AD} = \frac{1}{3}$ ，再证明 $\triangle GHF \sim \triangle ABF$ ，分别求出 HG, FH 的长，进而求出 BH 的长，勾股定理求出 BG 的长，再利用正弦的定义，求解即可。

【详解】解： $\because$ 矩形 $ABCD$ ， $BE = EF = FC$ ， $AB = 4$ ， $BC = 6$ ，

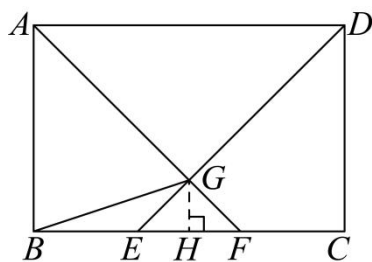
$$\therefore AD = BC = 6, AD \parallel BC, BE = EF = FC = 2,$$

$$\therefore \triangle AGD \sim \triangle FGE, BF = 4,$$

$$\therefore \frac{FG}{AG} = \frac{EF}{AD} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{FG}{AF} = \frac{1}{4}$$

过点 G 作 $GH \perp BC$ ，则： $GH \parallel AB$ ，



$$\therefore \triangle GHF \sim \triangle ABF,$$

$$\therefore \frac{FH}{BF} = \frac{GH}{AB} = \frac{FG}{AF} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore FH = \frac{1}{4}BF = 1, \quad GH = \frac{1}{4}AB = 1,$$

$$\therefore BH = BF - FH = 3,$$

$$\therefore BG = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10},$$

$$\therefore \sin \angle GBF = \frac{HG}{BG} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10};$$

故选 A.

二、填空题：本大题共有 6 小题，每小题 3 分，共 18 分．请将答案填在答题卡上对应的横线上．

11. 计算： $\sqrt[3]{8} + (-1)^{2024} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查实数的混合运算，先进行开方和乘方运算，再进行加法运算即可．

【详解】 解：原式 $= 2 + 1 = 3$ ；

故答案为： 3.

12. 已知一个 n 边形的内角和是 900° ，则 $n = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 7

【解析】

【分析】 本题考查根据多边形的内角和计算公式求多边形的边数，多边形的内角和可以表示成 $(n-2) \cdot 180^\circ$ ，依此列方程可求解．

【详解】 解：根据题意，得 $(n-2) \cdot 180^\circ = 900^\circ$ ，

解得 $n = 7$ ．

故答案为： 7

13. 在平面直角坐标系中，若一次函数的图象经过第一、二、三象限，请写出一个符合该条件的一次函数的表达式_____.

【答案】 $y = x + 1$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】 本题考查的是一次函数的性质，能根据题意判断出 k 、 b 的符号是解答此题的关键。先根据一次函数的图象经过一、二、三象限判断出函数 k 及 b 的符号，再写出符合条件的一次函数解析式即可。

【详解】 解：设一次函数的解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$,

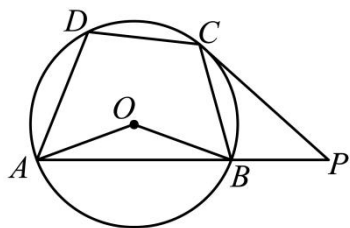
$\because$ 一次函数的图象经过一、二、三象限，

$\therefore k > 0, b > 0$,

$\therefore$ 符合该条件的一个一次函数的表达式是： $y = x + 1$ (答案不唯一)。

故答案为： $y = x + 1$ (答案不唯一)。

14. 如图，四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形，点 O 在四边形 $ABCD$ 内部，过点 C 作 $\odot O$ 的切线交 AB 的延长线于点 P ，连接 OA, OB 。若 $\angle AOB = 140^\circ$ ， $\angle BCP = 35^\circ$ ，则 $\angle ADC$ 的度数为_____.

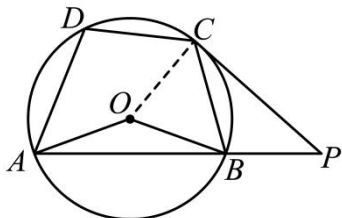


【答案】 105° ## 105 度

【解析】

【分析】 本题考查了切线的性质，等腰三角形的性质，圆内接四边形的性质等知识，连接 OC ，利用等边对等角得出 $\angle OAB = \angle OBA = 20^\circ$ ， $\angle OCB = \angle OBC$ ，利用切线的性质可求出 $\angle OBC = \angle OCB = 55^\circ$ ，然后利用圆内接四边形的性质求解即可。

【详解】 解：连接 OC ，



$\because OA = OB = OC$ ， $\angle AOB = 140^\circ$ ，

$\therefore \angle OAB = \angle OBA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOB) = 20^\circ$ ， $\angle OCB = \angle OBC$ ，

$\because CP$ 是切线,

$\therefore \angle OCP = 90^\circ$, 即 $\angle OCB + \angle BCP = 90^\circ$,

$\therefore \angle BCP = 35^\circ$,

$\therefore \angle OBC = \angle OCB = 55^\circ$,

$\therefore \angle ABC = \angle ABO + \angle OBC = 75^\circ$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形,

$\therefore \angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 105^\circ$,

故答案为: 105° .

15. 若反比例函数 $y_1 = \frac{2}{x}$, $y_2 = -\frac{3}{x}$, 当 $1 \leq x \leq 3$ 时, 函数 y_1 的最大值是 a , 函数 y_2 的最大值是 b , 则

$a^b =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$ ## 0.5

【解析】

【分析】此题主要考查了反比例函数的性质, 负整数指数幂, 正确得出 a 与 b 的关系是解题关键. 直接利用反比例函数的性质分别得出 a 与 b , 再代入 a^b 进而得出答案.

【详解】解: $\because$ 函数 $y_1 = \frac{2}{x}$, 当 $1 \leq x \leq 3$ 时, 函数 y_1 随 x 的增大而减小, 最大值为 a ,

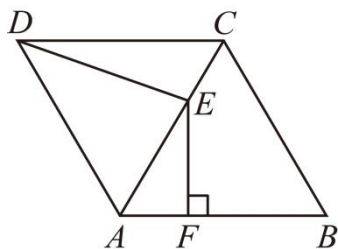
$\therefore x = 1$ 时, $y_1 = 2 = a$,

$\because y_2 = -\frac{3}{x}$, 当 $1 \leq x \leq 3$ 时, 函数 y_2 随 x 的增大而减小, 函数 y_2 的最大值为 $y_2 = -1 = b$,

$\therefore a^b = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.

故答案为: $\frac{1}{2}$.

16. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 60^\circ$, $AB = 6$, AC 是一条对角线, E 是 AC 上一点, 过点 E 作 $EF \perp AB$, 垂足为 F , 连接 DE . 若 $CE = AF$, 则 DE 的长为_____.

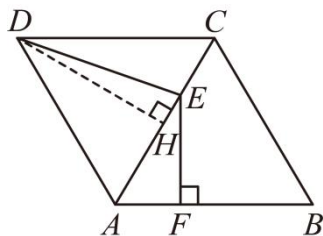


【答案】 $2\sqrt{7}$

【解析】

【分析】 本题考查了菱形的性质，等边三角形的判定与性质，勾股定理等知识，过 D 作 $DH \perp AC$ 于 H ，先判断 $\triangle ABC$ ， $\triangle ACD$ 都是等边三角形，得出 $\angle EAF = 60^\circ$ ， $AC = AB = 6$ ， $AH = CH = \frac{1}{2}AC = 3$ ，利用含 30° 的直角三角形的性质可得出 $AE = 2AF = 2CE$ ，进而求出 CE ， HE ，然后利用勾股定理求解即可。

【详解】 解：过 D 作 $DH \perp AC$ 于 H ，



$\because$ 菱形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $AB = 6$ ，

$\therefore AB = BC = CD = AD$ ， $\angle ADC = \angle ABC = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABC$ ， $\triangle ACD$ 都是等边三角形，

$\therefore \angle EAF = 60^\circ$ ， $AC = AB = 6$ ， $AH = CH = \frac{1}{2}AC = 3$ ，

$\because EF \perp AB$ ，

$\therefore \angle AEF = 30^\circ$ ，

$\therefore AE = 2AF$ ，

又 $CE = AF$ ，

$\therefore AE = 2CE$ ，

$\therefore CE = 2$ ，

$\therefore HE = CH - CE = 1$ ，

在 $\text{Rt}\triangle CDH$ 中， $DH^2 = CD^2 - CH^2 = 27$ ，

$\therefore DE = \sqrt{DH^2 + HE^2} = 2\sqrt{7}$ ，

故答案为： $2\sqrt{7}$ 。

三、解答题： 本大题共有 7 小题，共 72 分。请将必要的文字说明、计算过程或推理过程写在答题卡的对应位置。

17. (1) 先化简，再求值： $(x+1)^2 - 2(x+1)$ ，其中 $x = 2\sqrt{2}$ 。

(2) 解方程： $\frac{x-2}{x-4} - 2 = \frac{x}{x-4}$ 。

【答案】 (1) $x^2 - 1$ ，7； (2) $x = 3$

【解析】

【分析】 本题考查了整式的运算，二次根式的运算，解分式方程等知识，解题的关键是：

(1) 先利用完全平方公式、去括号法则化简，然后把 x 的值代入计算即可；

(2) 先去分母，去括号，移项，合并同类项，系数化 1，检验，解分式方程即可.

【详解】 解：(1) $(x+1)^2 - 2(x+1)$

$$= x^2 + 2x + 1 - 2x - 2$$

$$= x^2 - 1,$$

当 $x = 2\sqrt{2}$ 时，原式 $= (2\sqrt{2})^2 - 1 = 7$ ；

$$(2) \frac{x-2}{x-4} - 2 = \frac{x}{x-4}$$

去分母，得 $x - 2 - 2(x - 4) = x$ ，

解得 $x = 3$ ，

把 $x = 3$ 代入 $x - 4 = 3 - 4 = -1 \neq 0$ ，

$\therefore x = 3$ 是原方程的解.

18. 《国家学生体质健康标准（2014 年修订）》将九年级男生的立定跳远测试成绩分为四个等级：优秀（ $x \geq 240$ ），良好（ $225 \leq x < 240$ ），及格（ $185 \leq x < 225$ ），不及格（ $x < 185$ ），其中 x 表示测试成绩（单位：cm）。某校为了解本校九年级全体男生立定跳远测试的达标情况，精准找出差距，进行科学合理的工作规划，整理了本校及所在区县九年级全体男生近期一次测试成绩的相关数据，信息如下：

a. 本校测试成绩频数（人数）分布表：

等级	优秀	良好	及格	不及格
频数（人数）	40	70	60	30

b. 本校测试成绩统计表：

平均数	中位数	优秀率	及格率
222.5	228	p	85%

c. 本校所在区县测试成绩统计表：

平均数	中位数	优秀率	及格率
218.7	223	23%	91%

请根据所给信息，解答下列问题：

- (1) 求出 P 的值；
- (2) 本校甲、乙两名同学本次测试成绩在本校排名（从高到低）分别是第 100 名、第 101 名，甲同学的测试成绩是 230cm，请你计算出乙同学的测试成绩是多少？
- (3) 请你结合该校所在区县测试成绩，从平均数、中位数、优秀率和及格率四个方面中任选两个，对该校九年级全体男生立定跳远测试的达标情况做出评价，并为该校提出一条合理化建议。

【答案】(1) 20%

(2) 乙同学的测试成绩是 226cm

(3) 见解析

【解析】

【分析】本题考查的是频率分布表，中位数，平均数的意义，读懂统计图，从统计表中得到必要的信息是解决问题的关键。

(1) 先根据本校测试成绩频数（人数）分布表求出本次测试的总人数，利用优秀率 = 成绩为优秀的人数除以总人数即可求解；

(2) 根据第 100 名、第 101 名成绩的平均值为该校本次测试成绩的中位数，即可求解；

(3) 根据优秀率和平均数的意义说明即可。

【小问 1 详解】

解：本次测试的总人数为： $40 + 70 + 60 + 30 = 200$ （人），

成绩为优秀的人数为：40 人，

则优秀率为： $p = 40 \div 200 \times 100\% = 20\%$ ；

【小问 2 详解】

解：∵ 第 100 名、第 101 名成绩的平均值为该校本次测试成绩的中位数，中位数为 228，

则 $2 \times 228 - 230 = 226\text{cm}$ ，

答：乙同学的测试成绩是 226cm；

【小问 3 详解】

解：本校测试成绩的平均数为 222.5，本校所在区县测试成绩平均数为 218.7，

本校测试成绩的优秀率为 20%，本校所在区县测试成绩优秀率为 23%，

∵ $222.5 > 218.7, 20\% < 23\%$ ，

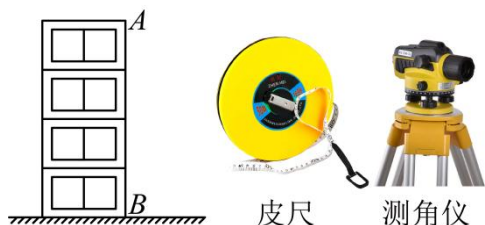
从平均数角度看，该校九年级全体男生立定跳远的平均成绩高于区县水平，整体水平较好；

从优秀率角度看，该校九年级全体男生立定跳远成绩中等水平偏上的学生比例低于区县水平，该校测试成

绩的优秀率低于区县水平；

建议：该校在保持学校整体水平的同时，多关注接近优秀的学生，提高优秀成绩的人数。

19. 如图，学校数学兴趣小组开展“实地测量教学楼 AB 的高度”的实践活动。教学楼周围是开阔平整的地面，可供使用的测量工具有皮尺、测角仪（皮尺的功能是直接测量任意可到达的两点间的距离；测角仪的功能是测量角的大小）。



- (1) 请你设计测量教学楼 AB 的高度的方案，方案包括画出测量平面图，把应测数据标记在所画的图形上（测出的距离用 m, n 等表示，测出的角用 α, β 等表示），并对设计进行说明；
- (2) 根据你测量的数据，计算教学楼 AB 的高度（用字母表示）。

【答案】(1) 见解析 (2) $m(\tan \alpha + \tan \beta)$

【解析】

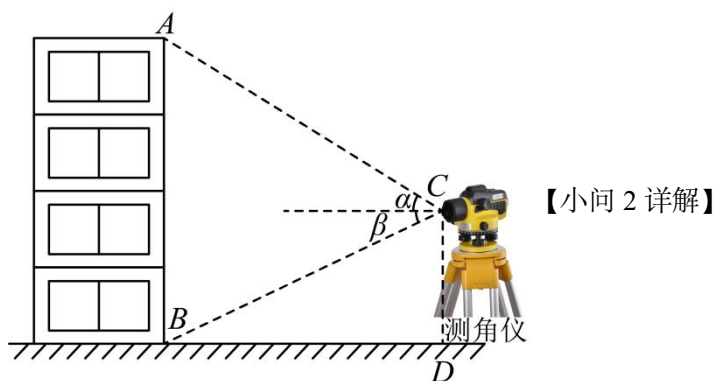
【分析】本题考查了解直角三角形的应用，解题的关键是：

(1) 将测角仪放在 D 处，用皮尺测量出 D 到 AB 的距离为 m ，用测角仪测出 A 的仰角为 α ，测出 B 的俯角为 β 即可；

(2) 过 C 作 $CE \perp AB$ 于 E ，分别在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 和 $\text{Rt}\triangle ACE$ 中，利用正切的定义求出 BE 、 AE ，即可求解。

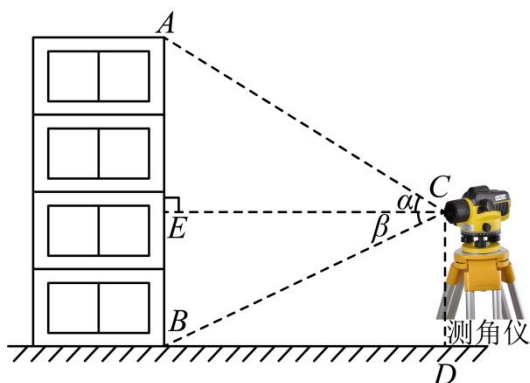
【小问 1 详解】

解：如图，将测角仪放在 D 处，用皮尺测量出 D 到 AB 的距离为 m ，用测角仪测出 A 的仰角为 α ，测出 B 的俯角为 β ；



【小问 2 详解】

解：如图，过 C 作 $CE \perp AB$ 于 E ，



则四边形 $CDBE$ 是矩形, $\angle ACE = \alpha$, $\angle BCE = \beta$,

$$\therefore CE = BD = m, \quad BE = CD,$$

在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 中, $BE = CE \cdot \tan \angle ECB = m \tan \beta$,

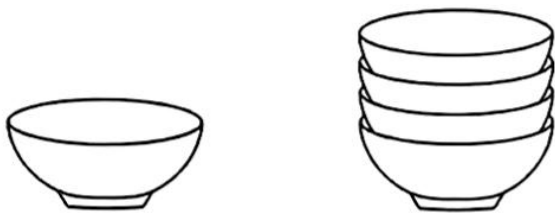
在 $\text{Rt}\triangle ACE$ 中, $AE = CE \cdot \tan \angle ECA = m \tan \alpha$,

$$\therefore AB = AE + BE = m(\tan \alpha + \tan \beta),$$

答: 教学楼 AB 的高度为 $m(\tan \alpha + \tan \beta)$.

20. 图是 1 个碗和 4 个整齐叠放成一摞的碗的示意图, 碗的规格都是相同的. 小亮尝试结合学习函数的经验, 探究整齐叠放成一摞的这种规格的碗的总高度 y (单位: cm) 随着碗的数量 x (单位: 个) 的变化规律. 下表是小亮经过测量得到的 y 与 x 之间的对应数据:

x / 个	1	2	3	4
y / cm	6	8.4	10.8	13.2



- (1) 依据小亮测量的数据, 写出 y 与 x 之间的函数表达式, 并说明理由;
- (2) 若整齐叠放成一摞的这种规格的碗的总高度不超过 28.8cm , 求此时碗的数量最多为多少个?

【答案】 (1) $y = 2.4x + 3.6$

(2) 10 个

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的应用, 解题的关键是:

(1) 求出每只碗增加的高度，然后列出表达式即可解答；

(2) 根据 (1) 中 y 和 x 的关系式列出不等式求解即可.

【小问 1 详解】

解：由表格可知，每增加一只碗，高度增加 2.4cm，

$$\therefore y = 6 + 2.4(x-1) = 2.4x + 3.6,$$

检验：当 $x=1$ 时， $y=6$ ；

当 $x=2$ 时， $y=8.4$ ；

当 $x=3$ 时， $y=10.8$ ；

当 $x=4$ 时， $y=13.2$ ；

$$\therefore y = 2.4x + 3.6,$$

【小问 2 详解】

解：根据题意，得 $2.4x + 3.6 \leq 28.8$ ，

解得 $x \leq 10.5$ ，

$\therefore$ 碗的数量最多为 10 个.

21. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， BC, BD 是 $\odot O$ 的两条弦，点 C 与点 D 在 AB 的两侧， E 是 OB 上一点 ($OE > BE$)，连接 OC, CE ，且 $\angle BOC = 2\angle BCE$.

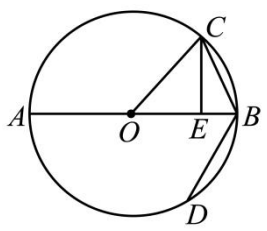


图1

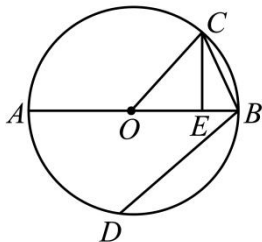


图2

(1) 如图 1，若 $BE=1$ ， $CE=\sqrt{5}$ ，求 $\odot O$ 的半径；

(2) 如图 2，若 $BD=2OE$ ，求证： $BD \parallel OC$. (请用两种证法解答)

【答案】 (1) 3 (2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 利用等边对等角、三角形内角和定理求出 $\angle OBC = \angle OCB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BOC)$ ，结合 $\angle BOC = 2\angle BCE$ ，可得出 $\angle OBC + \angle BCE = 90^\circ$ ，在 $\text{Rt}\triangle OCE$ 中，利用勾股定理求解即可；

(2) 法一：过 O 作 $OF \perp BD$ 于 F ，利用垂径定理等可得出 $BF = \frac{1}{2}BD = OE$ ，然后利用 HL 定理证明

$\text{Rt}\triangle CEO \cong \text{Rt}\triangle OFB$ ，得出 $\angle COE = \angle OBF$ ，然后利用平行线的判定即可得证；

法二：连接 AD ，证明 $\triangle CEO \sim \triangle ADB$ ，得出 $\angle COE = \angle ABD$ ，然后利用平行线的判定即可得证

【小问 1 详解】

解： $\because OC = OB$ ，

$$\therefore \angle OBC = \angle OCB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BOC),$$

$$\therefore \angle BOC = 2\angle BCE,$$

$$\therefore \angle OBC = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\angle BCE) = 90^\circ - \angle BCE, \text{ 即 } \angle OBC + \angle BCE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OEC = 90^\circ,$$

$$\therefore OC^2 = OE^2 + CE^2,$$

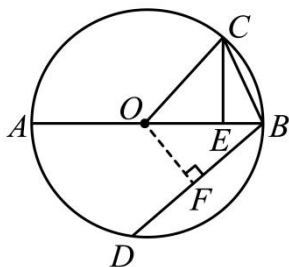
$$\therefore OC^2 = (OC - 1)^2 + (\sqrt{5})^2,$$

解得 $OC = 3$ ，

即 $\odot O$ 的半径为 3；

【小问 2 详解】

证明：法一：过 O 作 $OF \perp BD$ 于 F ，



$$\therefore BF = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore BD = 2OE$$

$$\therefore OE = BF,$$

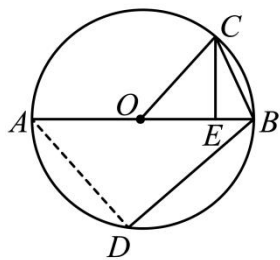
又 $OC = OB$ ， $\angle OEC = \angle BFO = 90^\circ$ ，

$$\therefore \text{Rt}\triangle CEO \cong \text{Rt}\triangle OFB (\text{HL}),$$

$$\therefore \angle COE = \angle OBF,$$

$$\therefore BD \parallel OC;$$

法二：连接 AD ，



$\because AB$ 是直径,

$\therefore \angle ADB = 90^\circ$,

$$\therefore AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{(2OC)^2 - (2OE)^2} = 2\sqrt{OC^2 - OE^2} = 2CE,$$

$$\therefore \frac{OC}{AB} = \frac{CE}{AD} = \frac{OE}{BD} = \frac{1}{2},$$

$\therefore \triangle CEO \sim \triangle ADB$,

$\therefore \angle COE = \angle ABD$,

$\therefore BD \parallel OC$.

【点睛】本题考查了垂径定理，相似三角形的判定与性质，等腰三角形的性质，三角形的内角和定理，全等三角形的判定与性质等知识，明确题意，灵活运用所学知识解题是解题的关键.

22. 如图，在 $ABCD$ 中， $\angle ABC$ 为锐角，点 E 在边 AD 上，连接 BE, CE ，且 $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle DCE}$.

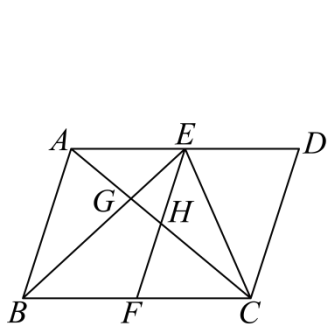


图1

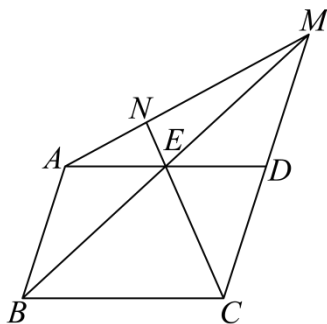


图2

(1) 如图 1，若 F 是边 BC 的中点，连接 EF ，对角线 AC 分别与 BE, EF 相交于点 G, H 。

①求证： H 是 AC 的中点；

②求 $AG:GH:HC$ ；

(2) 如图 2， BE 的延长线与 CD 的延长线相交于点 M ，连接 AM ， CE 的延长线与 AM 相交于点 N 。试探究线段 AM 与线段 AN 之间的数量关系，并证明你的结论。

【答案】(1) ①见解析；② $AG:GH:HC = 2:1:3$

(2) $AM = 3AN$ ，理由见解析

【解析】

【分析】(1) ①根据 $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle DCE}$ ，得出 E 为 AD 的中点，证明出 $\triangle AHE \cong \triangle CHF$ 即可；②先证明出

$\triangle AGB \sim \triangle HGE$ 得到 $\frac{AB}{EH} = \frac{AG}{GH} = 2$ ，然后再根据平行四边形的性质找到线段的数量关系求解；

(2) 连接 BD 交 CN 于点 F ，证明 $\triangle AEB \cong \triangle DEM$ (AAS)，进一步证明出四边形 $ABDM$ 为平行四边形，得出 DF 为 $\triangle CMN$ 的中位线，得到 $DF = \frac{1}{2}MN$ ，再证明出 $\triangle AEN \cong \triangle DEF$ 得到 $DF = AN$ ，再通过等量代换即可求解。

【小问 1 详解】

解：① $\because S_{\triangle ABE} = S_{\triangle DCE}$ ，

$\therefore E$ 为 AD 的中点，

$\therefore AE = DE$ ，

$\because F$ 是边 BC 的中点，

$\therefore BF = CF$ ，

$\therefore AE = CF$ ，

在 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$

$\therefore \angle EAH = \angle FCH$ ，

又 $\because \angle AHE = \angle CHF$ ，

$\therefore \triangle AHE \cong \triangle CHF$ (AAS)，

$\therefore AH = CH$ ，

$\therefore H$ 是 AC 的中点；

② $\because AE = BF, AE \parallel BF$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABFE$ 为平行四边形，

$\therefore AB \parallel EF$ ，

$\therefore \triangle AGB \sim \triangle HGE$ ，

$\therefore \frac{AB}{EH} = \frac{AG}{GH}$ ，

$\because \triangle AHE \cong \triangle CHF$ ，

$\therefore EH = FH$ ，

$\therefore \frac{AB}{EH} = \frac{AG}{GH} = 2$ ，

$$\therefore AG = 2GH,$$

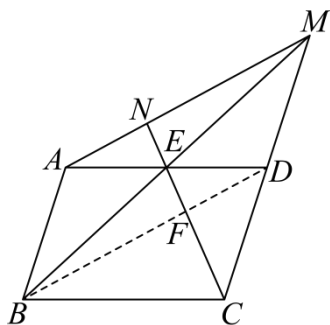
$$\therefore GH = \frac{1}{3}AH = \frac{1}{3}HC,$$

$$\therefore AG:GH:HC = 2:1:3;$$

【小问 2 详解】

解：线段 AM 与线段 AN 之间的数量关系为： $AM = 3AN$ ，理由如下：

连接 BD 交 CN 于点 F ，如下图：



由题意， BE 的延长线与 CD 的延长线相交于点 M ，连接 AM ， CE 的延长线与 AM 相交于点 N ，

$$\because AE = DE, \angle AEB = \angle DEM,$$

$$\text{又} \because AB \parallel CD,$$

$$\backslash AB \parallel CM,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle DME,$$

$$\therefore \triangle AEB \cong \triangle DEM (\text{AAS}),$$

$$\therefore AB = DM,$$

$\therefore$ 四边形 $ABDM$ 为平行四边形，

$$\therefore AM = BD, AB = MD,$$

$$\because AB = CD,$$

$$\therefore DM = CD,$$

$\therefore D$ 为 CM 的中点，

$$\because DF \parallel MN,$$

$$\therefore \frac{CD}{CM} = \frac{CF}{CN} = \frac{1}{2},$$

$\therefore F$ 为 CN 的中点，

$\therefore DF$ 为 $\triangle CMN$ 的中位线，

$$\therefore DF = \frac{1}{2}MN,$$

$$\because AE = DE, \angle AEN = \angle DEF, \angle NAE = \angle FDE,$$

$$\therefore \triangle AEN \cong \triangle DEF (\text{ASA}),$$

$$\therefore DF = AN,$$

$$\therefore DF = AN = \frac{1}{2}MN,$$

$$\therefore MN = 2AN,$$

$$\therefore AM = AN + MN = 3AN,$$

$$\therefore AM = 3AN.$$

【点睛】本题考查了平行四边形的性质，三角形全等的判定及性质，三角形相似的判定及性质，三角形的中位线等知识，解题的关键是添加适当的辅助线构造全等三角形来求解.

23. 如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y = -2x^2 + bx + c$ 与 x 轴相交于 $A(1, 0)$ ， B 两点（点 A 在点 B 左侧），顶点为 $M(2, d)$ ，连接 AM .

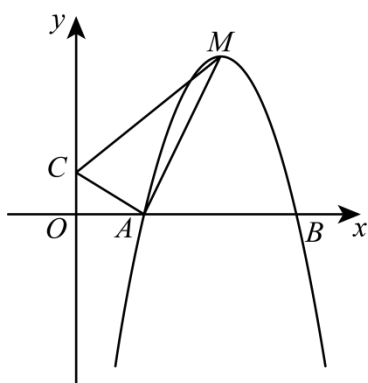


图1

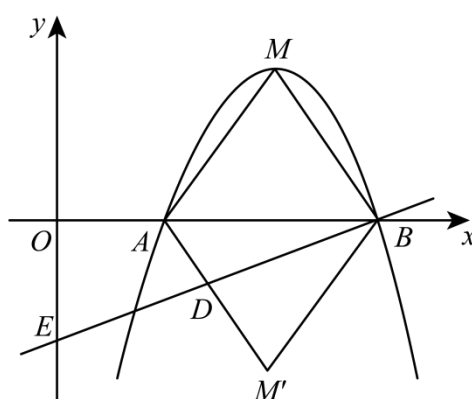


图2

(1) 求该抛物线的函数表达式；

(2) 如图 1, 若 C 是 y 轴正半轴上一点, 连接 AC, CM . 当点 C 的坐标为 $(0, \frac{1}{2})$ 时, 求证: $\angle ACM = \angle BAM$;

(3) 如图 2, 连接 BM , 将 $\triangle ABM$ 沿 x 轴折叠, 折叠后点 M 落在第四象限的点 M' 处, 过点 B 的直线与线段 AM' 相交于点 D , 与 y 轴负半轴相交于点 E . 当 $\frac{BD}{DE} = \frac{8}{7}$ 时, $3S_{\triangle ABD}$ 与 $2S_{\triangle M'BD}$ 是否相等? 请说明理由.

【答案】(1) $y = -2x^2 + 8x - 6$

(2) 见解析 (3) 相等, 理由见解析

【解析】

【分析】(1) 根据顶点为 $M(2, d)$ ，利用 $-\frac{b}{2a} = -\frac{b}{2 \times (-2)} = 2$ 求出 $b = 8$ ，再将 $A(1, 0)$ 代入解析式即可求出 $c = -6$ ，即可得出函数表达式；

(2) 延长 MC 交 x 轴于点 D ，由 (1) 知抛物线的解析式表达式为 $y = -2x^2 + 8x - 6$ ，求出 $M(2, 2)$ ，再利用待定系数法求出直线 MC 的解析式为 $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$ ，进而求出 $D(-\frac{2}{3}, 0)$ ，则 $AD = \frac{5}{3}$ ，利用两点间距离公式求出 $DM = \frac{10}{3}$, $CD = \frac{5}{6}$ ，易证 $\triangle ACD \sim \triangle MAD$ ，得到 $\angle ACD = \angle MAD$ ，由 $\angle ACD + \angle ACM = \angle MAD + \angle BAM = 180^\circ$ ，即可证明 $\angle ACM = \angle BAM$ ；

(3) 过点 D 作 $DG \perp x$ 轴，交 x 轴于点 G ，利用抛物线解析式求出 $B(3, 0)$ ，求出 $OB = 3$, $AB = 2$ ，根据 $OE \parallel DG$ ，易证 $\triangle BDG \sim \triangle BEO$ ，得到 $\frac{BG}{OB} = \frac{BD}{BE} = \frac{DG}{OE}$ ，由 $\frac{BD}{DE} = \frac{8}{7}$ ，即 $\frac{BD}{BE} = \frac{8}{15}$ ，求出 $BG = \frac{8}{5}$ ，得到 $OG = \frac{7}{5}$ ，即点 D 的横坐标为 $\frac{7}{5}$ ，由折叠的性质得到 $M'(2, -2)$ ，求出直线 AM' 的解析式为 $y = -2x + 2$ ，进而求出 $D(\frac{7}{5}, -\frac{4}{5})$ ，得到 $DG = \frac{4}{5}$ ，利用三角形面积公式求出 $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot DG = \frac{4}{5}$ ，则 $S_{\triangle M'BD} = S_{\triangle ABM'} - S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot |y_{M'}| - \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$ ，即可证明结论。

【小问 1 详解】

解：∵ 该抛物线的顶点为 $M(2, d)$ ，即该抛物线的对称轴为 $x = 2$ ，

$$\therefore x = -\frac{b}{2a} = -\frac{b}{2 \times (-2)} = 2,$$

$$\therefore b = 8,$$

将 $A(1, 0)$ 代入解析式 $y = -2x^2 + 8x + c$ ，则 $0 = -2 + 8 + c$ ，

$$\therefore c = -6,$$

∴ 抛物线的解析式表达式为 $y = -2x^2 + 8x - 6$ ；

【小问 2 详解】

证明：如图 1，延长 MC 交 x 轴于点 D ，

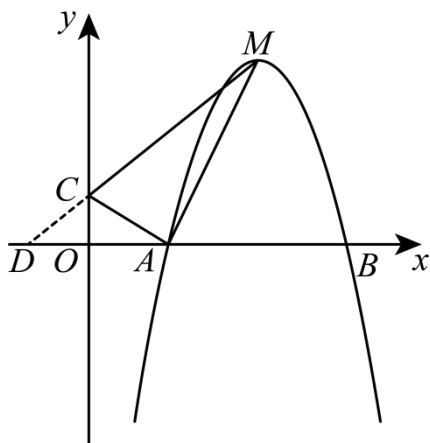


图1

由 (1) 知抛物线的解析式表达式为 $y = -2x^2 + 8x - 6$, 则 $y_M = -2 \times 2^2 + 8 \times 2 - 6 = 2$,

$\therefore M(2, 2)$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$,

设直线 MC 的解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$,

$$\text{则} \begin{cases} \frac{1}{2} = b \\ 2 = 2k + b \end{cases},$$

$$\text{解得:} \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ k = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 MC 的解析式为 $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$, 则 $0 = \frac{3}{4}x_D + \frac{1}{2}$,

$$\therefore x_D = -\frac{2}{3},$$

$$\therefore D\left(-\frac{2}{3}, 0\right),$$

$$\therefore A(1, 0),$$

$$\therefore AD = \frac{5}{3},$$

$$\therefore DM = \sqrt{\left(-\frac{2}{3} - 2\right)^2 + (0 - 2)^2} = \frac{10}{3}, CD = \sqrt{\left(0 + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2} = \frac{5}{6},$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{AD}{DM} &= \frac{\frac{5}{3}}{\frac{10}{3}} = \frac{1}{2}, \frac{CD}{AD} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{2}, \\ \therefore \frac{AD}{DM} &= \frac{CD}{AD}, \\ \therefore \angle ADM &= \angle ADM, \\ \therefore \triangle ACD &\sim \triangle MAD, \\ \therefore \angle ACD &= \angle MAD, \\ \therefore \angle ACD + \angle ACM &= \angle MAD + \angle BAM = 180^\circ, \\ \therefore \angle ACM &= \angle BAM; \end{aligned}$$

【小问3详解】

解：过点 D 作 $DG \perp x$ 轴，交 x 轴于点 G ，

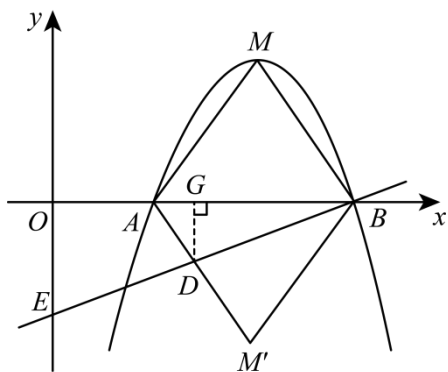


图2

$$\text{令 } -2x^2 + 8x - 6 = 0, \text{ 即 } x^2 - 4x + 3 = 0,$$

$$\text{解得: } x_1 = 1, x_2 = 3,$$

$$\text{根据题意得: } B(3, 0),$$

$$\therefore OB = 3, AB = 2,$$

$$\therefore DG \perp x \text{ 轴}, OE \perp x \text{ 轴},$$

$$\therefore OE \parallel DG,$$

$$\therefore \triangle BDG \sim \triangle BEO,$$

$$\therefore \frac{BG}{OB} = \frac{BD}{BE} = \frac{DG}{OE},$$

$$\therefore \frac{BD}{DE} = \frac{8}{7}, \text{ 即 } \frac{BD}{BE} = \frac{8}{15},$$

$$\therefore BG = \frac{8}{15}OB = \frac{8}{5},$$

$$\therefore OG = \frac{7}{5},$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 的横坐标为 } \frac{7}{5},$$

由折叠的性质得到 $M'(2, -2)$,

设直线 AM' 的解析式为 $y = mx + n (m \neq 0)$,

$$\text{则} \begin{cases} -2 = 2m + n \\ 0 = m + n \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} m = -2 \\ n = 2 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AM' 的解析式为 $y = -2x + 2$,

$$\therefore y_D = -2 \times \frac{7}{5} + 2 = -\frac{4}{5},$$

$$\therefore D\left(\frac{7}{5}, -\frac{4}{5}\right),$$

$$\therefore DG = \frac{4}{5},$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot DG = \frac{4}{5},$$

$$\therefore S_{\triangle M'BD} = S_{\triangle ABM'} - S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot |y_{M'}| - \frac{4}{5} = \frac{6}{5},$$

$$\therefore 3S_{\triangle ABD} = 3 \times \frac{4}{5} = \frac{12}{5}, \quad 2S_{\triangle M'BD} = 2 \times \frac{6}{5} = \frac{12}{5},$$

$$\therefore 3S_{\triangle ABD} = 2S_{\triangle M'BD}.$$

【点睛】 本题考查二次函数综合问题，涉及二次函数的性质，二次函数解析式，一次函数的解析式，折叠的性质，二次函数与三角形相似的综合问题，二次函数与面积综合问题，正确作出辅助线构造三角形相似是解题的关键.