

2024 年兴安盟、呼伦贝尔市初中毕业生学业考试数学

注意事项：

1. 本试卷共 6 页，满分 120 分。考试时间共 120 分钟。
2. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、座位号填写在答题卡上。回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，请用 0.5 毫米的黑色字迹签字笔将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 请将姓名、准考证号填写在本试卷相应位置上。
4. 考试结束后，将本试卷、答案卡和草稿纸一并交回。

一、选择题（下列各题的四个选项中只有一个正确。共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分）

1. $-\frac{1}{10}$ 的绝对值是()

- A. $\frac{1}{10}$ B. 10 C. $-\frac{1}{10}$ D. -10

【答案】A

【解析】

【分析】根据“正数的绝对值是它本身，0 的绝对值为 0，负数的绝对值是它的相反数”求解即可。

【详解】解：因为 $-\frac{1}{10}$ 为负数，
所以 $-\frac{1}{10}$ 的绝对值为 $\frac{1}{10}$ ，

故选 A.

【点睛】本题主要考查求绝对值，掌握“正数的绝对值是它本身，0 的绝对值为 0，负数的绝对值是它的相反数”是解题的关键。

2. 下列计算正确的是 ()

- A. $(-2a^4)^3 = -6a^{12}$ B. $a^{-2} \div a^5 = a^3$
C. $\frac{a+1}{a} - \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$ D. $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了整式的运算，根据积的乘方法则、同底数幂相除法、负整数指数幂、分式的加减，多项式乘以多项式法则计算，并逐项判定即可。

【详解】解：A. $(-2a^4)^3 = -8a^{12}$ ，原计算错误，不符合题意；

B. $a^{-2} \div a^5 = a^{-7} = \frac{1}{a^7}$ ，原计算错误，不符合题意；

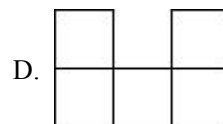
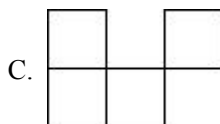
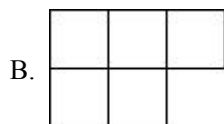
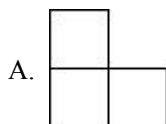
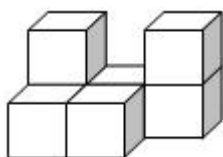
C. $\frac{a+1}{a} - \frac{1}{a} = \frac{a+1-1}{a} = 1$ ，原计算错误，不符合题意；

D. $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$ ，原计算正确，符合题意；

故选：D.

3. 如图是由七个完全相同的小正方体组成的立体图形，选项给出的四个平面图形中不属于其三视图的是

()



【答案】C

【解析】

【分析】根据立方体的结构，按照三视图的要求判断选项中是否是三视图.

【详解】A 项为左视图，B 项为俯视图，C 项不属于三视图，D 项为主视图，

故选：C.

【点睛】本题主要考查了立体图形的三视图问题，主要训练学生的空间想象力.

4. 新时代十年来，我国建成世界上规模最大的社会保障体系，其中基本医疗保险的参保人数由 5.4 亿增加到 13.6 亿，参保率稳定在 95%. 将数据 13.6 亿用科学记数法表示为 ()

A. 13.6×10^8

B. 1.36×10^8

C. 1.36×10^9

D. 13.6×10^9

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了科学记数法，根据科学记数法的表示形式即可求解，熟练掌握科学记数法的表示形式：

“ $a \times 10^n$ ”中 a 的范围是 $1 \leq a < 10$ ， n 是正整数”是解题的关键.

【详解】解：13.6 亿 $= 1.36 \times 10^9$ ，

故选 C.

5. 下列说法正确的是 ()

A. 任意画一个三角形，其内角和是 360° 是必然事件

- B. 调查某批次汽车的抗撞击能力，适宜全面调查.
- C. 一组数据 2, 4, 6, x , 7, 4, 6, 9 的众数是 4，则这组数据的中位数是 4
- D. 在一次芭蕾舞比赛中，甲、乙两个芭蕾舞团都表演了舞剧《天鹅湖》，两团女演员的身高平均数相同，方差分别为 $S_{\text{甲}}^2 = 1.5, S_{\text{乙}}^2 = 2.5$ ，则甲芭蕾舞团的女演员身高更整齐

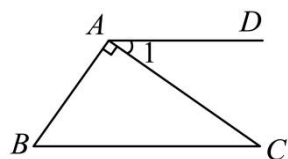
【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了必然事件，方差的意义，抽样调查与普查，中位数，根据必然事件，中位数，方差的意义，抽样调查与普查逐项分析判断即可.

- 【详解】A. 任意画一个三角形，其内角和是 360° 是不可能事件，故原说法错误；
- B. 调查某批次汽车的抗撞击能力，适宜抽样调查. 故原说法错误；
- C. 一组数据 2, 4, 6, x , 7, 4, 6, 9 的众数是 4，则这组数据的中位数是 5，故原说法错误
- D. 在一次芭蕾舞比赛中，甲、乙两个芭蕾舞团都表演了舞剧《天鹅湖》，两团女演员的身高平均数相同，方差分别为 $S_{\text{甲}}^2 = 1.5, S_{\text{乙}}^2 = 2.5$ ，则甲芭蕾舞团的女演员身高更整齐，故正确，
- 故选：D.

6. 如图， $AD \parallel BC, AB \perp AC$ ，若 $\angle 1 = 35.8^\circ$ ，则 $\angle B$ 的度数是 ()



- A. $35^\circ 48'$ B. $55^\circ 12'$ C. $54^\circ 12'$ D. $54^\circ 52'$

【答案】C

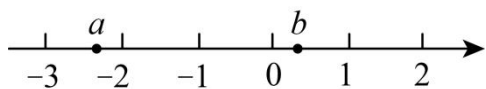
【解析】

【分析】本题考查了平行线的性质，垂直的定义，度分秒的计算等，先利用垂直定义结合已知条件求出 $\angle BAD = 125.8^\circ$ ，然后利用平行线的性质以及度分秒的换算求解即可.

- 【详解】解： $\because AB \perp AC, \angle 1 = 35.8^\circ$,
- $\therefore \angle BAD = \angle BAC + \angle 1 = 90^\circ + 35.8^\circ = 125.8^\circ$,
- $\because AD \parallel BC$,
- $\therefore \angle B + \angle BAD = 180^\circ$,
- $\therefore \angle B = 180^\circ - \angle BAD = 54.2^\circ = 54^\circ 12'$,

故选：C.

7. 实数 a, b 在数轴上的对应位置如图所示, 则 $\sqrt{(a-b)^2} - (b-a-2)$ 的化简结果是 ()



- A. 2 B. $2a-2$ C. $2-2b$ D. -2

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了实数与数轴的关系, 二次根式的性质和绝对值的化简法则, 根据数轴可得 $-3 < a < -2$, $0 < b < 1$, 再利用二次根式的性质和绝对值的化简法则, 化简计算即可.

【详解】 解: 由数轴知: $-3 < a < -2$, $0 < b < 1$,

$$\therefore a-b < 0,$$

$$\therefore \sqrt{(a-b)^2} - (b-a-2)$$

$$= |a-b| - (b-a-2)$$

$$= -(a-b) - (b-a-2)$$

$$= -a+b-b+a+2$$

$$= 2,$$

故选: A.

8. 点 $P(x, y)$ 在直线 $y = -\frac{3}{4}x + 4$ 上, 坐标 (x, y) 是二元一次方程 $5x - 6y = 33$ 的解, 则点 P 的位置在 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数图象上点的特征, 解二元一次方程组等知识, 联立方程组
$$\begin{cases} y = -\frac{3}{4}x + 4 \\ 5x - 6y = 33 \end{cases},$$

求出点 P 的坐标即可判断.

【详解】 解: 联立方程组
$$\begin{cases} y = -\frac{3}{4}x + 4 \\ 5x - 6y = 33 \end{cases},$$

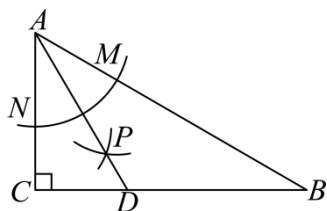
$$\text{解得} \begin{cases} x = 6 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases},$$

$\therefore P$ 的坐标为 $\left(6, -\frac{1}{2}\right)$,

$\therefore$ 点 P 在第四象限,

故选 : D.

9. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, 以点 A 为圆心, 适当长为半径画弧分别交 AB, AC 于点 M 和点 N , 再分别以点 M, N 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧, 两弧交于点 P , 连接 AP 并延长交 BC 于点 D . 若 $\triangle ACD$ 的面积为 8, 则 $\triangle ABD$ 的面积是 ()



- A. 8 B. 16 C. 12 D. 24

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了尺规作图, 含 30° 的直角三角形的性质, 等腰三角形的判定等知识, 由作图知 AD 平分 $\angle BAD$, 则可求 $\angle CAD = \angle DAB = 30^\circ$, 利用含 30° 的直角三角形的性质得出 $CD = \frac{1}{2}AD$, 利用等角对等边得出 $AD = BD$, 进而得出 $CD = \frac{1}{2}BD$, 然后利用面积公式即可求解.

【详解】 解: $\because \angle C = 90^\circ, \angle B = 30^\circ$,

$\therefore \angle CAB = 60^\circ$,

由作图知: AD 平分 $\angle BAD$,

$\therefore \angle CAD = \angle DAB = 30^\circ$,

$\therefore CD = \frac{1}{2}AD$, $\angle B = \angle BAD$,

$\therefore AD = BD$,

$\therefore CD = \frac{1}{2}BD$,

$$\therefore \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABD}} = \frac{\frac{1}{2}CD \cdot AC}{\frac{1}{2}BD \cdot AC} = \frac{CD}{BD} = \frac{1}{2},$$

又 $\triangle ACD$ 的面积为 8,

$\therefore \triangle ABD$ 的面积是 $2 \times 8 = 16$,

故选 B.

10. A , B 两种机器人都被用来搬运化工原料, A 型机器人比 B 型机器人每小时多搬运 30 千克, A 型机器人搬运 900 千克所用时间与 B 型机器人搬运 600 千克所用时间相等. A , B 两种机器人每小时分别搬运多少千克化工原料? ()

A. 60, 30

B. 90, 120

C. 60, 90

D. 90, 60

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了分式方程的应用, 设 B 型机器人每小时搬运 x 千克, 则 A 型机器人每小时搬运 $(x+30)$ 千克, 根据“ A 型机器人搬运 900 千克所用时间与 B 型机器人搬运 600 千克所用时间相等”列分式方程求解即可.

【详解】解: 设 B 型机器人每小时搬运 x 千克, 则 A 型机器人每小时搬运 $(x+30)$ 千克,

根据题意, 得 $\frac{900}{x+30} = \frac{600}{x}$,

解得 $x = 60$,

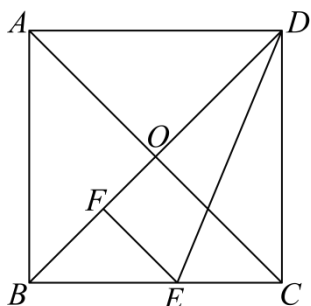
经检验, $x = 60$ 是原方程的解,

$\therefore x+30 = 90$,

答: A 型机器人每小时搬运 90 千克, B 型机器人每小时搬运 60 千克.

故选: D.

11. 如图, 边长为 2 的正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O . E 是 BC 边上一点, F 是 BD 上一点, 连接 DE , EF . 若 $\triangle DEF$ 与 $\triangle DEC$ 关于直线 DE 对称, 则 $\triangle BEF$ 的周长是 ()



A. $2\sqrt{2}$

B. $2 + \sqrt{2}$

C. $4 - 2\sqrt{2}$

D. $\sqrt{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】 本题考查了正方形的性质和折叠的性质，属于基础题型，熟练掌握正方形的性质和折叠的性质是解题的关键. 根据正方形的性质可求出 $BD = 2\sqrt{2}$ ，根据轴对称的性质可得 $DF = DC = 2$ ，

$\angle DFE = \angle BCD = 90^\circ$ 则 $BF = BD - DF = 2\sqrt{2} - 2$ ，再求出 $EF = BF = 2\sqrt{2} - 2$ ，

$BE = \sqrt{2}BF = 4 - 2\sqrt{2}$ ，即可求出答案.

【详解】 解：正方形 $ABCD$ 的边长为 2，

$\therefore BC = DC = 2, \angle BCD = 90^\circ, DO = \frac{1}{2}BD, \angle CBD = 45^\circ$,

$\therefore BD = \sqrt{BC^2 + DC^2} = 2\sqrt{2}$,

$\therefore \triangle DEF$ 与 $\triangle DEC$ 关于直线 DE 对称，

$\therefore DF = DC = 2, \angle DFE = \angle BCD = 90^\circ$ ，

$\therefore BF = BD - DF = 2\sqrt{2} - 2, \angle BFE = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle FBE = \angle FEB = 45^\circ$ ，

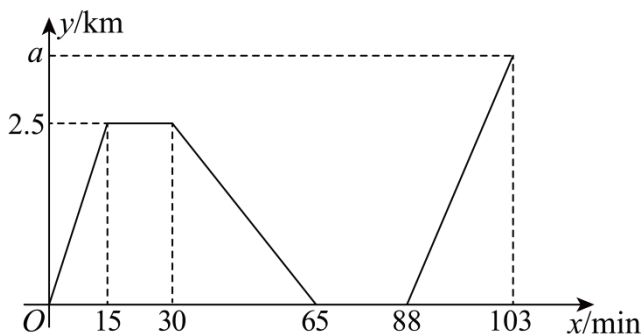
$\therefore EF = BF = 2\sqrt{2} - 2$ ，

$\therefore BE = \sqrt{2}BF = \sqrt{2}(2\sqrt{2} - 2) = 4 - 2\sqrt{2}$ ，

$\therefore \triangle BEF$ 的周长是 $BE + EF + BF = 4 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} - 2 = 2\sqrt{2}$.

故选：A.

12. 已知某同学家、体育场、图书馆在同一条直线上. 下面的图象反映的过程是：该同学从家跑步去体育场，在那里锻炼了一阵后又步行回家吃早餐，饭后骑自行车到图书馆. 图中用 x 表示时间， y 表示该同学离家的距离. 结合图象给出下列结论：



- (1) 体育场离该同学家 2.5 千米；
- (2) 该同学在体育场锻炼了 15 分钟；
- (3) 该同学跑步前平均速度是步行平均速度的 2 倍；
- (4) 若该同学骑行的平均速度是跑步平均速度的 1.5 倍，则 a 的值是 3.75；

其中正确结论的个数是 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查利用函数图像解决实际问题，正确的读懂图像给出的信息是解题的关键。利用图象信息解决问题即可。

【详解】解：由图象可知：体育场离该同学家 2.5 千米，故 (1) 正确；

该同学在体育场锻炼了 $30 - 15 = 15$ (分钟)，故 (2) 正确；

该同学的跑步速度为 $2.5 \div 15 = \frac{1}{6}$ (千米/分钟)，步行速度为 $2.5 \div (65 - 30) = \frac{1}{14}$ (千米/分钟)，则跑步速

度是步行速度的 $\frac{1}{6} \div \frac{1}{14} = \frac{7}{3}$ 倍，故 (3) 错误；

若该同学骑行的平均速度是跑步平均速度的 1.5 倍，则该同学骑行的平均速度为 $1.5 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$ (千米/分钟)，

所以 $a = \frac{1}{4} \times (103 - 88) = 3.75$ ，故 (4) 正确，

故选：C.

二、填空题 (本题 5 个小题，每小题 3 分，共 15 分)

13. 分解因式： $a + 2ab + ab^2 =$ _____.

【答案】 $a(1+b)^2$

【解析】

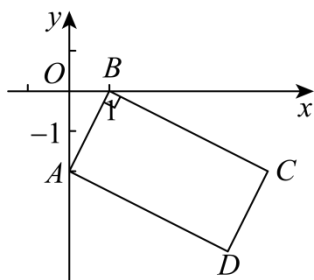
【分析】先提公因式，再用完全平方公式。

【详解】原式 $= a(1 + 2b + b^2) = a(1 + b)^2$ ，

故填： $a(1+b)^2$ 。

【点睛】本题考查因式分解的方法，熟练掌握提公因式和完全平方是关键。

14. 如图，点 $A(0, -2)$ ， $B(1, 0)$ ，将线段 AB 平移得到线段 DC ，若 $\angle ABC = 90^\circ$ ， $BC = 2AB$ ，则点 D 的坐标是_____.

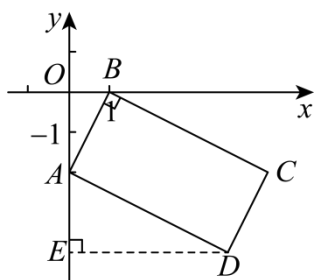


【答案】 $(4, -4)$

【解析】

【分析】由平移性质可知 $AB = CD$ ， $AB \parallel CD$ ，则四边形 $ABCD$ 是平行四边形，又 $\angle ABC = 90^\circ$ ，则有四边形 $ABCD$ 是矩形，根据同角的余角相等可得 $\angle OBA = \angle EAD$ ，从而证明 $\triangle OAB \sim \triangle EDA$ ，由性质得 $\frac{2}{ED} = \frac{\sqrt{5}}{DA} = \frac{1}{EA}$ ，设 $EA = a$ ，则 $ED = 2a$ ， $DA = \sqrt{5}a$ ，则 $\sqrt{5}a = 2\sqrt{5}$ ，解得： $a = 2$ ，故有 $EA = 2$ ， $ED = 4$ ，得出 $OE = OA + EA = 4$ 即可求解。

【详解】如图，过 D 作 $DE \perp y$ 轴于点 E ，则 $\angle AED = 90^\circ$ ，



由平移性质可知： $AB = CD$ ， $AB \parallel CD$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\because \angle ABC = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle BAD = 90^\circ$ ， $BC = AD = 2AB$ ，

$\therefore \angle OAB + \angle EAD = 90^\circ$ ，

$\because \angle OAB + \angle OBA = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle OBA = \angle EAD$ ，

$\because \angle AOB = \angle DEA = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle OAB \sim \triangle EDA$ ，

$\therefore \frac{OA}{ED} = \frac{AB}{DA} = \frac{OB}{EA}$ ，

$\because A(0, -2)$ ， $B(1, 0)$ ，

$$\therefore OA = 2, OB = 1, AB = \sqrt{5},$$

$$\therefore \frac{2}{ED} = \frac{\sqrt{5}}{DA} = \frac{1}{EA},$$

$$\text{设 } EA = a, \text{ 则 } ED = 2a, DA = \sqrt{5}a,$$

$$\therefore \sqrt{5}a = 2\sqrt{5}, \text{ 解得: } a = 2,$$

$$\therefore EA = 2, ED = 4,$$

$$\therefore OE = OA + EA = 4,$$

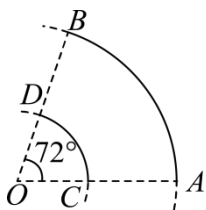
$\therefore$ 点 D 在第四象限,

$$\therefore D(4, -4),$$

故答案为: $(4, -4)$.

【点睛】 本题主要考查了相似三角形的判定与性质，平行四边形的判定与性质，矩形的判定与性质、平移的性质，同角的余角相等知识点，熟练掌握知识点的应用是解题的关键.

15. 为了促进城乡协调发展，实现共同富裕，某乡镇计划修建公路. 如图， $\widehat{AB}$ 与 $\widehat{CD}$ 是公路弯道的外、内边线，它们有共同的圆心 O ，所对的圆心角都是 72° ，点 A, C, O 在同一条直线上，公路弯道外侧边线比内侧边线多 36 米，则公路宽 AC 的长是_____米. (π 取 3.14，计算结果精确到 0.1)



【答案】 28.7

【解析】

【分析】 本题考查了弧长公式，解一元一次方程等知识，利用弧长公式并结合题意可得出

$$\frac{72\pi \cdot OA}{180} - \frac{72\pi \cdot OC}{180} = 36, \text{ 进而得出 } \frac{72\pi \cdot AC}{180} = 36, \text{ 然后解方程并按要求取近似数即可.}$$

$$\text{【详解】 解: 根据题意, 得 } l_{\widehat{AB}} = \frac{72\pi \cdot OA}{180}, l_{\widehat{CD}} = \frac{72\pi \cdot OC}{180},$$

$\therefore$ 公路弯道外侧边线比内侧边线多 36 米,

$$\therefore \frac{72\pi \cdot OA}{180} - \frac{72\pi \cdot OC}{180} = 36,$$

$$\therefore \frac{72\pi \cdot (OA - OC)}{180} = 36, \text{ 即 } \frac{72\pi \cdot AC}{180} = 36$$

$$\text{解得 } AC = \frac{90}{\pi} \approx \frac{90}{3.14} \approx 28.7,$$

故答案为：28.7.

16. 对于实数 a , b 定义运算 “ $\ast$ ” 为 $a \ast b = a + 3b$, 例如 $5 \ast 2 = 5 + 3 \times 2 = 11$, 则关于 x 的不等式 $x \ast m < 2$ 有且只有一个正整数解时, m 的取值范围是_____.

【答案】 $0 \leq m < \frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了一元一次不等式的整数解, 解一元一次不等式组, 根据新定义和正整数解列出关于 m 的不等式组是解题的关键. 根据新定义列出不等式, 解关于 x 的不等式, 再由不等式的解集有且只有一个正整数解得出关于 m 的不等式组求解可得.

【详解】 解: 根据题意可知, $x \ast m = x + 3m < 2$

解得: $x < 2 - 3m$

$\because x \ast m < 2$ 有且只有一个正整数解

$$\therefore \begin{cases} 2 - 3m > 1 \text{ ①} \\ 2 - 3m \leq 2 \text{ ②} \end{cases}$$

解不等式①, 得: $m < \frac{1}{3}$

解不等式②, 得: $m \geq 0$

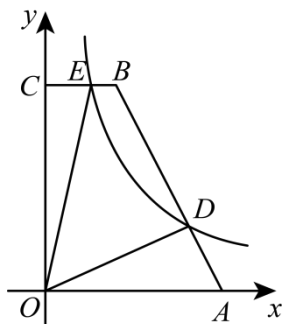
$$\therefore 0 \leq m < \frac{1}{3}$$

故答案为: $0 \leq m < \frac{1}{3}$.

17. 如图, 在平面直角坐标系中, 点 A , B 的坐标分别为 $(5, 0)$, $(2, 6)$, 过点 B 作 $BC \parallel x$ 轴交 y 轴于点 C ,

点 D 为线段 AB 上的一点, 且 $BD = 2AD$. 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象经过点 D 交线段 BC 于点 E , 则

四边形 $ODBE$ 的面积是_____.



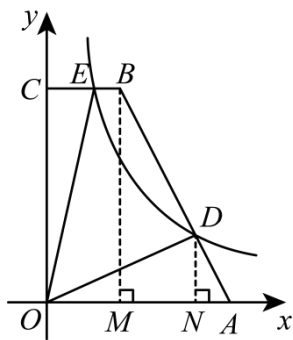
【答案】 12

【解析】

【分析】 本题主要考查了反比例函数的图象与性质，反比例函数图象上点的坐标特征，反比例函数 k 的几何意义，作 $BM \perp x$ 轴于 M ，作 $DN \perp x$ 轴于 N ，则 $DN \parallel BM$ ，由点 A ， B 的坐标分别为 $(5,0)$ ， $(2,6)$ 得 $BC = OM = 2$ ， $BM = OC = 6$ ， $AM = 3$ ，然后证明 $\triangle ADN \sim \triangle ABM$ 得 $\frac{DN}{BM} = \frac{AN}{AM} = \frac{AD}{AB}$ ，求出 $DN = 2$ ，则 $ON = OA - AN = 4$ ，故有 D 点坐标为 $(4,2)$ ，求出反比例函数解析式 $y = \frac{8}{x}$ ，再求出 $E\left(\frac{4}{3}, 6\right)$ ，

最后根据 $S_{\text{四边形} ODBE} = S_{\text{梯形} OABC} - S_{\triangle OCE} - S_{\triangle OAD}$ 即可求解，熟练掌握知识点的应用是解题的关键。

【详解】 如图，作 $BM \perp x$ 轴于 M ，作 $DN \perp x$ 轴于 N ，则 $DN \parallel BM$ ，



$\therefore$ 点 A ， B 的坐标分别为 $(5,0)$ ， $(2,6)$ ，

$\therefore BC = OM = 2$ ， $BM = OC = 6$ ， $AM = 3$ ，

$\therefore DN \parallel BM$ ，

$\therefore \triangle ADN \sim \triangle ABM$ ，

$\therefore \frac{DN}{BM} = \frac{AN}{AM} = \frac{AD}{AB}$ ，

$\therefore BD = 2AD$ ，

$\therefore \frac{DN}{6} = \frac{AN}{3} = \frac{1}{3}$ ，

$\therefore DN = 2$ ，

$$\therefore ON = OA - AN = 4,$$

$$\therefore D \text{ 点坐标为 } (4, 2), \text{ 代入 } y = \frac{k}{x} \text{ 可得, } k = 2 \times 4 = 8,$$

$$\therefore \text{反比例函数解析式为 } y = \frac{8}{x},$$

$$\because BC \parallel x \text{ 轴},$$

$$\therefore \text{点 } E \text{ 与点 } B \text{ 纵坐标相等, 且 } E \text{ 在反比例函数图象上},$$

$$\therefore E\left(\frac{4}{3}, 6\right),$$

$$\therefore CE = \frac{4}{3},$$

$$\therefore S_{\text{四边形} ODBE} = S_{\text{梯形} OABC} - S_{\triangle OCE} - S_{\triangle OAD} = \frac{1}{2} \times (2+5) \times 6 - \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{4}{3} - \frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 12,$$

故答案为: 12.

三、解答题 (本题 4 个小题, 每小题 6 分, 共 24 分)

18. 计算: $-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} + \tan 60^\circ + |\sqrt{3} - 2| + (\pi - 2024)^0.$

【答案】 11

【解析】

【分析】 本题考查实数的混合运算. 根据零指数幂, 负整数指数幂, 特殊角的三角函数值计算即可得出答案.

【详解】 解: $-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} + \tan 60^\circ + |\sqrt{3} - 2| + (\pi - 2024)^0$

$$= 8 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} + 1$$

$$= 11.$$

19. 先化简, 再求值: $\left(\frac{4}{x+2} + x - 2\right) \div \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} + 3$, 其中 $x = -\frac{7}{2}$.

【答案】 $x + 3, -\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了分式的化简求值, 掌握分式混合运算法则是解题的关键. 根据分式的混合运算法则进行化简, 再代入求值即可.

【详解】解： $\left(\frac{4}{x+2} + x - 2\right) \div \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} + 3$

$$= \left[\frac{4}{x+2} + \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} \right] \div \frac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)} + 3$$

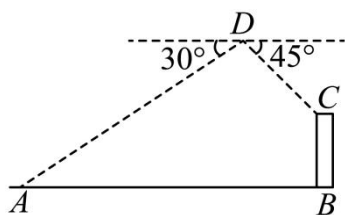
$$= \frac{4 + x^2 - 4}{x+2} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} + 3$$

$$= \frac{x^2}{x+2} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} + 3$$

$$= x + 3,$$

当 $x = -\frac{7}{2}$ 时，原式 $= -\frac{7}{2} + 3 = -\frac{1}{2}$.

20. 综合实践活动中，数学兴趣小组利用无人机测量大楼的高度. 如图，无人机在离地面 40 米的 D 处，测得操控者 A 的俯角为 30° ，测得楼 BC 楼顶 C 处的俯角为 45° ，又经过人工测量得到操控者 A 和大楼 BC 之间的水平距离是 80 米，则楼 BC 的高度是多少米？（点 A, B, C, D 都在同一平面内，参考数据： $\sqrt{3} \approx 1.7$ ）

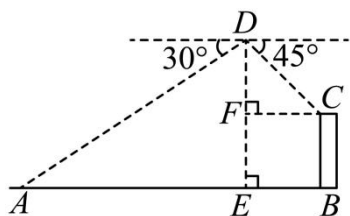


【答案】楼 BC 的高度为 $(40\sqrt{3} - 40)$ 米.

【解析】

【分析】本题考查了解直角三角形的应用，矩形的判定与性质等知识. 过 D 作 $DE \perp AB$ 于 E ，过 C 作 $CF \perp DE$ 于 F ，则四边形 $BCFE$ 是矩形，则 $CF = BE$ ， $BC = EF$ ，由题意知 $AE = \frac{DE}{\tan 30^\circ} = 40\sqrt{3}$ ， $DF = CF$ ，根据 $DF = CF = BE = AB - AE$ 求 DF 的值，根据 $BC = EF = DE - DF$ 求 BC 的值即可.

【详解】解：如图，过 D 作 $DE \perp AB$ 于 E ，过 C 作 $CF \perp DE$ 于 F ，则四边形 $BCFE$ 是矩形，



$$\therefore CF = BE, \quad BC = EF,$$

由题意知 $AE = \frac{DE}{\tan 30^\circ} = 40\sqrt{3}$ ， $DF = CF$ ，

$$\therefore DF = CF = BE = AB - AE = 80 - 40\sqrt{3},$$

$$\therefore BC = EF = DE - DF = 40 - (80 - 40\sqrt{3}) = 40\sqrt{3} - 40,$$

$\therefore$ 楼 BC 的高度为 $(40\sqrt{3} - 40)$ 米.

21. 从一副普通的扑克牌中取出五张牌，它们的牌面数字分别是 4, 4, 5, 5, 6.

(1) 将这五张扑克牌背面朝上，洗匀后从中随机抽取一张，则抽取的这张牌的牌面数字是 4 的概率是多少？

(2) 将这五张扑克牌背面朝上，洗匀后从中随机抽取一张（不放回），再从中随机抽取第二张，请用列表或画树状图的方法，求抽取的这两张牌的牌面数字之和为奇数的概率.

【答案】(1) $\frac{2}{5}$

(2) $\frac{3}{5}$

【解析】

【分析】本题考查的是用树状图法求概率，树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，适合两步或两步以上完成的事件，解题时要注意此题是放回试验还是不放回试验，用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比.

(1) 直接用概率公式求解即可；

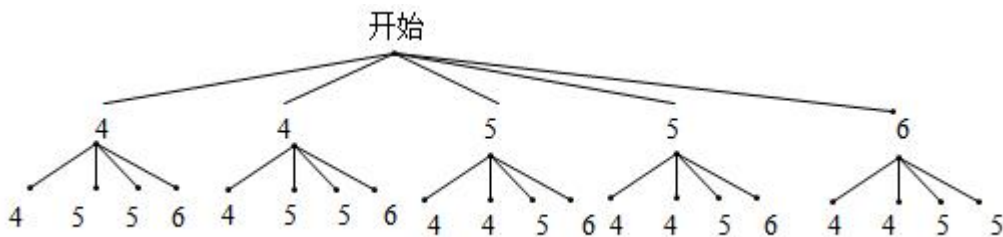
(2) 画树状图，再利用概率公式进行计算即可.

【小问 1 详解】

解：将这五张扑克牌背面朝上，洗匀，从中随机抽取一张，抽取牌面数字是 4 的概率为： $\frac{2}{5}$ ；

【小问 2 详解】

解：画树状图，如下，



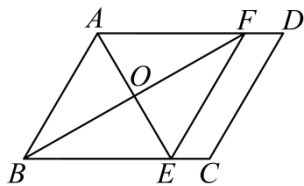
共有 20 种等可能事件，其中抽取的这两张牌的牌面数字之和为奇数有 12 种，

所以抽取的这两张牌的牌面数字之和为奇数的概率为 $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.

四、解答题（本题 7 分）

22. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 F 在边 AD 上， $AB = AF$ ，连接 BF ，点 O 为 BF 的中点， AO

的延长线交边 BC 于点 E ，连接 EE



(1) 求证：四边形 $ABEF$ 是菱形：

(2) 若平行四边形 $ABCD$ 的周长为 22, $CE = 1$, $\angle BAD = 120^\circ$ ，求 AE 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $AE = 5$

【解析】

【分析】本题主要考查平行四边形的判定与性质，菱形的判定与性质，等边三角形的判定与性质等知识：

(1) 由平行四边形的性质得 $AF \parallel BE$, $\angle AFB = \angle EBF$, $\angle FAE = \angle BEA$, 再证明 $\triangle AOF \cong \triangle EOB$, 得出 $BE = AF$, 证明出四边形 $ABEF$ 是平行四边形, 由 $AB = AF$ 得出四边形 $ABEF$ 是菱形:

(2) 求出菱形 $ABEF$ 的周长为 20, 得出 $AB = 5$, 再证明 $\triangle ABE$ 是等边三角形, 得出 $AE = AB = 5$.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC$, 即 $AF \parallel BE$,

$\therefore \angle AFB = \angle EBF$, $\angle FAE = \angle BEA$,

$\because O$ 为 BF 的中点,

$\therefore BO = FO$,

$\therefore \triangle AOF \cong \triangle EOB$,

$\therefore BE = FA$,

$\therefore AF \parallel BE$,

$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 是平行四边形,

又 $AB = AF$,

$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 是菱形;

【小问 2 详解】

解: $\because AD = BC$, $AF = BE$,

$\therefore DF = CE = 1$,

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 的周长为 22,

$\therefore$ 菱形 $ABEF$ 的周长为: $22 - 2 = 20$,

$\therefore AB = 20 \div 4 = 5$,

$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 是菱形,

$\therefore \angle BAE = \frac{1}{2} \angle BAD = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$,

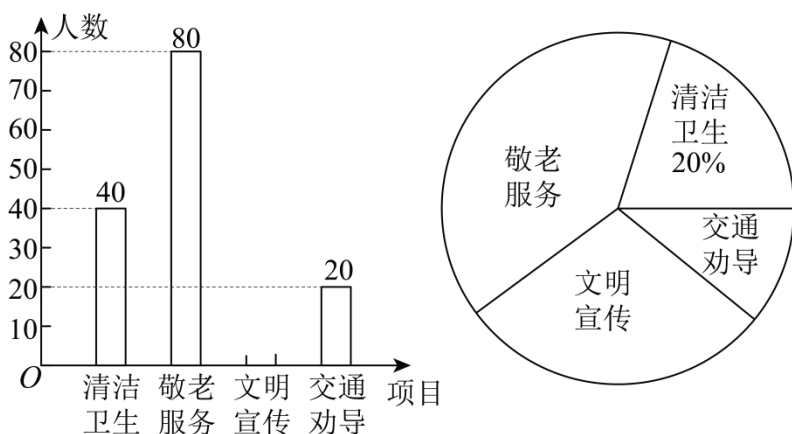
又 $AB = AE$,

$\therefore \triangle ABE$ 是等边三角形,

$\therefore AE = AB = 5$.

五、解答题 (本题 7 分)

23. 某市某校组织本校学生参加“市志愿者服务”活动, 其服务项目有“清洁卫生”“敬老服务”“文明宣传”“交通劝导”, 每名参加志愿者服务的学生只参加其中一项. 为了解各项目参与情况, 该校随机调查了部分参加志愿者服务的学生, 将调查结果绘制成如下两幅不完整的统计图.



根据统计图信息, 解答下列问题:

- (1) 本次调查的学生共有_____人, 请补全条形统计图;
- (2) 在扇形统计图中, 求“敬老服务”对应的圆心角的度数;
- (3) 该校共有 2000 名学生, 若有 60% 的学生参加志愿者服务, 请你估计参加“文明宣传”项目的学生人数.

【答案】 (1) 200, 画图见解析

(2) 144°

(3) 360 人

【解析】

【分析】本题主要考查了条形统计图和扇形统计图的综合运用，样本估计总体等，解题的关键是：

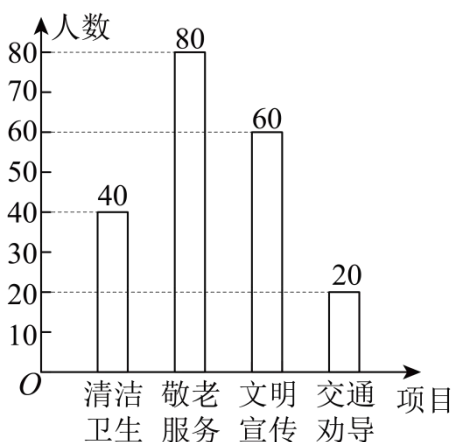
- (1) 利用“整理卫生”的人数除以所占百分比求出调查的总人数，然后总人数减去其余各组人数，求出“文明宣传”的人数，然后补图即可；
- (2) 用 360° 乘以“敬老服务”所占百分比即可；
- (3) 用 $2000 \times 60\%$ 乘以“文明宣传”所占的百分比即可.

【小问 1 详解】

解：本次调查的学生共有 $40 \div 20\% = 200$ 人，

“文明宣传”的人数有 $200 - 40 - 80 - 20 = 60$ 人，

补图如下：



故答案为：200；

【小问 2 详解】

$$\text{解： } 360^\circ \times \frac{80}{200} = 144^\circ,$$

$\therefore$ “敬老服务”对应的圆心角的度数是 144° ，

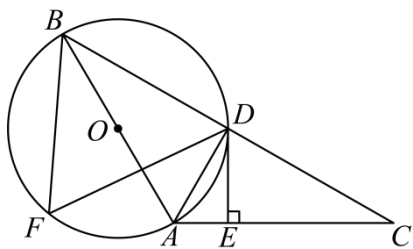
【小问 3 详解】

$$\text{解： } 2000 \times 60\% \times \frac{60}{200} = 360,$$

$\therefore$ 估计参加“文明宣传”项目的学生人数为 360 人.

六、解答题（本题 8 分）

24. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，以 AB 为直径的 $\odot O$ 交 BC 于点 D ， $DE \perp AC$ ，垂足为 E 。 $\odot O$ 的两条弦 FB ， FD 相交于点 F ， $\angle DAE = \angle BFD$ 。



(1) 求证: DE 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $\angle C = 30^\circ$, $CD = 2\sqrt{3}$, 求扇形 OBD 的面积.

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{4\pi}{3}$

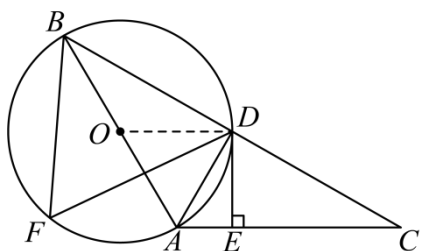
【解析】

【分析】(1) 连接 OD , 利用等边对等角, 圆周角定理等可得出 $\angle ODA = \angle DAE$, 由垂直的定义得出 $\angle ADE + \angle DAE = 90^\circ$, 等量代换得出 $\angle ADE + \angle ODA = 90^\circ$, 即 $OD \perp DE$, 然后根据切线的判定即可得证;

(2) 先利用含 30° 的直角三角形的性质求出 $DE = \sqrt{3}$, 同时求出 $\angle EDC = 60^\circ$, 进而求出 $\angle BOD = 30^\circ$, 利用等边对等角, 三角形外角的性质等可求出 $\angle AOD = 60^\circ$, $\angle BOD = 120^\circ$, 证明 $\triangle AOD$ 是等边三角形, 得出 $AD = OD$, $\angle ODA = 60^\circ$, 进而求出 $\angle ADE = 30^\circ$, 在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, 利用余弦定义可求出 $AD = 2$, 最后利用扇形面积公式求解即可.

【小问 1 详解】

证明: 连接 OD ,



$$\therefore OD = OA,$$

$$\therefore \angle ODA = \angle OAD,$$

$$\text{又 } \angle DAB = \angle BFD, \angle DAE = \angle BFD,$$

$$\therefore \angle ODA = \angle DAE,$$

$$\therefore DE \perp AC,$$

$$\therefore \angle ADE + \angle DAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE + \angle ODA = 90^\circ, \text{ 即 } OD \perp DE,$$

又 OD 是 $\odot O$ 的半径;

$\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线;

【小问 2 详解】

解: $\because \angle C = 30^\circ$, $CD = 2\sqrt{3}$, $DE \perp AC$,

$$\therefore DE = \frac{1}{2}CD = \sqrt{3}, \quad \angle CDE = 60^\circ,$$

又 $OD \perp DE$,

$$\therefore \angle BDO = 180^\circ - \angle ODE - \angle CDE = 30^\circ,$$

$$\because OB = OD,$$

$$\therefore \angle OBD = \angle ODB = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD = 60^\circ, \quad \angle BOD = 120^\circ$$

又 $OD = OA$,

$\therefore \triangle AOD$ 是等边三角形,

$$\therefore AD = OD, \quad \angle ODA = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = 30^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ADE \text{ 中, } AD = \frac{DE}{\cos \angle ADE} = \frac{\sqrt{3}}{\cos 30^\circ} = 2,$$

$$\therefore \text{扇形 } OBD \text{ 的面积为 } \frac{120\pi \cdot 2^2}{360} = \frac{4\pi}{3}.$$

【点睛】本题考查了切线的判定，圆周角定理，等边三角形的判定与性质，等腰三角形的性质，解直角三角形的应用，三角形外角的性质，灵活运用所学知识是解题的关键.

七、解答题 (本题 10 分)

25. 某超市从某水果种植基地购进甲、乙两种优质水果，经调查，这两种水果的进价和售价如表所示：

水果种类	进价 (元/千克)	售价 (元/千克)
甲	a	22
乙	b	25

该超市购进甲种水果 18 千克和乙种水果 6 千克需 366 元；购进甲种水果 30 千克和乙种水果 15 千克需 705 元.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 该超市决定每天购进甲、乙两种水果共 150 千克进行销售，其中甲种水果的数量不少于 50 千克，且不大于 120 千克。实际销售时，若甲种水果超过 80 千克，则超过部分按每千克降价 5 元销售。求超市当天销售完这两种水果获得的利润 y (元) 与购进甲种水果的数量 x (千克) 之间的函数关系式 (写出自变量 x 的取值范围)，并求出在获得最大利润时，超市的进货方案以及最大利润。

【答案】(1) $a=14$, $b=19$

(2) $y = \begin{cases} 2x+900 & (50 \leq x \leq 80) \\ -3x+1300 & (80 < x \leq 120) \end{cases}$, 购进甲种水果 80 千克, 乙种水果 70 千克, 最大利润为 1060 元

【解析】

【分析】本题考查了二元一次方程组的应用，一次函数的应用，解题的关键是：

(1) 根据“购进甲种水果 18 千克和乙种水果 6 千克需 366 元；购进甲种水果 30 千克和乙种水果 15 千克需 705 元”列方程求解即可；

(2) 分 $50 \leq x \leq 80$, $80 < x \leq 120$ 两种情况讨论，根据总利润等于甲的利润与乙的利润列出函数关系式，然后利用一次函数的性质求解即可。

【小问 1 详解】

解：根据题意，得 $\begin{cases} 18a+6b=366 \\ 30a+15b=705 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} a=14 \\ b=19 \end{cases}$;

【小问 2 详解】

解：当 $50 \leq x \leq 80$ 时，

根据题意，得 $y = (22-14)x + (25-19)(150-x) = 2x+900$,

$\therefore 2 > 0$,

$\therefore y$ 随 x 的增大而增大，

$\therefore$ 当 $x=80$ 时， y 有最大值，最大值为 $2 \times 80 + 900 = 1060$,

即购进甲种水果 80 千克，乙种水果 70 千克，最大利润为 1060 元；

当 $80 < x \leq 120$ 时，

根据题意，得 $y = (22-14) \times 80 + (22-14-5) \times (x-80) + (25-19)(150-x) = -3x+1300$,

$\therefore -3 < 0$,

$\therefore y$ 随 x 的增大而减小，

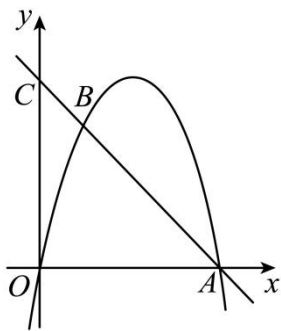
$\therefore x=80$ 时， y 有最大值，最大值为 $-3 \times 80 + 1300 = 1060$,

即购进甲种水果 80 千克，乙种水果 70 千克，最大利润为 1060 元；

综上， $y = \begin{cases} 2x + 900 & (50 \leq x \leq 80) \\ -3x + 1300 & (80 < x \leq 120) \end{cases}$ ，购进甲种水果 80 千克，乙种水果 70 千克，最大利润为 1060 元。

八、解答题（本题 13 分）

26. 如图，在平面直角坐标系中，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图像经过原点和点 $A(4, 0)$ 。经过点 A 的直线与该二次函数图像交于点 $B(1, 3)$ ，与 y 轴交于点 C。



(1) 求二次函数的解析式及点 C 的坐标；

(2) 点 P 是二次函数图象上的一个动点，当点 P 在直线 AB 上方时，过点 P 作 $PE \perp x$ 轴于点 E，与直线 AB 交于点 D，设点 P 的横坐标为 m 。

① m 为何值时线段 PD 的长度最大，并求出最大值；

② 是否存在点 P，使得 $\triangle BPD$ 与 $\triangle AOC$ 相似。若存在，请求出点 P 坐标；若不存在，请说明理由。

【答案】 (1) $y = -x^2 + 4x$ ， $C(0, 4)$

(2) ① 当 $m = \frac{5}{2}$ 时，PD 有最大值为 $\frac{9}{4}$ ；② 当 P 的坐标为 $(2, 4)$ 或 $(3, 3)$ 时， $\triangle BPD$ 与 $\triangle AOC$ 相似

【解析】

【分析】 (1) 把 $(0, 0)$ ， $A(4, 0)$ ， $B(1, 3)$ 代入 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 求解即可，利用待定系数法求出直线 AB 解析式，然后令 $x = 0$ ，求出 y ，即可求出 C 的坐标；

(2) ① 根据 P、D 的坐标求出 PD，然后根据二次函数的性质求解即可；

② 先利用等边对等角，平行线的判定与性质等求出 $\angle PDB = \angle ACO = 45^\circ$ ，然后分 $\triangle PBD \sim \triangle OAC$ ， $\triangle PBD \sim \triangle AOC$ 两种情况讨论过，利用相似三角形的性质、等腰三角形的判定与性质等求解即可。

【小问 1 详解】

解：把 $(0, 0)$ ， $A(4, 0)$ ， $B(1, 3)$ 代入 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)，

$$\text{得} \begin{cases} c = 0 \\ 16a + 4b + c = 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 0 \end{cases},$$

$\therefore$ 二次函数的解析式为 $y = -x^2 + 4x$,

设直线 AB 解析式为 $y = mx + n$,

$$\text{则} \begin{cases} 4m + n = 0 \\ m + n = 3 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} m = -1 \\ n = 4 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AB 解析式为 $y = -x + 4$,

当 $x = 0$ 时, $y = 4$,

$\therefore C(0, 4)$;

【小问 2 详解】

解: ① 设 $P(m, -m^2 + 4m)$ ($1 < m < 4$), 则 $D(m, -m + 4)$,

$$\therefore PD = -m^2 + 4m - (-m + 4)$$

$$= -m^2 + 5m - 4$$

$$= -\left(m - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{4},$$

$\therefore$ 当 $m = \frac{5}{2}$ 时, PD 有最大值为 $\frac{9}{4}$;

② $\because A(4, 0), C(0, 4)$,

$$\therefore AO = CO = 4,$$

又 $\angle AOC = 90^\circ$,

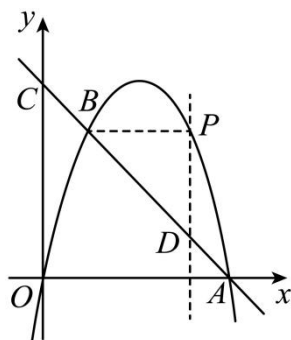
$$\therefore \angle ACO = \angle AOC = 45^\circ,$$

又 $PD \perp x$ 轴,

$\therefore PD \parallel y$ 轴,

$$\therefore \angle PDB = \angle ACO = 45^\circ,$$

当 $\triangle PBD \sim \triangle OAC$ 时, 如图,



$$\therefore \angle BPD = \angle AOC = 90^\circ,$$

$$\therefore BP \parallel x \text{ 轴},$$

$$\therefore P \text{ 的纵坐标为 } 3,$$

$$\text{把 } y = 3 \text{ 代入 } y = -x^2 + 4x, \text{ 得 } 3 = -x^2 + 4x,$$

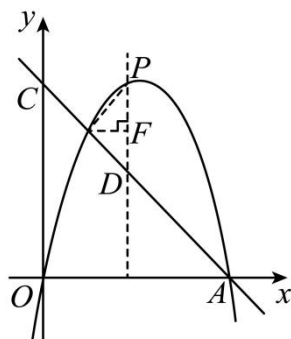
$$\text{解得 } x_1 = 1, \quad x_2 = 3,$$

$$\therefore m = 3,$$

$$\therefore -m^2 + 4m = 3,$$

$$\therefore P \text{ 的坐标为 } (3, 3);$$

当 $\triangle PBD \sim \triangle AOC$ 时, 如图, 过 B 作 $BF \perp PD$ 于 F ,



$$\text{则 } BF = m - 1, \quad \angle PBD = \angle AOC = 90^\circ,$$

$$\text{又 } \angle BDP = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BPD = 45^\circ = \angle BDP,$$

$$\therefore BP = BD,$$

$$\therefore PF = DF,$$

$$\therefore BF = \frac{1}{2} PD,$$

$$\therefore m - 1 = \frac{1}{2}(-m^2 + 5m - 4),$$

解得 $m_1 = 2$, $m_2 = 1$ (舍去),

$$\therefore -m^2 + 4m = 4,$$

$\therefore P$ 的坐标为 $(2, 4)$

综上, 当 P 的坐标为 $(2, 4)$ 或 $(3, 3)$ 时, $\triangle BPD$ 与 $\triangle AOC$ 相似.

【点睛】 本题考查了二次函数的应用, 待定系数法求二次函数、一次函数解析式, 二次函数的性质, 相似三角形的判定与性质, 等腰直角三角形的判定与性质等知识, 明确题意, 添加合适辅助线, 合理分类讨论是解题的关键.