

机密★考试结束前

2024 年云南省初中学业水平考试

数学试题卷

(全卷三个大题，共 27 个小题，共 8 页；满分 100 分，考试用时 120 分钟)

注意事项：

1. 本卷为试题卷。考生必须在答题卡上解题作答。答案应书写在答题卡的相应位置上，在试题卷、草稿纸上作答无效。
2. 考试结束后，请将试题卷和答题卡一并交回。

一、选择题（本大题共 15 小题，每小题只有一个正确选项，每小题 2 分，共 30 分）

1. 中国是最早使用正负数表示具有相反意义的量的国家。若向北运动 100 米记作 +100 米，则向南运动 100 米可记作（ ）

A. 100 米 B. -100 米 C. 200 米 D. -200 米

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了正负数的意义，根据正负数的意义即可求解，理解正负数的意义是解题的关键。

【详解】解：若向北运动 100 米记作 +100 米，则向南运动 100 米可记作 -100 米，

故选：B。

2. 某市今年参加初中学业水平考试的学生大约有 57800 人，57800 用科学记数法可以表示为（ ）

A. 5.78×10^4 B. 57.8×10^3 C. 578×10^2 D. 5780×10

【答案】A

【解析】

【分析】此题考查科学记数法的表示方法。科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值。

科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数。确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同。当原数绝对值 ≥ 10 时， n 是正整数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负整数。

【详解】解： $57800 = 5.78 \times 10^4$ ，

故选：A。

3. 下列计算正确的是（ ）

A. $x^3 + 5x^3 = 6x^4$

B. $x^6 \div x^3 = x^5$

C. $(a^2)^3 = a^7$

D. $(ab)^3 = a^3b^3$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了合并同类项、幂的乘方、积的乘方、同底数幂的除法，熟练掌握运算法则是解答的关键．利用合并同类项法则、幂的乘方运算法则、同底数幂的除法运算法则、积的乘方运算法则进行运算，并逐项判断即可．

【详解】解：A、 $x^3 + 5x^3 = 6x^3$ ，选项计算错误，不符合题意；

B、 $x^6 \div x^3 = x^3$ ，选项计算错误，不符合题意；

C、 $(a^2)^3 = a^6$ ，选项计算错误，不符合题意；

D、 $(ab)^3 = a^3b^3$ ，选项计算正确，符合题意；

故选：D．

4. 式子 $\sqrt{x}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围是（ ）

A. $x > 0$

B. $x \geq 0$

C. $x < 0$

D. $x \leq 0$

【答案】B

【解析】

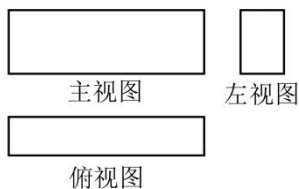
【分析】本题主要考查了二次根式有意义的条件．根据二次根式有意义的条件，即可求解．

【详解】解：∵ 式子 $\sqrt{x}$ 在实数范围内有意义，

∴ x 的取值范围是 $x \geq 0$ ．

故选：B

5. 某图书馆的一个装饰品是由几个几何体组合成的．其中一个几何体的三视图（主视图也称正视图，左视图也称侧视图）如图所示，这个几何体是（ ）



A. 正方体

B. 圆柱

C. 圆锥

D. 长方体

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了几何体的三视图，熟悉各类几何体的三视图是解决本题的关键．根据长方体三视图的

特点确定结果.

【详解】解：根据三视图的特点：几何体的三视图都是长方形，确定该几何体为长方体.

故选：D.

6. 一个七边形的内角和等于 ()

- A. 540° B. 900° C. 980° D. 1080°

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查多边形的内角和，根据 n 边形的内角和为 $(n-2) \cdot 180^\circ$ 求解，即可解题.

【详解】解：一个七边形的内角和等于 $(7-2) \times 180^\circ = 900^\circ$,

故选：B.

7. 甲、乙、丙、丁四名运动员参加射击项目选拔赛，每人 10 次射击成绩的平均数 $\bar{x}$ (单位：环) 和方差 s^2

如下表所示：

	甲	乙	丙	丁
$\bar{x}$	9.9	9.5	8.2	8.5
s^2	0.09	0.65	0.16	2.85

根据表中数据，从中选择一名成绩好且发挥稳定的运动员参加比赛，应该选择 ()

- A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查根据平均数和方差作决策，重点考查方差的意义. 方差是用来衡量一组数据波动大小的量，方差越大，表明这组数据偏离平均数越大，即波动越大，数据越不稳定；反之，方差越小，表明这组数据分布比较集中，各数据偏离平均数越小，即波动越小，数据越稳定. 结合表中数据，先找出平均数最大的运动员；再根据方差的意义，找出方差最小的运动员即可.

【详解】解：由表中数据可知，射击成绩的平均数最大的是甲，射击成绩方差最小的也是甲，

$\therefore$ 从中选择一名成绩好且发挥稳定的运动员参加比赛，应该选择甲，

故选：A.

8. 已知 AF 是等腰 $\triangle ABC$ 底边 BC 上的高，若点 F 到直线 AB 的距离为 3，则点 F 到直线 AC 的距离为 ()

A. $\frac{3}{2}$

B. 2

C. 3

D. $\frac{7}{2}$

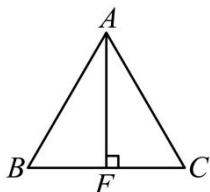
【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了等腰三角形的性质，角平分线的性质定理，熟练掌握知识点是解题的关键.

由等腰三角形“三线合一”得到 AF 平分 $\angle BAC$ ，再角平分线的性质定理即可求解.

【详解】解：如图，

 $\therefore AF$ 是等腰 $\triangle ABC$ 底边 BC 上的高， $\therefore AF$ 平分 $\angle BAC$ ， $\therefore$ 点 F 到直线 AB ， AC 的距离相等， $\therefore$ 点 F 到直线 AB 的距离为 3， $\therefore$ 点 F 到直线 AC 的距离为 3.

故选：C.

9. 两年前生产 1 千克甲种药品的成本为 80 元，随着生产技术的进步，现在生产 1 千克甲种药品的成本为 60 元. 设甲种药品成本的年平均下降率为 x ，根据题意，下列方程正确的是（ ）

A. $80(1-x^2) = 60$

B. $80(1-x)^2 = 60$

C. $80(1-x) = 60$

D. $80(1-2x) = 60$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的应用，根据甲种药品成本的年平均下降率为 x ，利用现在生产 1 千克甲种药品的成本 = 两年前生产 1 千克甲种药品的成本 $\times (1 - \text{平均下降率})^2$ ，即可得出关于 x 的一元二次方程.【详解】解： $\because$ 甲种药品成本的年平均下降率为 x ，根据题意可得 $80(1-x)^2 = 60$ ，

故选：B.

10. 按一定规律排列的代数式： $2x$ ， $3x^2$ ， $4x^3$ ， $5x^4$ ， $6x^5$ ， $\dots$ ，第 n 个代数式是（ ）

- A. $2x^n$ B. $(n-1)x^n$ C. nx^{n+1} D. $(n+1)x^n$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了数列的规律变化，根据数列找到变化规律即可求解，仔细观察和总结规律是解题的关键.

【详解】解： $\because$ 按一定规律排列的代数式： $2x$ ， $3x^2$ ， $4x^3$ ， $5x^4$ ， $6x^5$ ， ，

$\therefore$ 第 n 个代数式是 $(n+1)x^n$ ，

故选：D.

11. 中华文明，源远流长；中华汉字，寓意深广. 下列四个选项中，是轴对称图形的为（ ）

- A. 爱 B. 国 C. 敬 D. 业

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查轴对称图形的定义，根据轴对称图形的定义（如果一个平面图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形就叫做轴对称图形，）进行逐一判断即可.

【详解】解：A、图形不是轴对称图形，不符合题意；

B、图形不是轴对称图形，不符合题意；

C、图形不是轴对称图形，不符合题意；

D、图形是轴对称图形，符合题意；

故选：D.

12. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ，已知 $AB = 3$ ， $BC = 4$ ，则 $\tan A$ 的值为（ ）

- A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据三角函数的定义求解即可.

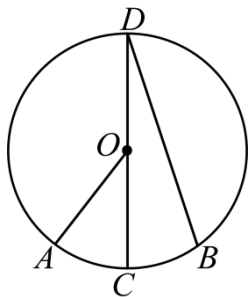
【详解】解： $\because \angle B = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $BC = 4$ ，

$$\therefore \tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3},$$

故选：C.

【点睛】本题考查了三角函数的求法，解题关键是理解三角函数的意义，明确是直角三角形中哪两条边的比.

13. 如图, CD 是 $\odot O$ 的直径, 点 A 、 B 在 $\odot O$ 上. 若 $\widehat{AC} = \widehat{BC}$, $\angle AOC = 36^\circ$, 则 $\angle D =$ ()



- A. 9° B. 18° C. 36° D. 45°

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了弧弦圆心角的关系, 圆周角定理, 连接 OB , 由 $\widehat{AC} = \widehat{BC}$ 可得 $\angle BOC = \angle AOC = 36^\circ$, 进而由圆周角定理即可求解, 掌握圆的有关性质是解题的关键.

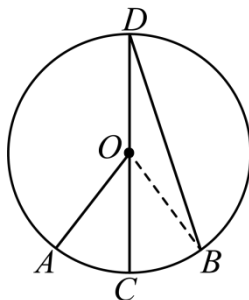
【详解】解: 连接 OB ,

$$\because \widehat{AC} = \widehat{BC},$$

$$\therefore \angle BOC = \angle AOC = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle D = \frac{1}{2} \angle BOC = 18^\circ,$$

故选: B.



14. 分解因式: $a^3 - 9a =$ ()

- A. $a(a-3)(a+3)$ B. $a(a^2+9)$ C. $(a-3)(a+3)$ D. $a^2(a-9)$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了提取公因式和公式法进行因式分解, 熟练掌握知识点是解题的关键.

将 $a^3 - 9a$ 先提取公因式, 再运用平方差公式分解即可.

【详解】解： $a^3 - 9a = a(a^2 - 9) = a(a+3)(a-3)$,

故选：A.

15. 某校九年级学生参加社会实践，学习编织圆锥型工艺品. 若这种圆锥的母线长为40厘米，底面圆的半径为30厘米，则该圆锥的侧面积为（ ）

A. 700π 平方厘米

B. 900π 平方厘米

C. 1200π 平方厘米

D. 1600π 平方厘米

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了圆锥的侧面积，先求出圆锥底面圆的周长，再根据圆锥的侧面积计算公式计算即可求解，掌握圆锥侧面积计算公式是解题的关键.

【详解】解：圆锥的底面圆周长为 $2\pi \times 30 = 60\pi$ 厘米，

$\therefore$ 圆锥的侧面积为 $\frac{1}{2} \times 60\pi \times 40 = 1200\pi$ 平方厘米，

故选：C.

二、填空题（本大题共4小题，每小题2分，共8分）

16. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + c = 0$ 无实数根，则 c 的取值范围是_____.

【答案】 $c > 1$

【解析】

【分析】利用判别式的意义得到 $\Delta = (-2)^2 - 4c < 0$ ，然后解不等式即可.

【详解】解：根据题意得 $\Delta = (-2)^2 - 4c < 0$ ，

解得 $c > 1$.

故答案为： $c > 1$.

【点睛】本题考查了根的判别式，一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系：当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ 时，方程无实数根.

17. 已知点 $P(2, n)$ 在反比例函数 $y = \frac{10}{x}$ 的图象上，则 $n =$ _____.

【答案】5

【解析】

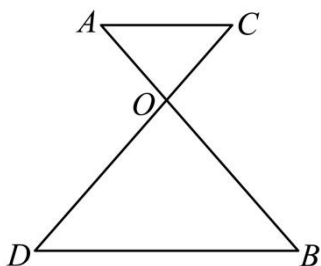
【分析】本题考查反比例函数图象上点的坐标特征，将点 $P(2, n)$ 代入 $y = \frac{10}{x}$ 求值，即可解题.

【详解】解： $\because$ 点 $P(2, n)$ 在反比例函数 $y = \frac{10}{x}$ 的图象上，

$$\therefore n = \frac{10}{2} = 5,$$

故答案为：5.

18. 如图， AB 与 CD 交于点 O ，且 $AC \parallel BD$. 若 $\frac{OA+OC+AC}{OB+OD+BD} = \frac{1}{2}$ ，则 $\frac{AC}{BD} = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查相似三角形的判定和性质，证明 $\triangle ACO \sim \triangle BDO$ ，根据相似三角形周长之比等于相似比，即可解题.

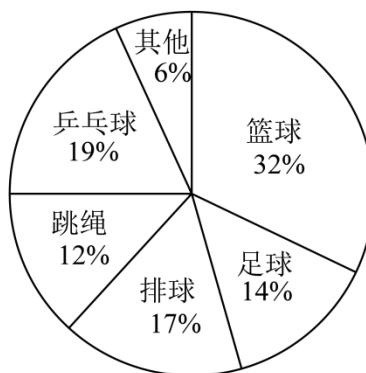
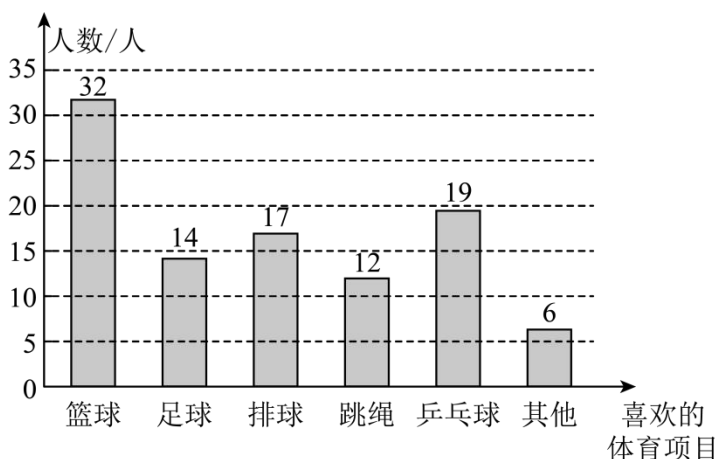
【详解】 解： $\because AC \parallel BD$,

$$\therefore \triangle ACO \sim \triangle BDO,$$

$$\therefore \frac{AC}{BD} = \frac{OA+OC+AC}{OB+OD+BD} = \frac{1}{2},$$

故答案为： $\frac{1}{2}$.

19. 某中学为了丰富学生的校园体育锻炼生活，决定根据学生的兴趣爱好采购一批体育用品供学生课后锻炼使用. 学校数学兴趣小组为给学校提出合理的采购意见，随机抽取了该校学生 100 人，了解他们喜欢的体育项目，将收集的数据整理，绘制成如下统计图：



注：该校每位学生被抽到的可能性相等，每位被抽样调查的学生选择且只选择一种喜欢的体育项目.

若该校共有学生 1000 人，则该校喜欢跳绳的学生大约有 120 人.

【答案】 120

【解析】

【分析】本题考查了条形统计图和扇形统计图，用1000乘以12%即可求解，看懂统计图是解题的关键.

【详解】解：该校喜欢跳绳的学生大约有 $1000 \times 12\% = 120$ 人，

故答案为：120.

三、解答题（本大题共8小题，共62分）

20. 计算： $7^0 + \left(\frac{1}{6}\right)^{-1} + \left|-\frac{1}{2}\right| - (\sqrt{5})^2 - \sin 30^\circ$.

【答案】2

【解析】

【分析】本题考查了实数的混合运算，掌握零指数幂，负整指数幂，特殊角的三角函数值，二次根式的性质，绝对值化简是解题的关键. 根据相关运算法则分别进行计算，再进行加减运算，即可解题.

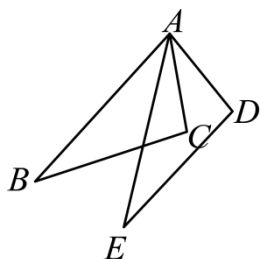
【详解】解： $7^0 + \left(\frac{1}{6}\right)^{-1} + \left|-\frac{1}{2}\right| - (\sqrt{5})^2 - \sin 30^\circ$,

$$= 1 + 6 + \frac{1}{2} - 5 - \frac{1}{2},$$

$$= 2.$$

21. 如图，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AED$ 中， $AB = AE$ ， $\angle BAE = \angle CAD$ ， $AC = AD$.

求证： $\triangle ABC \cong \triangle AED$.



【答案】见解析

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的判定和性质，熟练掌握三角形全等的判定定理是解题关键. 利用“SAS”证明 $\triangle ABC \cong \triangle AED$ ，即可解决问题.

【详解】证明： $\because \angle BAE = \angle CAD$,

$\therefore \angle BAE + \angle EAC = \angle CAD + \angle EAC$ ，即 $\angle BAC = \angle EAD$ ，

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AED$ 中，

$$\begin{cases} AB = AE \\ \angle BAC = \angle EAD, \\ AC = AD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle AED (\text{SAS})$.

22. 某旅行社组织游客从 A 地到 B 地的航天科技馆参观，已知 A 地到 B 地的路程为 300 千米，乘坐 C 型车比乘坐 D 型车少用 2 小时，C 型车的平均速度是 D 型车的平均速度的 3 倍，求 D 型车的平均速度.

【答案】D 型车的平均速度为 100km/h

【解析】

【分析】本题考查分式方程的应用，设 D 型车的平均速度为 $x\text{km/h}$ ，则 C 型车的平均速度是 $3x\text{km/h}$ ，根据“乘坐 C 型车比乘坐 D 型车少用 2 小时，”建立方程求解，并检验，即可解题.

【详解】解：设 D 型车的平均速度为 $x\text{km/h}$ ，则 C 型车的平均速度是 $3x\text{km/h}$ ，

根据题意可得， $\frac{300}{x} - \frac{300}{3x} = 2$ ，

整理得， $6x = 600$ ，

解得 $x = 100$ ，

经检验 $x = 100$ 是该方程的解，

答：D 型车的平均速度为 100km/h.

23. 为使学生更加了解云南，热爱家乡，热爱祖国，体验“有一种叫云南的生活”. 某校七年级年级组准备从博物馆 a 、植物园 b 两个研学基地中，随机选择一个基地研学，且每个基地被选到的可能性相等；八年级年级组准备从博物馆 a 、植物园 b 、科技馆 c 三个研学基地中，随机选择一个基地研学，且每个基地被选到的可能性相等. 记选择博物馆 a 为 a ，选择植物园 b 为 b ，选择科技馆 c 为 c ，记七年级年级组的选择为 x ，八年级年级组的选择为 y .

(1) 请用列表法或画树状图法中的一种方法，求 (x, y) 所有可能出现的结果总数；

(2) 求该校七年级年级组、八年级年级组选择的研学基地互不相同的概率 P .

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】本题考查利用列表法或画树状图求概率，解题的关键在于根据题意列表或画树状图.

(1) 根据题意列出表格（或画出树状图）即可解题；

(2) 根据概率 = 所求情况数与总情况数之比. 由表格（或树状图），得到共有 6 个等可能的结果，该校七年级年级组、八年级年级组选择的研学基地互不相同的情况有 4 种，再由概率公式求解即可.

【小问 1 详解】

解：由题意可列表如下：

	a	b
a	(a, a)	(b, a)
b	(a, b)	(b, b)
c	(a, c)	(b, c)

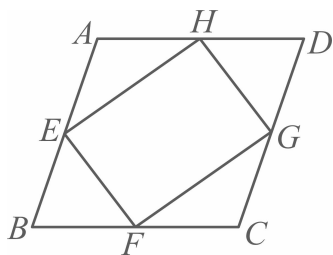
由表格可知， (x, y) 所有可能出现的结果总数为以上6种；

【小问2详解】

解：由表格可知，该校七年级年级组、八年级年级组选择的研学基地互不相同的情况有4种，

$$\therefore P(\text{七年级年级组、八年级年级组选择的研学基地互不相同}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

24. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 、 G 、 H 分别是各边的中点，且 $AB \parallel CD$ ， $AD \parallel BC$ ，四边形 $EFGH$ 是矩形。



(1) 求证：四边形 $ABCD$ 是菱形；

(2) 若矩形 $EFGH$ 的周长为 22，四边形 $ABCD$ 的面积为 10，求 AB 的长。

【答案】(1) 见解析 (2) $\sqrt{11}$

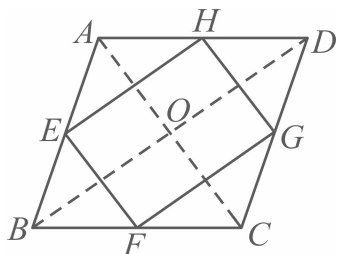
【解析】

【分析】(1) 连接 BD ， AC ，证明四边形 $ABCD$ 是平行四边形，再利用三角形中位线定理得到 $GF \parallel BD$ ， $HG \parallel AC$ ，利用矩形的性质得到 $BD \perp AC$ ，即可证明四边形 $ABCD$ 是菱形；

(2) 利用三角形中位线定理和菱形性质得到 $\frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}AC = OA + OB = 11$ ，利用 $1x$ 面积公式得到 $2OA \cdot OB = 10$ ，再利用完全平方公式结合勾股定理进行变形求解即可得到 AB 。

【小问1详解】

解：连接 BD ， AC ，



$\because AB \parallel CD, AD \parallel BC,$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 中, 点 E, F, G, H 分别是各边的中点,

$\therefore GF \parallel BD, HG \parallel AC,$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是矩形,

$\therefore HG \perp GF,$

$\therefore BD \perp AC,$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形;

【小问 2 详解】

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 中, 点 E, F, G, H 分别是各边的中点,

$\therefore GF = EH = \frac{1}{2}BD, HG = EF = \frac{1}{2}AC,$

$\because$ 矩形 $EFGH$ 的周长为 22,

$\therefore BD + AC = 22,$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

即 $\frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}AC = OA + OB = 11,$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 的面积为 10,

$\therefore \frac{1}{2}BD \cdot AC = 10,$ 即 $2OA \cdot OB = 10,$

$\therefore (OA + OB)^2 = OA^2 + 2OA \cdot OB + OB^2 = 121,$

$\therefore OA^2 + OB^2 = 121 - 10 = 111,$

$\therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{111}.$

【点睛】 本题考查了平行四边形性质和判定, 矩形的性质和判定, 三角形中位线定理, 菱形的性质和判定, 菱形面积公式, 勾股定理, 完全平方公式, 熟练掌握相关性质是解题的关键.

25. A、B 两种型号的吉祥物具有吉祥如意、平安幸福的美好寓意, 深受大家喜欢.

某超市销售 A、B 两种型号的吉祥物, 有关信息见下表:

	成本（单位：元/个）	销售价格（单位：元/个）
A 型号	35	a
B 型号	42	b

若顾客在该超市购买 8 个 A 种型号吉祥物和 7 个 B 种型号吉祥物，则一共需要 670 元；购买 4 个 A 种型号吉祥物和 5 个 B 种型号吉祥物，则一共需要 410 元.

(1) 求 a 、 b 的值；

(2) 若某公司计划从该超市购买 A、B 两种型号的吉祥物共 90 个，且购买 A 种型号吉祥物的数量 x （单位：个）不少于 B 种型号吉祥物数量的 $\frac{4}{3}$ ，又不超过 B 种型号吉祥物数量的 2 倍. 设该超市销售这 90 个吉祥物获得的总利润为 y 元，求 y 的最大值.

注：该超市销售每个吉祥物获得的利润等于每个吉祥物的销售价格与每个吉祥物的成本的差.

【答案】(1) $\begin{cases} a = 40 \\ b = 50 \end{cases}$

(2) 564

【解析】

【分析】本题考查了一次函数、一元一次不等式、二元一次方程组的应用，根据题意正确列出方程和函数解析式是解题的关键.

(1) 根据“购买 8 个 A 种型号吉祥物和 7 个 B 种型号吉祥物，则一共需要 670 元；购买 4 个 A 种型号吉祥物和 5 个 B 种型号吉祥物，则一共需要 410 元”建立二元一次方程组求解，即可解题；

(2) 根据“且购买 A 种型号吉祥物的数量 x （单位：个）不少于 B 种型号吉祥物数量的 $\frac{4}{3}$ ，又不超过 B 种型号吉祥物数量的 2 倍.”建立不等式求解，得到 $\frac{360}{7} \leq x \leq 60$ ，再根据总利润 = A 种型号吉祥物利润 + B 种型号吉祥物利润建立关系式，最后根据一次函数的性质即可得到 y 的最大值.

【小问 1 详解】

解：由题知， $\begin{cases} 8a + 7b = 670 \\ 4a + 5b = 410 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} a = 40 \\ b = 50 \end{cases}$ ；

【小问 2 详解】

解：∵ 购买 A 种型号吉祥物的数量 x 个，

则购买 B 种型号吉祥物的数量 $(90-x)$ 个,

$\because$ 且购买 A 种型号吉祥物的数量 x (单位: 个) 不少于 B 种型号吉祥物数量的 $\frac{4}{3}$,

$$\therefore x \geq \frac{4}{3}(90-x),$$

$$\text{解得 } x \geq \frac{360}{7},$$

$\because A$ 种型号吉祥物的数量又不超过 B 种型号吉祥物数量的 2 倍.

$$\therefore x \leq 2(90-x),$$

$$\text{解得 } x \leq 60,$$

$$\text{即 } \frac{360}{7} \leq x \leq 60,$$

$$\text{由题知, } y = (40-35)x + (50-42)(90-x),$$

$$\text{整理得 } y = -3x + 720,$$

$\therefore y$ 随 x 的增大而减小,

$$\therefore \text{当 } x = 52 \text{ 时, } y \text{ 的最大值为 } y = -3 \times 52 + 720 = 564.$$

26. 已知抛物线 $y = x^2 + bx - 1$ 的对称轴是直线 $x = \frac{3}{2}$. 设 m 是抛物线 $y = x^2 + bx - 1$ 与 x 轴交点的横坐标,

$$\text{记 } M = \frac{m^5 - 33}{109}.$$

(1) 求 b 的值;

(2) 比较 M 与 $\frac{\sqrt{13}}{2}$ 的大小.

【答案】(1) $b = -3$

$$(2) \text{ 当 } M = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \text{ 时, } M > \frac{\sqrt{13}}{2}; \text{ 当 } M = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \text{ 时, } M < \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

【解析】

【分析】(1) 由对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a}$ 直接求解;

$$(2) \text{ 当 } M = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \text{ 时, } M > \frac{\sqrt{13}}{2}; \text{ 当 } M = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \text{ 时, } M < \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

【小问 1 详解】

解: $\because$ 抛物线 $y = x^2 + bx - 1$ 的对称轴是直线 $x = \frac{3}{2}$,

$$\therefore -\frac{b}{2 \times 1} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore b = -3;$$

【小问 2 详解】

解： $\because m$ 是抛物线 $y = x^2 + bx - 1$ 与 x 轴交点的横坐标，

$$\therefore m^2 - 3m - 1 = 0,$$

$$\therefore m^2 - 1 = 3m,$$

$$\therefore m^4 - 2m^2 + 1 = 9m^2,$$

$$\therefore m^4 = 11m^2 - 1,$$

$$\text{而 } m^2 = 3m + 1$$

$$\text{代入得： } m^4 = 11(3m + 1) - 1 = 33m + 10,$$

$$\therefore m^5 = m \cdot m^4 = (33m + 10)m = 33m^2 + 10m = 33(3m + 1) + 10m = 109m + 33,$$

$$\therefore M = \frac{m^5 - 33}{109} = \frac{109m + 33 - 33}{109} = m,$$

$$\therefore m^2 - 3m - 1 = 0,$$

$$\text{解得： } m = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2},$$

$$\text{当 } M = m = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \text{ 时, } M - \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{3}{2} > 0$$

$$\therefore M > \frac{\sqrt{13}}{2};$$

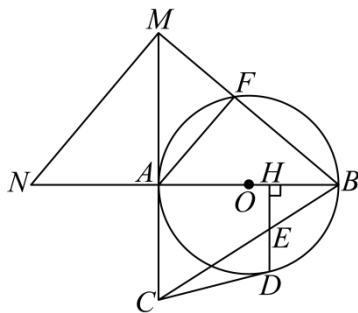
$$\text{当 } M = m = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \text{ 时, } M - \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{3 - 2\sqrt{13}}{2} < 0,$$

$$\therefore M < \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

【点睛】本题考查了二次函数的对称轴公式，与 x 轴交点问题，解一元二次方程，无理数的大小比较，解题的关键是对 m^5 进行降次处理.

27. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，点 D 、 F 是 $\odot O$ 上异于 A 、 B 的点. 点 C 在 $\odot O$ 外， $CA = CD$ ，延长 BF

与 CA 的延长线交于点 M ，点 N 在 BA 的延长线上， $\angle AMN = \angle ABM$ ， $AM \cdot BM = AB \cdot MN$ 。点 H 在直径 AB 上， $\angle AHD = 90^\circ$ ，点 E 是线段 DH 的中点。



- (1) 求 $\angle AFB$ 的度数；
- (2) 求证：直线 CM 与 $\odot O$ 相切；
- (3) 看一看，想一想，证一证：

以下与线段 CE 、线段 EB 、线段 CB 有关的三个结论： $CE + EB < CB$ ， $CE + EB = CB$ ， $CE + EB > CB$ ，你认为哪个正确？请说明理由。

【答案】(1) 90°

(2) 见解析 (3) $CE + EB = CB$ ，理由见解析

【解析】

【分析】(1) 直接利用直径所对的圆周角是直角，即可得出结果；

(2) 证明 $\triangle ABM \sim \triangle AMN$ ，得到 $\angle MAN = \angle MAB$ ，根据平角的定义，得到 $\angle MAN = \angle MAB = 90^\circ$ ，即可得证；

(3) 连接 OA, OD, BD ，连接 OC 交 AD 于点 G ，易得 $OC \perp AD$ ，圆周角定理得到 $\angle ADB = 90^\circ$ ，推出 $OG \parallel BD$ ，进而得到 $\angle AOC = \angle ABD$ ，根据三角函数推出 $\angle HBE = \angle ABC$ ，得到 B, E, C 三点共线，即可得出结果。

【小问 1 详解】

解： $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，点 F 是 $\odot O$ 上异于 A 、 B 的点，

$\therefore \angle AFB = 90^\circ$ ；

【小问 2 详解】

证明： $\because AM \cdot BM = AB \cdot MN$ ，

$$\therefore \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BM},$$

又 $\because \angle AMN = \angle ABM$ ，

$\therefore \triangle ABM \sim \triangle AMN$ ，

$$\begin{aligned}
&\therefore \tan \angle HBE = \frac{EH}{BH} = \frac{1}{2} \cdot \frac{DH}{BH} = \frac{1}{2} \tan \angle HBD, \\
&\therefore \tan \angle AOC = \frac{AC}{AO}, \tan \angle ABC = \frac{AC}{AB}, \text{ 且 } AO = \frac{1}{2} AB, \\
&\therefore \tan \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot \frac{AC}{OA} = \frac{1}{2} \tan \angle AOC, \\
&\therefore \angle AOC = \angle ABD, \\
&\therefore \tan \angle HBE = \tan \angle ABC, \\
&\therefore \angle HBE = \angle ABC, \\
&\therefore B, E, C \text{ 三点共线}, \\
&\therefore CE + EB = CB.
\end{aligned}$$

【点睛】 本题考查圆周角定理，切线的判定，相似三角形的判定和性质，解直角三角形，熟练掌握相关知识点，并灵活运用，是解题的关键.