

2024 年上海市初中学业水平考试

数学试卷

1. 本场考试时间 100 分钟，试卷共 4 页，满分 150 分，答题纸共 2 页。
2. 作答前，请在答题纸指定位置填写姓名、报名号、座位号，并将核对后的条形码贴在答题纸指定位置。
3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位。在试卷上作答一律不得分。
4. 用 2B 铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题。

一、选择题（每题 4 分，共 24 分）

1. 如果 $x > y$ ，那么下列正确的是（ ）

- A. $x + 5 < y + 5$ B. $x - 5 < y - 5$ C. $5x > 5y$ D. $-5x > -5y$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了不等式的基本性质，根据不等式两边加（或减）同一个数（或式子），不等号的方向不变。不等式两边乘（或除以）同一个正数，不等号的方向不变。不等式两边乘（或除以）同一个负数，不等号的方向改变。

【详解】解：A. 两边都加上 5，不等号的方向不改变，故错误，不符合题意；
 B. 两边都加上 -5，不等号的方向不改变，故错误，不符合题意；
 C. 两边同时乘上大于零的数，不等号的方向不改变，故正确，符合题意；
 D. 两边同时乘上小于零的数，不等号的方向改变，故错误，不符合题意；
 故选：C.

2. 函数 $f(x) = \frac{2-x}{x-3}$ 的定义域是（ ）

- A. $x = 2$ B. $x \neq 2$ C. $x = 3$ D. $x \neq 3$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查求函数定义域，涉及分式有意义的条件：分式分母不为 0，解不等式即可得到答案，熟练掌握求函数定义域的方法是解决问题的关键。

【详解】解：函数 $f(x) = \frac{2-x}{x-3}$ 的定义域是 $x-3 \neq 0$ ，解得 $x \neq 3$ ，
 故选：D.

3. 以下一元二次方程有两个相等实数根的是 ()

A. $x^2 - 6x = 0$

B. $x^2 - 9 = 0$

C. $x^2 - 6x + 6 = 0$

D. $x^2 - 6x + 9 = 0$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程判别式判断根的情况，解答本题的关键是熟练掌握一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ，当 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ 时，方程有两个不相等实数根；当 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ 时，方程的两个相等的实数根；当 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 时，方程没有实数根。分别计算出各选项中的根的判别式的值，即可判断。

【详解】解：A. $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 0 = 36 > 0$ ，该方程有两个不相等实数根，故 A 选项不符合题意；
 B. $\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times (-9) = 36 > 0$ ，该方程有两个不相等实数根，故 B 选项不符合题意；
 C. $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 12 > 0$ ，该方程有两个不相等实数根，故 C 选项不符合题意；
 D. $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 0$ ，该方程有两个相等实数根，故 D 选项不符合题意；

故选：D.

4. 科学家同时培育了甲乙丙丁四种花，从甲乙丙丁选个开花时间最短的并且最平稳的。

种类	甲种类	乙种类	丙种类	丁种类
平均数	2.3	2.3	2.8	3.1
方差	1.05	0.78	1.05	0.78

A. 甲种类

B. 乙种类

C. 丙种类

D. 丁种类

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了用平均数和方差做决策，根据平均数的定义以及方差的定义做决策即可。解题的关键是掌握方差的意义：方差是反映一组数据的波动大小的一个量。方差越大，则平均值的离散程度越大，稳定性也越小；反之，则它与其平均值的离散程度越小，稳定性越好。

【详解】解：∵由表格可知四种花开花时间最短的为甲种类和乙种类，
 四种花的方差最小的为乙种类和丁种类，方差越小越稳定，

∴乙种类开花时间最短的并且最平稳的，

故选：B.

5. 四边形 $ABCD$ 为矩形，过 A 、 C 作对角线 BD 的垂线，过 B 、 D 作对角线 AC 的垂线，如果四个垂线拼成一个四边形，那么这个四边形为 ()

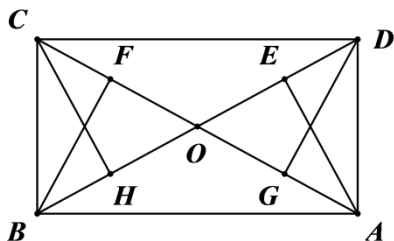
- A. 菱形 B. 矩形 C. 直角梯形 D. 等腰梯形

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查矩形性质、等面积法、菱形的判定等知识，熟练掌握矩形性质及菱形的判定是解决问题的关键. 由矩形性质得到 $S_{\triangle OBC} = S_{\triangle OAD}$ ， $OC = OB = OA = OD$ ，进而由等面积法确定 $CH = BF = AE = DG$ ，再由菱形的判定即可得到答案.

【详解】解：如图所示：



∵ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$$\therefore S_{\triangle OBC} = S_{\triangle OAD}, \quad OC = OB = OA = OD,$$

∵ 过 A 、 C 作对角线 BD 的垂线，过 B 、 D 作对角线 AC 的垂线，

$$\therefore S_{\triangle OBC} = S_{\triangle OAD} = \frac{1}{2} OC \cdot BF = \frac{1}{2} OB \cdot CH = \frac{1}{2} OD \cdot AE = \frac{1}{2} OA \cdot DG$$

$$\therefore CH = BF = AE = DG,$$

如果四个垂线拼成一个四边形，那么这个四边形为菱形，

故选：A.

6. 在 $\triangle ABC$ 中， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ， $AB = 5$ ，点 P 在 $\triangle ABC$ 内，分别以 A 、 B 、 P 为圆心画，圆 A 半径为 1，圆 B 半径为 2，圆 P 半径为 3，圆 A 与圆 P 内切，圆 P 与圆 B 的关系是 ()

- A. 内含 B. 相交 C. 外切 D. 相离

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查圆的位置关系，涉及勾股定理，根据题意，作出图形，数形结合，即可得到答案，熟记圆的位置关系是解决问题的关键.

【点睛】本题考查平方差公式，此为基础且重要知识点，必须熟练掌握.

9. 已知 $\sqrt{2x-1}=1$ ，则 $x=$ _____.

【答案】1

【解析】

【分析】本题主要考查了二次根式有意义的条件，掌握二次根式中的被开方数是非负数是解题的关键. 由二次根式被开方数大于0可知 $2x-1>0$ ，则可得出 $2x-1=1$ ，求出 x 即可.

【详解】解：根据题意可知： $2x-1>0$ ，

$$\therefore 2x-1=1,$$

解得： $x=1$ ，

故答案为：1.

10. 科学家研发了一种新的蓝光唱片，一张蓝光唱片的容量约为 2×10^5 GB，一张普通唱片的容量约为 25 GB，则蓝光唱片的容量是普通唱片的_____倍. (用科学记数法表示)

【答案】 8×10^3

【解析】

【分析】本题考查科学记数法，按照定义，用科学记数法表示较大的数时，一般形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，按要求表示即可得到答案，确定 a 与 n 的值是解决问题的关键.

【详解】解：蓝光唱片的容量是普通唱片的 $\frac{2 \times 10^5}{25} = 8000 = 8 \times 10^3$ 倍，

故答案为： 8×10^3 .

11. 若正比例函数 $y=kx$ 的图像经过点 $(7, -13)$ ，则 y 的值随 x 的增大而_____. (选填“增大”或“减小”)

【答案】减小

【解析】

【分析】本题考查了一次函数图象上点的坐标特征以及正比例函数的性质，牢记“当 $k>0$ 时， y 随 x 的增大而增大；当 $k<0$ 时， y 随 x 的增大而减小”是解题的关键. 利用一次函数图象上点的坐标特征，可求出 $k=-\frac{13}{7}$ ，结合正比例函数的性质，即可得出 y 的值随 x 的增大而减小.

【详解】解： $\because$ 正比例函数 $y=kx$ 的图象经过点 $(7, -13)$ ，

$$\therefore -13=7k,$$

解得： $k = -\frac{13}{7}$ ，

又 $\because k = -\frac{13}{7} < 0$ ，

$\therefore y$ 的值随 x 的增大而减小.

故答案为：减小.

12. 在菱形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = 66^\circ$ ， 则 $\angle BAC =$ _____.

【答案】 57° ## 57 度

【解析】

【分析】 本题考查了菱形的性质，等腰三角形的性质以及三角形内角和定理，利用菱形性质得出 $AB = BC$ ，利用等边对等角得出 $\angle BAC = \angle ACB$ ，然后结合三角形内角和定理求解即可.

【详解】 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore AB = BC,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ABC) = \frac{1}{2}(180^\circ - 66^\circ) = 57^\circ,$$

故答案为： 57° .

13. 某种商品的销售量 y (万元) 与广告投入 x (万元) 成一次函数关系，当投入 10 万元时销售额 1000 万元，当投入 90 万元时销售量 5000 万元，则投入 80 万元时，销售量为 _____ 万元.

【答案】 4500

【解析】

【分析】 本题考查求一次函数解析式及求函数值，设 $y = kx + b$ ，根据题意找出点代入求出解析式，然后把 $x = 80$ 代入求解即可.

【详解】 解： 设 $y = kx + b$ ，

把 $(10, 1000)$ ， $(90, 5000)$ 代入，得
$$\begin{cases} 10k + b = 1000 \\ 90k + b = 5000 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} k = 50 \\ b = 500 \end{cases}$$

$$\therefore y = 50x + 500,$$

当 $x = 80$ 时， $y = 50 \times 80 + 500 = 4500$ ，

即投入 80 万元时，销售量为 4500 万元，

故答案为： 4500.

14. 一个袋子中有若干个白球和绿球，它们除了颜色外都相同随机从中摸一个球，恰好摸到绿球的概率是 $\frac{3}{5}$ ，

则袋子中至少有_____个绿球.

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题主要考查了已知概率求数量，一元一次不等式的应用，设袋子中绿球有 $3x$ 个，则根据概率计算公式得到球的总数为 $5x$ 个，则白球的数量为 $2x$ 个，再由每种球的个数为正整数，列出不等式求解即可.

【详解】 解：设袋子中绿球有 $3x$ 个，

$\therefore$ 摸到绿球的概率是 $\frac{3}{5}$,

$\therefore$ 球的总数为 $3x \div \frac{3}{5} = 5x$ 个，

$\therefore$ 白球的数量为 $5x - 3x = 2x$ 个，

$\therefore$ 每种球的个数为正整数，

$\therefore 2x > 0$ ，且 x 为正整数，

$\therefore x > 0$ ，且 x 为正整数，

$\therefore x$ 的最小值为 1，

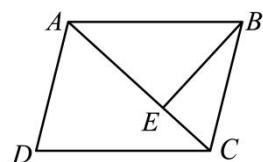
$\therefore$ 绿球的个数的最小值为 3，

$\therefore$ 袋子中至少有 3 个绿球，

故答案为：3.

15. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， E 为对角线 AC 上一点，设 $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BE} = \vec{b}$ ，若 $AE = 2EC$ ，则

$\overrightarrow{DC} =$ _____ (结果用含 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 的式子表示).



【答案】 $\frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b}$

【解析】

【分析】 本题考查了平面向量的知识，解答本题的关键是先确定各线段之间的关系，先求出 $AE = \frac{2}{3}AC$ ，

从而可得 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}$.

【详解】 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore DC \parallel AB$ ， $DC = AB$.

$\because E$ 是 AC 上一点， $AE = 2EC$ ，

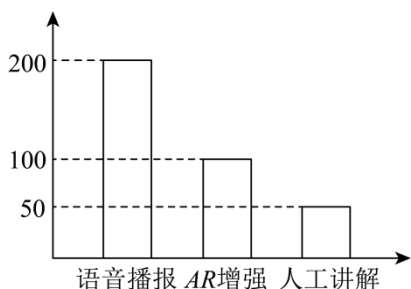
$$\therefore AE = \frac{2}{3} AC,$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{DC} = \frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b},$$

$$\text{故答案为: } \frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b}.$$

16. 博物馆为展品准备了人工讲解、语音播报和 AR 增强三种讲解方式，博物馆共回收有效问卷 1000 张，其中 700 人没有讲解需求，剩余 300 人中需求情况如图所示（一人可以选择多种），那么在总共 2 万人的参观中，需要 AR 增强讲解的人数约有_____人.



【答案】 2000

【解析】

【分析】 本题考查条形统计图及用样本的某种“率”估计总体的某种“率”，正确得出需要 AR 增强讲解的人数占有需求讲解的人数的百分比是解题关键. 先求出需求讲解的人数占有有效问卷的百分比，再根据条形统计图求出需要 AR 增强讲解的人数占有需求讲解的人数的百分比，进而可得答案.

【详解】 解：∵ 共回收有效问卷 1000 张，其中 700 人没有讲解需求，剩余 300 人有需求讲解，

$$\therefore \text{需求讲解的人数占有有效问卷的百分比为 } \frac{300}{1000} \times 100\% = 30\%,$$

由条形统计图可知：需要 AR 增强讲解的人数为 100 人，

$$\therefore \text{需要 AR 增强讲解的人数占有需求讲解的人数的百分比为 } \frac{100}{300} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \text{在总共 2 万人的参观中，需要 AR 增强讲解的人数约有 } 20000 \times 30\% \times \frac{1}{3} = 2000 \text{ (人)},$$

故答案为： 2000

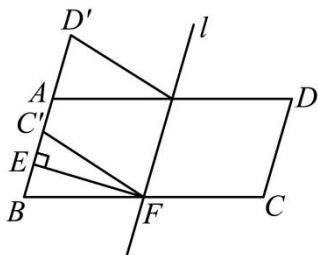
17. 在平行四边形 ABCD 中， $\angle ABC$ 是锐角，将 CD 沿直线 l 翻折至 AB 所在直线，对应点分别为 C'，D'，若 $AC':AB:BC = 1:3:7$ ，则 $\cos \angle ABC =$ _____.

【答案】 $\frac{2}{7}$ 或 $\frac{4}{7}$ 或 $\frac{4}{7}$ 或 $\frac{2}{7}$

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的翻折，求余弦值，等腰三角形的判定及性质，解题的关键是利用分类讨论的思想进行求解.

【详解】解：当 C' 在 AB 之间时，作下图，



根据 $AC':AB:BC=1:3:7$, 不妨设 $AC'=1, AB=3, BC=7$,

由翻折的性质知: $\angle FCD = \angle FC'D'$,

$\therefore CD$ 沿直线 l 翻折至 AB 所在直线,

$$\therefore \angle BC'F + \angle FC'D' = \angle FCD + \angle FBA,$$

$$\therefore \angle BC'F = \angle FBA \text{ .}$$

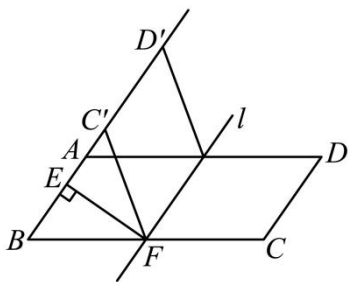
$$CF = BF = C'F = \frac{7}{2},$$

过 F 作 AB 的垂线交于 E ,

$$\therefore BE = \frac{1}{2}BC' = 1,$$

$$\therefore \cos \angle ABC = \frac{BE}{BF} = \frac{1}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7},$$

当 C' 在 BA 的延长线上时, 作下图,



根据 $AC':AB:BC=1:3:7$, 不妨设 $AC'=1, AB=3, BC=7$,

同理知: $CF = BF = C'F = \frac{7}{2}$,

过 F 作 AB 的垂线交于 E ,

$$\therefore BE = \frac{1}{2}BC' = 2,$$

$$\therefore \cos \angle ABC = \frac{BE}{BF} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{2}{7}} = \frac{4}{7},$$

故答案为: $\frac{2}{7}$ 或 $\frac{4}{7}$.

18. 对于一个二次函数 $y = a(x-m)^2 + k$ ($a \neq 0$) 中存在一点 $P(x', y')$, 使得 $x' - m = y' - k \neq 0$, 则称 $2|x' - m|$ 为该抛物线的“开口大小”, 那么抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + 3$ “开口大小”为_____.

【答案】4

【解析】

【分析】本题考查新定义运算与二次函数综合, 涉及二次函数性质、分式化简求值等知识, 读懂题意, 理解新定义抛物线的“开口大小”, 利用二次函数图象与性质将一般式化为顶点式得到 $-\frac{1}{2} = \frac{1}{x' - \frac{1}{3}}$, 按照定义求解即可得到答案, 熟记二次函数图象与性质、理解新定义是解决问题的关键.

【详解】解: 根据抛物线的“开口大小”的定义可知 $y - k = a(x - m)^2$ 中存在一点 $P(x', y')$, 使得

$$x' - m = y' - k \neq 0, \text{ 则 } a = \frac{y' - k}{(x' - m)^2} = \frac{1}{x' - m},$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + 3$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{2}{3}x\right) + 3$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\right) + 3$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{18} + 3$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{55}{18},$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + 3 \text{ 中存在一点 } P(x', y'), \text{ 有 } -\frac{1}{2} = \frac{1}{x' - \frac{1}{3}}, \text{ 解得 } x' - \frac{1}{3} = -2, \text{ 则 } 2\left|x' - \frac{1}{3}\right| = 4,$$

$$\therefore \text{抛物线 } y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + 3 \text{ “开口大小” 为 } 4,$$

故答案为: 4.

三、简答题 (共 78 分, 其中第 19-22 题每题 10 分, 第 23、24 题每题 12 分, 第 25 题 14 分)

19. 计算： $|1-\sqrt{3}|+24^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}-(1-\sqrt{3})^0$.

【答案】 $2\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 本题考查了绝对值，二次根式，零指数幂等，掌握化简法则是解题的关键. 先化简绝对值，二次根式，零指数幂，再根据实数的运算法则进行计算.

【详解】 解： $|1-\sqrt{3}|+24^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}-(1-\sqrt{3})^0$

$$= \sqrt{3}-1+2\sqrt{6}+\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}-1$$

$$= \sqrt{3}-1+2\sqrt{6}+2-\sqrt{3}-1$$

$$= 2\sqrt{6}.$$

20. 解方程组： $\begin{cases} x^2-3xy-4y^2=0 \textcircled{1} \\ x+2y=6 \textcircled{2} \end{cases}$.

【答案】 $x=4, y=1$ 或者 $x=-6, y=6$.

【解析】

【分析】 本题考查了二元二次方程，求解一元二次方程，解题的关键是利用代入法进行求解.

【详解】 解： $\begin{cases} x^2-3xy-4y^2=0 \textcircled{1} \\ x+2y=6 \textcircled{2} \end{cases}$,

由②得： $x=6-2y$ 代入①中得：

$$(6-2y)^2-3(6-2y)y-4y^2=0,$$

$$(36-24y+4y^2)-18y+6y^2-4y^2=0,$$

$$6y^2-42y+36=0,$$

$$6(y^2-7y+6)=0,$$

$$6(y-6)(y-1)=0$$

解得： $y=1$ 或 $y=6$,

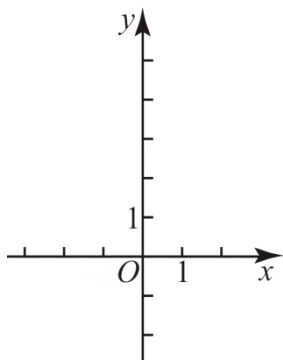
当 $y=1$ 时， $x=6-2\times 1=4$,

当 $y=6$ 时, $x=6-2\times 6=-6$,

$\therefore$ 方程组的解为 $x=4, y=1$ 或者 $x=-6, y=6$.

21. 在平面直角坐标系 xOy 中, 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ (k 为常数且 $k\neq 0$) 上有一点 $A(-3, m)$, 且与直线

$y=-2x+4$ 交于另一点 $B(n, 6)$.



(1) 求 k 与 m 的值;

(2) 过点 A 作直线 $l \parallel x$ 轴与直线 $y=2x+4$ 交于点 C , 求 $\sin \angle OCA$ 的值.

【答案】(1) $k=-6$, $m=2$;

(2) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

【解析】

【分析】本题考查了反比例函数与一次函数, 锐角三角函数, 勾股定理等知识, 解题的关键是:

(1) 把 B 的坐标代入 $y=-2x+4$, 求出 n , 然后把 B 的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$, 求出 k , 最后把 A 的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$

求出 m 即可;

(2) 根据 $l \parallel x$ 轴求出 C 的纵坐标, 然后代入 $y=-2x+4$, 求出 C 的横坐标, 利用勾股定理求出 OC , 最后根据正弦的定义求解即可.

【小问 1 详解】

解: 把 $B(n, 6)$ 代入 $y=-2x+4$,

得 $6=-2n+4$,

解得 $n=-1$,

$\therefore B(-1, 6)$,

把 $B(-1,6)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$,

得 $k = -1 \times 6 = -6$,

$$\therefore y = -\frac{6}{x},$$

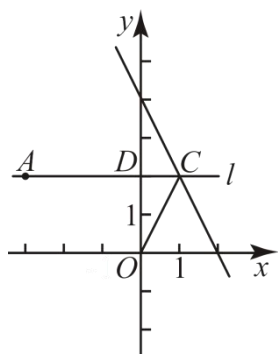
把 $A(-3,m)$ 代入 $y = -\frac{6}{x}$,

$$\text{得 } m = -\frac{6}{-3} = 2;$$

【小问2详解】

解：由 (1) 知： $A(-3,2)$

设 l 与 y 轴相交于 D ,



$\therefore l \parallel x$ 轴, x 轴 $\perp$ y 轴,

$\therefore A$ 、 C 、 D 的纵坐标相同, 均为 2, $\angle CDO = 90^\circ$,

把 $y = 2$ 代入 $y = -2x + 4$, 得 $2 = -2x + 4$,

解得 $x = 1$,

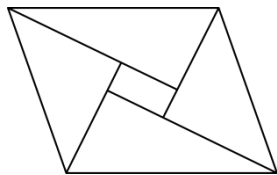
$$\therefore C(1,2),$$

$$\therefore CD = 1, OD = 2,$$

$$\therefore OC = \sqrt{CD^2 + OD^2} = \sqrt{5},$$

$$\therefore \sin \angle OCA = \frac{OD}{OC} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

22. 同学用两幅三角板拼出了如下的平行四边形, 且内部留白部分也是平行四边形 (直角三角板互不重叠), 直角三角形斜边上的高都为 h .



(1) 求：

① 两个直角三角形的直角边（结果用 h 表示）；

② 小平行四边形的底、高和面积（结果用 h 表示）；

(2) 请画出同学拼出的另一种符合题意的图，要求：

① 不与给定的图形状相同；

② 画出三角形的边。

【答案】(1) ① 等腰直角三角板直角边为 $\sqrt{2}h$ ，含 30° 的直角三角形板直角边为 $2h$ 和 $\frac{2\sqrt{3}}{3}h$ ；② 底为

$(2-\sqrt{2})h$ ，高为 $\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3}h$ ，面积为 $\frac{6\sqrt{2}-6-4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{3}h^2$ ；

(2) 画图见解析。

【解析】

【分析】(1) ① 解直角三角形即可求解；

② 由题意可知四边形 $MNGH$ 是矩形，利用线段的和差可求出矩形的边长，进而可求出面积；

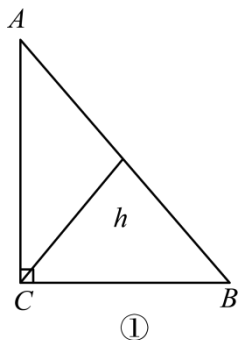
(2) 根据题意画出图形即可；

本题考查了解直角三角形，矩形的判定，矩形的面积，图形设计，正确识图是解题的关键。

【小问 1 详解】

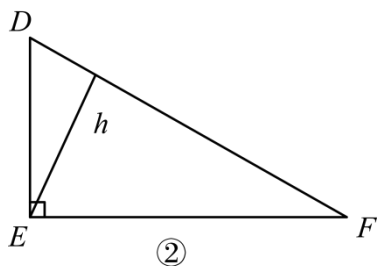
解：① 如图 ①， $\triangle ABC$ 为等腰直角三角板， $\angle ACB = 90^\circ$ ，

则 $AC = BC = \frac{h}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}h$ ；



如图 2， $\triangle DEF$ 为含 30° 的直角三角形板， $\angle DEF = 90^\circ$ ， $\angle F = 30^\circ$ ， $D = 60^\circ$ ，

则 $EF = 2h$, $DE = \frac{h}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}h$;



综上，等腰直角三角板直角边为 $\sqrt{2}h$ ，含 30° 的直角三角形板直角边为 $2h$ 和 $\frac{2\sqrt{3}}{3}h$ ；

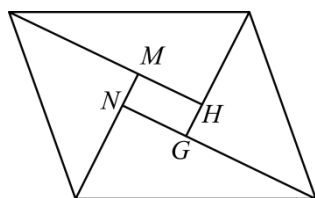
② 由题意可知 $\angle MNG = \angle NGH = \angle GHM = \angle HMN = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $MNGH$ 是矩形，

由图可得， $MN = \sqrt{2}h - \frac{2\sqrt{3}}{3}h = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3}h$, $MH = 2h - \sqrt{2}h = (2 - \sqrt{2})h$,

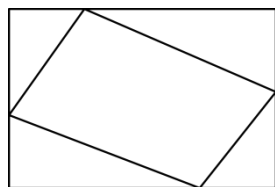
$\therefore S_{\text{矩形}EFGH} = MN \cdot MH = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3}h \times (2 - \sqrt{2})h = \frac{6\sqrt{2} - 6 - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}{3}h^2$,

故小平行四边形的底为 $(2 - \sqrt{2})h$ ，高为 $\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3}h$ ，面积为 $\frac{6\sqrt{2} - 6 - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}{3}h^2$ ；

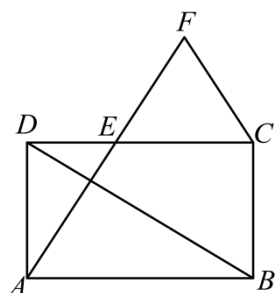


【小问 2 详解】

解：如图，即为所作图形。



23. 如图所示，在矩形 $ABCD$ 中， E 为边 CD 上一点，且 $AE \perp BD$ 。



(1) 求证: $AD^2 = DE \cdot DC$;

(2) F 为线段 AE 延长线上一点, 且满足 $EF = CF = \frac{1}{2}BD$, 求证: $CE = AD$.

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 由矩形性质得到 $\angle BAD = 90^\circ$, $\angle ADE = 90^\circ$, $AB = DC$, 由角的互余得到 $\angle ABD = \angle DAE$, 从而确定 $\triangle ADE \sim \triangle BAD$, 利用相似三角形性质得到 $AD^2 = DE \cdot DC$;

(2) 由矩形性质, 结合题中条件, 利用等腰三角形的判定与性质得到 $OA = OD = EF = CF$, $\angle ODA = \angle OAD$, $\angle FEC = \angle FCE$, 进而由三角形全等的判定与性质即可得到.

【小问 1 详解】

证明: 在矩形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = 90^\circ$, $\angle ADE = 90^\circ$, $AB = DC$,

$$\therefore \angle ABD + \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\because AE \perp BD,$$

$$\therefore \angle DAE + \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle DAE,$$

$$\because \angle BAD = \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle BAD,$$

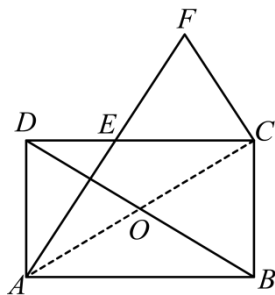
$$\therefore \frac{AD}{BA} = \frac{DE}{AD}, \text{ 即 } AD^2 = DE \cdot BA,$$

$$\because AB = DC,$$

$$\therefore AD^2 = DE \cdot DC;$$

【小问 2 详解】

证明: 连接 AC 交 BD 于点 O , 如图所示:



在矩形 $ABCD$ 中, $\angle ADE = 90^\circ$, 则 $\angle DAE + \angle AED = 90^\circ$,

$$\because AE \perp BD,$$

$$\therefore \angle DAE + \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle AED,$$

$$\therefore \angle FEC = \angle AED,$$

$$\therefore \angle ADO = \angle FEC,$$

$$\text{在矩形 } ABCD \text{ 中, } OA = OD = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore EF = CF = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore OA = OD = EF = CF,$$

$$\therefore \angle ADO = \angle OAD, \quad \angle FEC = \angle FCE,$$

$$\therefore \angle ADO = \angle FEC,$$

$$\therefore \angle ADO = \angle OAD = \angle FEC = \angle FCE,$$

在 $\triangle ODA$ 和 $\triangle FEC$ 中,

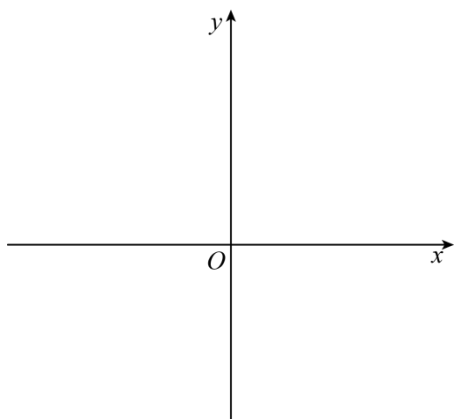
$$\begin{cases} \angle ODA = \angle FEC \\ \angle OAD = \angle FCE \\ OD = FE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ODA \cong \triangle FEC (\text{AAS}),$$

$$\therefore CE = AD.$$

【点睛】 本题考查矩形综合，涉及矩形性质、相似三角形的判定与性质、等腰三角形的判定与性质、全等三角形的判定与性质等知识，熟练掌握相关几何性质与判定是解决问题第的关键.

24. 在平面直角坐标系中，已知平移抛物线 $y = \frac{1}{3}x^2$ 后得到的新抛物线经过 $A\left(0, -\frac{5}{3}\right)$ 和 $B(5, 0)$.



(1) 求平移后新抛物线的表达式;

(2) 直线 $x = m$ ($m > 0$) 与新抛物线交于点 P , 与原抛物线交于点 Q .

①如果 PQ 小于 3, 求 m 的取值范围;

②记点 P 在原抛物线上的对应点为 P' ，如果四边形 $P'BPQ$ 有一组对边平行，求点 P 的坐标.

【答案】(1) $y = \frac{1}{3}(x-2)^2 - 3$ 或 $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$;

(2) ① $0 < m < 1$; ② $P\left(7, \frac{16}{3}\right)$.

【解析】

【分析】(1) 设平移抛物线 $y = \frac{1}{3}x^2$ 后得到的新抛物线为 $y = \frac{1}{3}x^2 + bx + c$ ，把 $A\left(0, -\frac{5}{3}\right)$ 和 $B(5, 0)$ 代入可得答案;

(2) ①如图，设 $Q\left(x, \frac{1}{3}x^2\right)$ ，则 $P\left(x, \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}\right)$ ， $PQ = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$ ，结合 PQ 小于 3，可得 $\frac{4}{3}x + \frac{5}{3} < 3$ ，结合 $x = m (m > 0)$ ，从而可得答案; ②先确定平移方式为，向右平移 2 个单位，向下平移 3 个单位，由题

意可得： P 在 B 的右边，当 $BP' \parallel PQ$ 时，可得 $P'\left(5, \frac{25}{3}\right)$ ，结合平移的性质可得答案如图，当 $P'Q \parallel BP$

时，则 $\angle P'QT = \angle BPT$ ，过 P' 作 $P'S \perp QP$ 于 S ，证明 $\triangle P'SQ \sim \triangle BTP$ ，可得 $\frac{QS}{P'S} = \frac{PT}{BT}$ ，设 $P'\left(x, \frac{1}{3}x^2\right)$ ，

则 $P\left(x+2, \frac{1}{3}x^2-3\right)$ ， $S\left(x+2, \frac{1}{3}x^2\right)$ ， $Q\left[x+2, \frac{1}{3}(x+2)^2\right]$ ，再建立方程求解即可.

【小问 1 详解】

解：设平移抛物线 $y = \frac{1}{3}x^2$ 后得到的新抛物线为 $y = \frac{1}{3}x^2 + bx + c$ ，

把 $A\left(0, -\frac{5}{3}\right)$ 和 $B(5, 0)$ 代入可得：

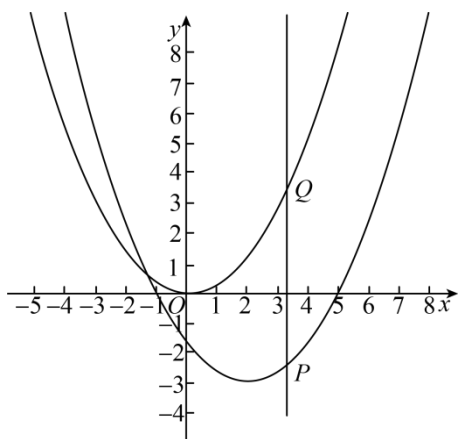
$$\begin{cases} c = -\frac{5}{3} \\ \frac{25}{3} + 5b + c = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} b = -\frac{4}{3} \\ c = -\frac{5}{3} \end{cases},$$

$\therefore$ 新抛物线为 $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$;

【小问 2 详解】

解：①如图，设 $Q\left(x, \frac{1}{3}x^2\right)$ ，则 $P\left(x, \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}\right)$ ，



$$\therefore PQ = \frac{1}{3}x^2 - \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}\right) = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3},$$

$\therefore PQ$ 小于 3,

$$\therefore \frac{4}{3}x + \frac{5}{3} < 3,$$

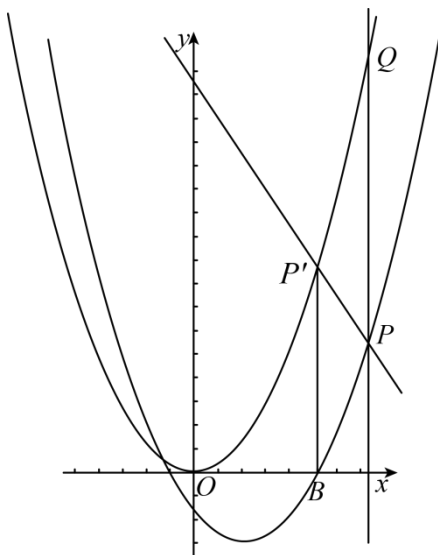
$$\therefore x < 1,$$

$$\therefore x = m (m > 0),$$

$$\therefore 0 < m < 1;$$

$$\textcircled{2} \because y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}(x-2)^2 - 3,$$

$\therefore$ 平移方式为，向右平移 2 个单位，向下平移 3 个单位，



由题意可得：P 在 B 的右边，当 $BP' \parallel PQ$ 时，

$$\therefore BP' \perp x \text{ 轴},$$

$$\therefore x_{P'} = x_B = 5,$$

$$\therefore P'\left(5, \frac{25}{3}\right),$$

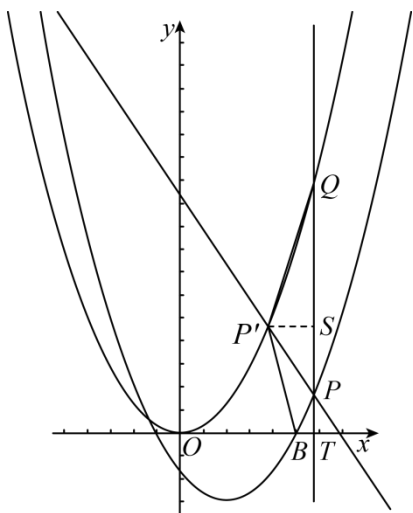
$$\text{由平移的性质可得: } P\left(5+2, \frac{25}{3}-3\right), \text{ 即 } P\left(7, \frac{16}{3}\right);$$

如图, 当 $P'Q \parallel BP$ 时, 则 $\angle P'QT = \angle BPT$,

过 P' 作 $P'S \perp QP$ 于 S ,

$$\therefore \angle P'SQ = \angle BTP = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle P'SQ \sim \triangle BTP,$$



$$\therefore \frac{QS}{P'S} = \frac{PT}{BT},$$

$$\text{设 } P'\left(x, \frac{1}{3}x^2\right), \text{ 则 } P\left(x+2, \frac{1}{3}x^2-3\right), S\left(x+2, \frac{1}{3}x^2\right), Q\left[x+2, \frac{1}{3}(x+2)^2\right],$$

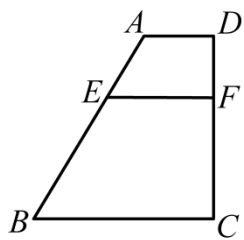
$$\therefore \frac{\frac{1}{3}(x+2)^2 - \frac{1}{3}x^2}{2} = \frac{\frac{1}{3}x^2 - 3}{x+2-5},$$

解得: $x=1$ (不符合题意舍去);

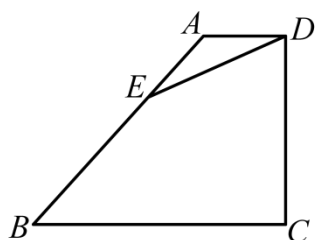
$$\text{综上: } P\left(7, \frac{16}{3}\right);$$

【点睛】 本题属于二次函数的综合题, 抛物线的平移, 利用待定系数法求解二次函数的解析式, 二次函数的图象与性质, 相似三角形的判定与性质, 熟练的利用数形结合的方法解题是关键.

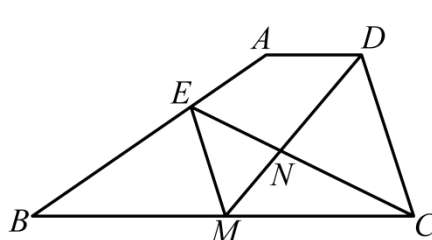
25. 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 点 E 在边 AB 上, 且 $AE = \frac{1}{3} AB$.



(图1)



(图2)



(图3)

(1) 如图 1 所示, 点 F 在边 CD 上, 且 $DF = \frac{1}{3} CD$, 联结 EF , 求证: $EF \parallel BC$;

(2) 已知 $AD = AE = 1$;

①如图 2 所示, 联结 DE , 如果 ADE 外接圆的心恰好落在 $\angle B$ 的平分线上, 求 ADE 的外接圆的半径长;

②如图 3 所示, 如果点 M 在边 BC 上, 联结 EM 、 DM 、 EC , DM 与 EC 交于 N , 如果 $BC = 4$, 且 $CD^2 = DM \cdot DN$, $\angle DMC = \angle CEM$, 求边 CD 的长.

【答案】(1) 见详解 (2) ① $\frac{\sqrt{6}}{2}$; ② $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 延长 DE , CB 交于点 G , 由 $AD \parallel BC$, 得到 $\frac{AE}{EB} = \frac{DE}{EG}$, 由已知数据得到 $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{2}$, $\frac{DF}{FC} = \frac{1}{2}$, 故 $\frac{DE}{EG} = \frac{DF}{FC}$, 因此 $EF \parallel BC$;

(2) ①记点 O 为 ADE 外接圆圆心, 过点 O 作 $OF \perp AE$ 于点 F , 连接 OA, OE, OD , 先证明 $\angle AOB = 90^\circ$, 再证明 $\triangle FAO \sim \triangle OAB$, 则 $AO^2 = AF \cdot AB$, 即 $AO^2 = \frac{3}{2}$, 求得 $AO = \frac{\sqrt{6}}{2}$;

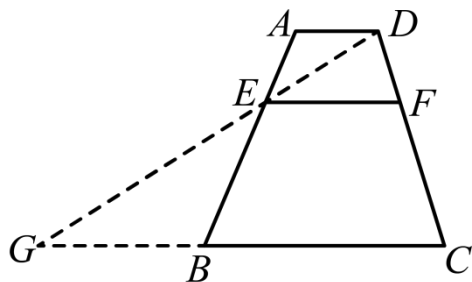
②延长 BA, CD 交于点 P , 过点 E 作 $EQ \perp BC$, 垂足为点 Q , 由 $\triangle PAD \sim \triangle PBC$, 求得 $PA = 1$, 可证明 $\triangle DCN \sim \triangle DCM$, 角度推导得 $EM \parallel DC$, 则 $\frac{BE}{EP} = \frac{BM}{MC}$, 求出 $BE = 2$, 继而得到 $BM = MC = 2$, 由 $\triangle BEM \sim \triangle BPC$, 则 $\frac{BM}{BC} = \frac{ME}{PC} = \frac{1}{2}$, 设 $ME = 2a$, 则 $PC = 4a$, 由 $AD \parallel BC$, 设 $PD = a$, $DC = 3a$, 由 $\triangle ENM \sim \triangle CND$, 得到 $\frac{EN}{CN} = \frac{EM}{DC} = \frac{2}{3}$, 设 $EN = 2b$, $CN = 3b$, 可证明 $\triangle CNM \sim \triangle CME$, 求出 $b = \frac{2}{15}\sqrt{15}$, 则 $CE = \frac{2}{3}\sqrt{15}$, 在 $\text{Rt}\triangle BQE$, $\text{Rt}\triangle CQE$ 中, 运用勾股定理得:

$4 - BQ^2 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{15}\right)^2 - (4 - BQ)^2$, 则 $BQ = \frac{5}{3}$, 在 $\text{Rt}\triangle EQM$ 中, 由勾股定理得,

$$EM = \sqrt{EQ^2 + QM^2} = \frac{2}{3}\sqrt{3}, \text{ 故 } DC = \sqrt{3}.$$

【小问 1 详解】

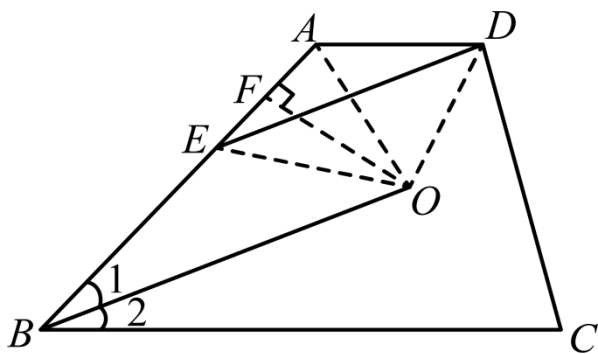
证明：延长 DE, CB 交于点 G ,



$$\begin{aligned} &\because AD \parallel BC, \\ &\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{DE}{EG}, \\ &\because AE = \frac{1}{3}AB, \quad DF = \frac{1}{3}CD \\ &\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{1}{2}, \quad \frac{DF}{FC} = \frac{1}{2}, \\ &\therefore \frac{DE}{EG} = \frac{DF}{FC}, \\ &\therefore EF \parallel BC; \end{aligned}$$

【小问 2 详解】

①解：记点 O 为 ADE 外接圆圆心，过点 O 作 $OF \perp AE$ 于点 F ，连接 OA, OE, OD ,

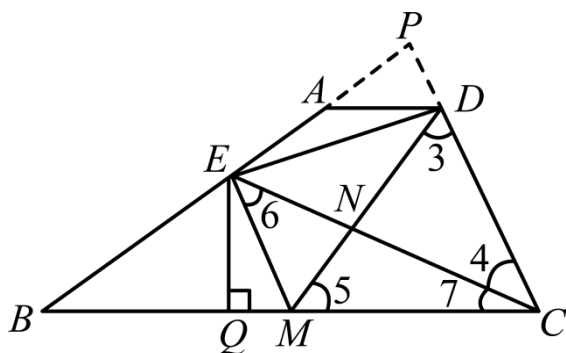


$$\begin{aligned} &\because \text{点 } O \text{ 为 } ADE \text{ 外接圆圆心}, \\ &\therefore OA = OE = OD, \\ &\therefore AF = EF = \frac{1}{2}, \\ &\because AE = \frac{1}{3}AB, \\ &\therefore AB = 3, \\ &\because AE = AD, OE = OD, OA = OA, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \triangle AEO \cong \triangle ADO, \\
&\therefore \angle EAO = \angle DAO, \\
&\because BO \text{ 平分 } \angle ABC, \\
&\therefore \angle 1 = \angle 2, \\
&\because AD \parallel BC, \\
&\therefore \angle DAB + \angle ABC = 180^\circ, \\
&\therefore 2\angle EAO + 2\angle 1 = 180^\circ, \\
&\therefore \angle EAO + \angle 1 = 90^\circ, \\
&\therefore \angle AOB = 90^\circ, \\
&\because OF \perp AE, \\
&\therefore \angle AFO = \angle AOB = 90^\circ, \\
&\therefore \angle FAO = \angle OAB, \\
&\therefore \triangle FAO \sim \triangle OAB, \\
&\therefore \frac{AO}{AB} = \frac{FA}{AO}, \\
&\text{即 } AO^2 = AF \cdot AB, \\
&\therefore AO^2 = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}, \\
&\therefore AO = \frac{\sqrt{6}}{2},
\end{aligned}$$

$$\therefore ADE \text{ 外接圆半径为 } \frac{\sqrt{6}}{2};$$

②延长 BA, CD 交于点 P , 过点 E 作 $EQ \perp BC$, 垂足为点 Q ,



$$\begin{aligned}
&\because AD \parallel BC, \\
&\therefore \triangle PAD \sim \triangle PBC,
\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{PA}{PB} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{4},$$

由①知 $AB = 3$,

$$\therefore \frac{PA}{PA+3} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore PA = 1,$$

$$\because CD^2 = DM \cdot DN,$$

$$\therefore \frac{CD}{DM} = \frac{DN}{CD},$$

$$\because \angle 3 = \angle 3,$$

$$\therefore \triangle DCN \sim \triangle DMC,$$

$$\therefore \angle 4 = \angle 5,$$

$$\because \angle 5 = \angle 6,$$

$$\therefore \angle 4 = \angle 6,$$

$$\therefore EM \parallel DC,$$

$$\therefore \frac{BE}{EP} = \frac{BM}{MC},$$

由 $AB = 3$, $AE = 1$

得 $BE = 2$,

$$\therefore \frac{BE}{EP} = 1,$$

$$\therefore \frac{BM}{MC} = 1,$$

$$\therefore BM = MC = 2,$$

$$\because EM \parallel DC,$$

$$\therefore \triangle BEM \sim \triangle BPC,$$

$$\therefore \frac{BM}{BC} = \frac{ME}{PC} = \frac{1}{2},$$

设 $ME = 2a$, 则 $PC = 4a$,

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{PD}{PC} = \frac{PA}{PB} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore PD = a,$$

$$\therefore DC = 3a,$$

$$\because EM \parallel DC,$$

$$\therefore \triangle ENM \sim \triangle CND,$$

$$\therefore \frac{EN}{CN} = \frac{EM}{DC} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \text{设 } EN = 2b, CN = 3b,$$

$$\because \angle 5 = \angle 6, \angle 7 = \angle 7,$$

$$\therefore \triangle CNM \sim \triangle CME,$$

$$\therefore \frac{CN}{CM} = \frac{CM}{CE},$$

$$\text{即 } CM^2 = CN \cdot CE,$$

$$\therefore 4 = 3b \cdot 5b,$$

$$\text{解得: } b = \frac{2}{15}\sqrt{15},$$

$$\therefore CE = \frac{2}{3}\sqrt{15},$$

在 $\text{Rt}\triangle BQE$, $\text{Rt}\triangle CQE$ 中, 由勾股定理得:

$$BE^2 - BQ^2 = CN^2 - CQ^2,$$

$$\therefore 4 - BQ^2 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{15}\right)^2 - (4 - BQ)^2,$$

$$\therefore BQ = \frac{5}{3},$$

$$\therefore EQ^2 = BE^2 - BQ^2 = \frac{11}{9},$$

$$\text{而 } QM = BM - BQ = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle EQM \text{ 中, 由勾股定理得, } EM = \sqrt{EQ^2 + QM^2} = \frac{2}{3}\sqrt{3},$$

$$\therefore \frac{EM}{DC} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore DC = \sqrt{3}.$$

【点睛】 本题考查了平行线分线段成比例定理, 相似三角形的判定与性质, 勾股定理, 三角形的外接圆等知识点, 熟练掌握知识点, 正确添加辅助线是解题的关键.