

2024 年上海市初中学业水平考试

数学试卷

1. 本场考试时间 100 分钟，试卷共 4 页，满分 150 分，答题纸共 2 页。
2. 作答前，请在答题纸指定位置填写姓名、报名号、座位号，并将核对后的条形码贴在答题纸指定位置。
3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位。在试卷上作答一律不得分。
4. 用 2B 铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题。

一、选择题（每题 4 分，共 24 分）

1. 如果 $x > y$ ，那么下列正确的是（ ）

- A. $x + 5 < y + 5$ B. $x - 5 < y - 5$ C. $5x > 5y$ D. $-5x > -5y$

2. 函数 $f(x) = \frac{2-x}{x-3}$ 的定义域是（ ）

- A. $x = 2$ B. $x \neq 2$ C. $x = 3$ D. $x \neq 3$

3. 以下一元二次方程有两个相等实数根的是（ ）

- A. $x^2 - 6x = 0$ B. $x^2 - 9 = 0$
C. $x^2 - 6x + 6 = 0$ D. $x^2 - 6x + 9 = 0$

4. 科学家同时培育了甲乙丙丁四种花，从甲乙丙丁选个开花时间最短的并且最平稳的。

种类	甲种类	乙种类	丙种类	丁种类
平均数	2.3	2.3	2.8	3.1
方差	1.05	0.78	1.05	0.78

- A. 甲种类 B. 乙种类 C. 丙种类 D. 丁种类

5. 四边形 $ABCD$ 为矩形，过 A 、 C 作对角线 BD 的垂线，过 B 、 D 作对角线 AC 的垂线，如果四个垂线拼成一个四边形，那这个四边形为（ ）

- A. 菱形 B. 矩形 C. 直角梯形 D. 等腰梯形

6. 在 $\triangle ABC$ 中， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ， $AB = 5$ ，点 P 在 $\triangle ABC$ 内，分别以 A 、 B 、 P 为圆心画，圆 A 半径为 1，圆 B 半径为 2，圆 P 半径为 3，圆 A 与圆 P 内切，圆 P 与圆 B 的关系是（ ）

A. 内含

B. 相交

C. 外切

D. 相离

二、填空题（每题4分，共48分）

7. 计算： $(4x^2)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 计算 $(a+b)(b-a) = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 已知 $\sqrt{2x-1}=1$ ，则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 科学家研发了一种新的蓝光唱片，一张蓝光唱片的容量约为 2×10^5 GB，一张普通唱片的容量约为 25 GB，则蓝光唱片的容量是普通唱片的 $\underline{\hspace{2cm}}$ 倍. (用科学记数法表示)

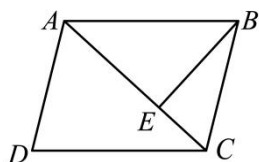
11. 若正比例函数 $y = kx$ 的图像经过点 $(7, -13)$ ，则 y 的值随 x 的增大而 $\underline{\hspace{2cm}}$. (选填“增大”或“减小”)

12. 在菱形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = 66^\circ$ ，则 $\angle BAC = \underline{\hspace{2cm}}$.

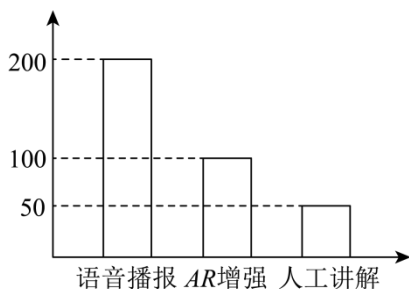
13. 某种商品的销售量 y (万元) 与广告投入 x (万元) 成一次函数关系，当投入 10 万元时销售额 1000 万元，当投入 90 万元时销售量 5000 万元，则投入 80 万元时，销售量为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 万元.

14. 一个袋子中有若干个白球和绿球，它们除了颜色外都相同随机从中摸一个球，恰好摸到绿球的概率是 $\frac{3}{5}$ ，则袋子中至少有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 个绿球.

15. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， E 为对角线 AC 上一点，设 $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ ， $BE = b$ ，若 $AE = 2EC$ ，则 $\overrightarrow{DC} = \underline{\hspace{2cm}}$ (结果用含 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 的式子表示).



16. 博物馆为展品准备了人工讲解、语音播报和 AR 增强三种讲解方式，博物馆共回收有效问卷 1000 张，其中 700 人没有讲解需求，剩余 300 人中需求情况如图所示 (一人可以选择多种)，那么在总共 2 万人的参观中，需要 AR 增强讲解的人数约有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 人.



17. 在平行四边形 $ABCD$ 中， $\angle ABC$ 是锐角，将 CD 沿直线 l 翻折至 AB 所在直线，对应点分别为 C' ， D' ，

若 $AC':AB:BC=1:3:7$ ，则 $\cos \angle ABC =$ _____.

18. 对于一个二次函数 $y = a(x-m)^2 + k$ ($a \neq 0$) 中存在一点 $P(x', y')$ ，使得 $x' - m = y' - k \neq 0$ ，则称

$2|x' - m|$ 为该抛物线的“开口大小”，那么抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + 3$ “开口大小”为 _____.

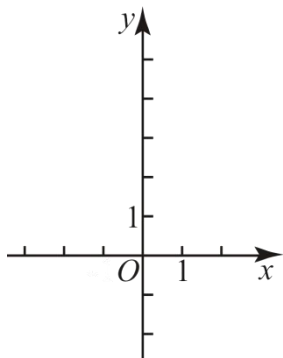
三、简答题 (共 78 分，其中第 19-22 题每题 10 分，第 23、24 题每题 12 分，第 25 题 14 分)

19. 计算: $|1 - \sqrt{3}| + 24^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}} - (1 - \sqrt{3})^0$.

20. 解方程组:
$$\begin{cases} x^2 - 3xy - 4y^2 = 0 \textcircled{1} \\ x + 2y = 6 \textcircled{2} \end{cases}$$
.

21. 在平面直角坐标系 xOy 中，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数且 $k \neq 0$) 上有一点 $A(-3, m)$ ，且与直线

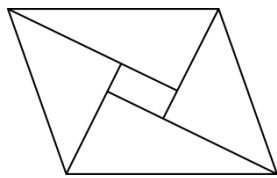
$y = -2x + 4$ 交于另一点 $B(n, 6)$.



(1) 求 k 与 m 的值;

(2) 过点 A 作直线 $l \parallel x$ 轴与直线 $y = 2x + 4$ 交于点 C ，求 $\sin \angle OCA$ 的值.

22. 同学用两幅三角板拼出了如下的平行四边形，且内部留白部分也是平行四边形 (直角三角板互不重叠)，直角三角形斜边上的高都为 h .



(1) 求:

① 两个直角三角形的直角边 (结果用 h 表示);

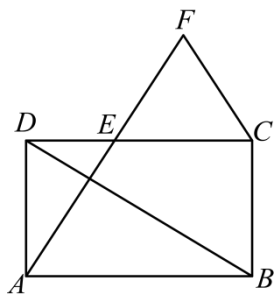
② 小平行四边形的底、高和面积 (结果用 h 表示);

(2) 请画出同学拼出的另一种符合题意的图，要求:

① 不与给定的图形状相同;

② 画出三角形的边.

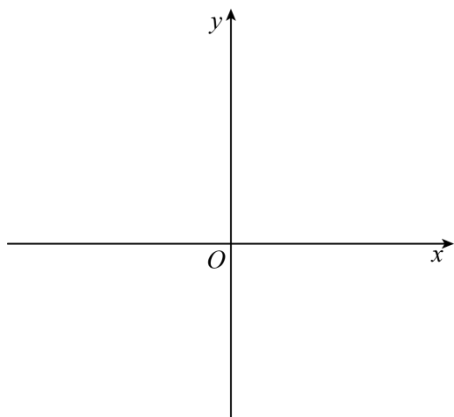
23. 如图所示, 在矩形 $ABCD$ 中, E 为边 CD 上一点, 且 $AE \perp BD$.



(1) 求证: $AD^2 = DE \cdot DC$;

(2) F 为线段 AE 延长线上一点, 且满足 $EF = CF = \frac{1}{2}BD$, 求证: $CE = AD$.

24. 在平面直角坐标系中, 已知平移抛物线 $y = \frac{1}{3}x^2$ 后得到的新抛物线经过 $A\left(0, -\frac{5}{3}\right)$ 和 $B(5, 0)$.



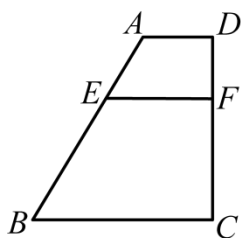
(1) 求平移后新抛物线的表达式;

(2) 直线 $x = m$ ($m > 0$) 与新抛物线交于点 P , 与原抛物线交于点 Q .

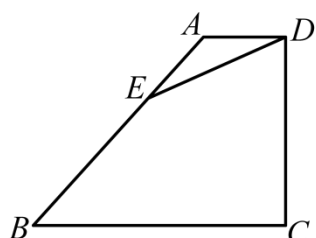
① 如果 PQ 小于 3, 求 m 的取值范围;

② 记点 P 在原抛物线上的对应点为 P' , 如果四边形 $P'BPQ$ 有一组对边平行, 求点 P 的坐标.

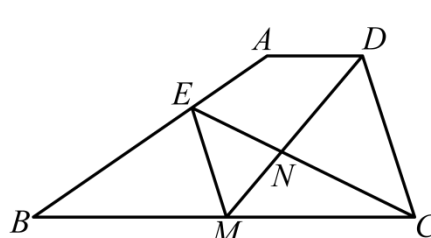
25. 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 点 E 在边 AB 上, 且 $AE = \frac{1}{3}AB$.



(图1)



(图2)



(图3)

(1) 如图 1 所示, 点 F 在边 CD 上, 且 $DF = \frac{1}{3}CD$, 联结 EF , 求证: $EF \parallel BC$;

(2) 已知 $AD = AE = 1$;

①如图 2 所示, 联结 DE , 如果 $\triangle ADE$ 外接圆的心恰好落在 $\angle B$ 的平分线上, 求 $\triangle ADE$ 的外接圆的半径长;

②如图 3 所示, 如果点 M 在边 BC 上, 联结 EM 、 DM 、 EC , DM 与 EC 交于 N , 如果 $BC = 4$, 且 $CD^2 = DM \cdot DN$, $\angle DMC = \angle CEM$, 求边 CD 的长.