

数学试题

注意事项：

1. 你拿到的试卷满分为 150 分，考试时间为 120 分钟.
2. 本试卷包括“试题卷”和“答题卷”两部分.“试题卷”共 4 页，“答题卷”共 6 页.
3. 请务必在“答题卷”上答题，在“试题卷”上答题是无效的.
4. 考试结束后，请将“试题卷”和“答题卷”一并交回. 审核：魏敬德老师

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，满分 40 分）

每小题都给出 A, B, C, D 四个选项，其中只有一个是符合题目要求的.

1. -5 的绝对值是 ()

- A. 5 B. -5 C. $-\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{5}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据负数的绝对值等于它的相反数可得答案.

【详解】解： $|-5|=5$.

故选 A.

2. 据统计，2023 年我国新能源汽车产量超过 944 万辆，其中 944 万用科学记数法表示为 ()

- A. 0.944×10^7 B. 9.44×10^6 C. 9.44×10^7 D. 94.4×10^6

【答案】B

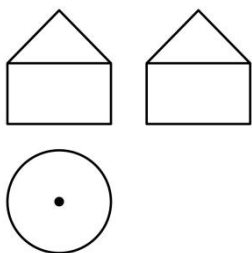
【解析】

【分析】本题考查了科学记数法，先把 944 万转化为 9440000，再根据科学记数法： $a \times 10^n$ ($1 \leq |a| < 10$, n 为整数)，先确定 a 的值，然后根据小数点移动的数位确定 n 的值即可，根据科学记数法确定 a 和 n 的值是解题的关键.

【详解】解：944 万 $= 9440000 = 9.44 \times 10^6$,

故选：B.

3. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体为 ()





【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查由三视图判断几何体，关键是熟悉三视图的定义.

【详解】解：根据三视图的形状，结合三视图的定义以及几何体的形状特征可得该几何体为 D 选项.

故选：D.

4. 下列计算正确的是 ()

A. $a^3 + a^5 = a^6$

B. $a^6 \div a^3 = a^2$

C. $(-a)^2 = a^2$

D. $\sqrt{a^2} = a$

【答案】C

【解析】

【分析】题目主要考查合并同类项、同底数幂的除法、积的乘方运算、二次根式的化简，根据这些运算法则依次判断即可

【详解】解：A、 a^3 与 a^5 不是同类项，不能合并，选项错误，不符合题意；B、 $a^6 \div a^3 = a^3$ ，选项错误，不符合题意；C、 $(-a)^2 = a^2$ ，选项正确，符合题意；D、 $\sqrt{a^2} = a$ ，当 $a \geq 0$ 时， $\sqrt{a^2} = a$ ，当 $a < 0$ 时， $\sqrt{a^2} = -a$ ，选项错误，不符合题意；

故选：C

5. 若扇形 AOB 的半径为 6， $\angle AOB = 120^\circ$ ，则 $\widehat{AB}$ 的长为 ()

A. 2π

B. 3π

C. 4π

D. 6π

【答案】C

【解析】

【分析】此题考查了弧长公式，根据弧长公式计算即可.

【详解】解：由题意可得， $\widehat{AB}$ 的长为 $\frac{120\pi \times 6}{180} = 4\pi$ ，

故选：C.

6. 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 与一次函数 $y = 2 - x$ 的图象的一个交点的横坐标为 3，则 k 的值为 ()

- A. -3 B. -1 C. 1 D. 3

【答案】A

【解析】

【分析】题目主要考查一次函数与反比例函数的交点问题，根据题意得出 $y = 2 - 3 = -1$ ，代入反比例函数求解即可

【详解】解： $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 与一次函数 $y = 2 - x$ 的图象的一个交点的横坐标为 3，

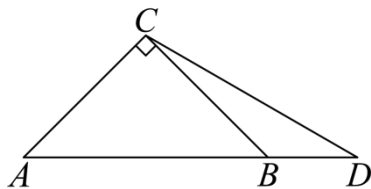
$$\therefore y = 2 - 3 = -1,$$

$$\therefore -1 = \frac{k}{3},$$

$$\therefore k = -3,$$

故选：A

7. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AC = BC = 2$ ，点 D 在 AB 的延长线上，且 $CD = AB$ ，则 BD 的长是 ()



- A. $\sqrt{10} - \sqrt{2}$ B. $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2} - 2$ D. $2\sqrt{2} - \sqrt{6}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了等腰直角三角形的判定和性质，对顶角的性质，勾股定理，过点 D 作 $DE \perp CB$ 的延长线于点 E ，则 $\angle BED = 90^\circ$ ，由 $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC = 2$ ，可得 $AB = 2\sqrt{2}$ ， $\angle A = \angle ABC = 45^\circ$ ，进而得到 $CD = 2\sqrt{2}$ ， $\angle DBE = 45^\circ$ ，即得 $\triangle BDE$ 为等腰直角三角形，得到 $DE = BE$ ，设 $DE = BE = x$ ，由勾股定理得 $(2 + x)^2 + x^2 = (2\sqrt{2})^2$ ，求出 x 即可求解，正确作出辅助线是解题的关键.

【详解】解：过点 D 作 $DE \perp CB$ 的延长线于点 E ，则 $\angle BED = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ, \quad AC = BC = 2,$$

$$\therefore AB = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \quad \angle A = \angle ABC = 45^\circ,$$

$$\therefore CD = 2\sqrt{2}, \quad \angle DBE = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle BDE$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore DE = BE,$$

设 $DE = BE = x$, 则 $CE = 2 + x$,

在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中, $CE^2 + DE^2 = CD^2$,

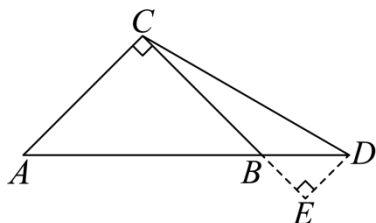
$$\therefore (2+x)^2 + x^2 = (2\sqrt{2})^2,$$

解得 $x_1 = \sqrt{3} - 1$, $x_2 = -\sqrt{3} - 1$ (舍去),

$$\therefore DE = BE = \sqrt{3} - 1,$$

$$\therefore BD = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{6} - \sqrt{2},$$

故选: B.



8. 已知实数 a, b 满足 $a - b + 1 = 0$, $0 < a + b + 1 < 1$, 则下列判断正确的是 ()

A. $-\frac{1}{2} < a < 0$

B. $\frac{1}{2} < b < 1$

C. $-2 < 2a + 4b < 1$

D. $-1 < 4a + 2b < 0$

【答案】C

【解析】

【分析】题目主要考查不等式的性质, 根据等量代换及不等式的性质依次判断即可得出结果, 熟练掌握不等式的性质是解题关键

【详解】解: $\because a - b + 1 = 0$,

$$\therefore a = b - 1,$$

$$\because 0 < a + b + 1 < 1,$$

$$\therefore 0 < b - 1 + b + 1 < 1,$$

$$\therefore 0 < b < \frac{1}{2}, \text{ 选项 B 错误, 不符合题意;}$$

$$\because a - b + 1 = 0,$$

$$\therefore b = a + 1,$$

$$\therefore 0 < a + b + 1 < 1,$$

$$\therefore 0 < a + a + 1 + 1 < 1,$$

$$\therefore -1 < a < -\frac{1}{2}, \text{ 选项 A 错误, 不符合题意;}$$

$$\therefore -1 < a < -\frac{1}{2}, \quad 0 < b < \frac{1}{2},$$

$$\therefore -2 < 2a < -1, \quad 0 < 4b < 2,$$

$$\therefore -2 < 2a + 4b < 1, \text{ 选项 C 正确, 符合题意;}$$

$$\therefore -1 < a < -\frac{1}{2}, \quad 0 < b < \frac{1}{2},$$

$$\therefore -4 < 4a < -2, \quad 0 < 2b < 1,$$

$$\therefore -4 < 4a + 2b < -1, \text{ 选项 D 错误, 不符合题意;}$$

故选: C

9. 在凸五边形 $ABCDE$ 中, $AB = AE$, $BC = DE$, F 是 CD 的中点. 下列条件中, 不能推出 AF 与 CD 一定垂直的是 ()

A. $\angle ABC = \angle AED$

B. $\angle BAF = \angle EAF$

C. $\angle BCF = \angle EDF$

D. $\angle ABD = \angle AEC$

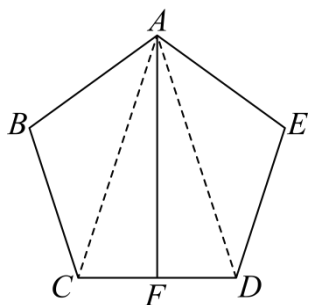
【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的判定和性质, 等腰三角形“三线合一”性质的应用, 熟练掌握全等三角形的判定的方法是解题的关键.

利用全等三角形的判定及性质对各选项进行判定, 然后根据等腰三角形“三线合一”的性质即可证得结论.

【详解】解: A、连结 AC 、 AD ,



$$\therefore \angle ABC = \angle AED, \quad AB = AE, \quad BC = DE,$$

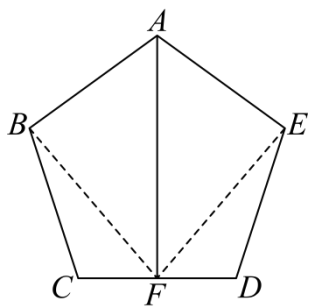
$$\therefore \triangle ACB \cong \triangle ADE (\text{SAS}),$$

$$\therefore AC = AD$$

又 $\therefore$ 点 F 为 CD 的中点

$\therefore AF \perp CD$ ，故不符合题意；

B、连结 BF 、 EF ，



$\because AB = AE$ ， $\angle BAF = \angle EAF$ ， $AF = AF$ ，

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle AEF$ (SAS)，

$\therefore BF = EF$ ， $\angle AFB = \angle AFE$

又 $\because$ 点 F 为 CD 的中点，

$\therefore CF = DF$ ，

$\because BC = DE$ ，

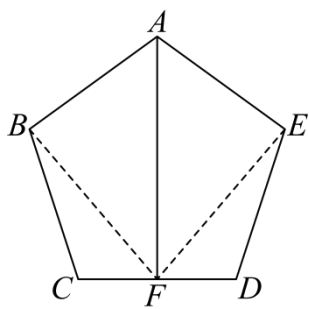
$\therefore \triangle CBF \cong \triangle DEF$ (SSS)，

$\therefore \angle CFB = \angle DFE$ ，

$\therefore \angle CFB + \angle AFB = \angle DFE + \angle AFE = 90^\circ$ ，

$\therefore AF \perp CD$ ，故不符合题意；

C、连结 BF 、 EF ，



$\because$ 点 F 为 CD 的中点，

$\therefore CF = DF$ ，

$\because \angle BCF = \angle EDF$ ， $BC = DE$ ，

$\therefore \triangle CBF \cong \triangle DEF$ (SAS)，

$\therefore BF = EF$ ， $\angle CFB = \angle DFE$ ，

$$\because AB = AE, AF = AF,$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle AEF (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle AFB = \angle AFE,$$

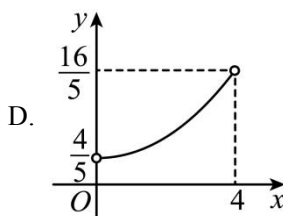
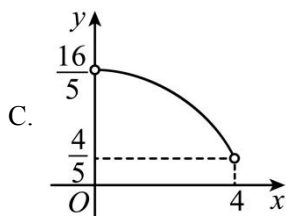
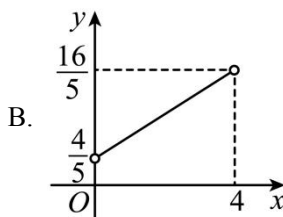
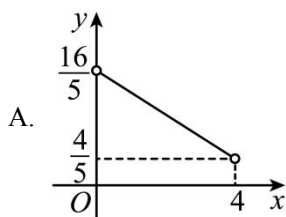
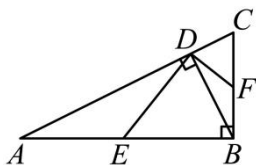
$$\therefore \angle CFB + \angle AFB = \angle DFE + \angle AFE = 90^\circ,$$

$\therefore AF \perp CD$, 故不符合题意;

D、 $\angle ABD = \angle AEC$, 无法得出相应结论, 符合题意;

故选: D.

10. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 4$, $BC = 2$, BD 是边 AC 上的高. 点 E, F 分别在边 AB, BC 上 (不与端点重合), 且 $DE \perp DF$. 设 $AE = x$, 四边形 $DEBF$ 的面积为 y , 则 y 关于 x 的函数图象为 ()



【答案】A

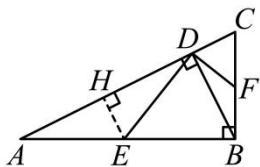
【解析】

【分析】本题主要考查了函数图象的识别, 相似三角形的判定以及性质, 勾股定理的应用, 过点 E 作 $EH \perp AC$ 与点 H , 由勾股定理求出 AC , 根据等面积法求出 BD , 先证明 $\triangle ABC \sim \triangle ADB$, 由相似三角形的性质可

得出 $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$, 即可求出 AD , 再证明 $\triangle AED \sim \triangle BFD$, 由相似三角形的性质可得出 $\frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle BFD}} = \left(\frac{AD}{BD}\right)^2$,

即可得出 $S_{\triangle AED} = 4S_{\triangle BFD}$, 根据 $S_{\text{四边形}DEBF} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AED} - (S_{\triangle BDC} - S_{\triangle BDF})$, 代入可得出一次函数的解析式, 最后根据自变量的大小求出对应的函数值.

【详解】解: 过点 E 作 $EH \perp AC$ 与点 H , 如下图:



$$\because \angle ABC = 90^\circ, \quad AB = 4, \quad BC = 2,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2\sqrt{5},$$

$\therefore BD$ 是边 AC 上的高.

$$\therefore \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} AC \cdot BD,$$

$$\therefore BD = \frac{4}{5}\sqrt{5},$$

$$\because \angle BAC = \angle CAB, \quad \angle ABC = \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADB,$$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB},$$

解得: $AD = \frac{8\sqrt{5}}{5},$

$$\therefore DC = AC - AD = 2\sqrt{5} - \frac{8\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\because \angle BDF + \angle BDE = \angle BDE + \angle EDA = 90^\circ, \quad \angle CBD + \angle DBA = \angle DBA + \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DBC = \angle A, \quad \angle BDF = \angle EDA,$$

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle BFD,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle BFD}} = \left(\frac{AD}{BD}\right)^2 = \left(\frac{\frac{8\sqrt{5}}{5}}{\frac{4\sqrt{5}}{5}}\right)^2 = 4,$$

$$\therefore S_{\triangle AED} = 4S_{\triangle BFD},$$

$$\therefore S_{\text{四边形} DEBF} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AED} - (S_{\triangle BDC} - S_{\triangle BDF})$$

$$= \frac{1}{2} AB \cdot BC - \frac{1}{2} AE \cdot AD \sin \angle A - \frac{1}{2} DC \cdot DB + \frac{1}{4} S_{\triangle BFD}$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 2 - \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} x \cdot \frac{8\sqrt{5}}{5} \times \frac{2}{2\sqrt{5}} - \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$= \frac{16}{5} - \frac{3}{5}x$$

$$\therefore 0 < x < 4,$$

∴当 $x=0$ 时, $S_{\text{四边形}DEBF} = \frac{16}{5}$,

当 $x=4$ 时, $S_{\text{四边形}DEBF} = \frac{4}{5}$.

故选: A.

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 满分 20 分)

11. 若代数式 $\frac{1}{x-4}$ 有意义, 则实数 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \neq 4$

【解析】

【分析】根据分式有意义的条件, 分母不能等于 0, 列不等式求解即可.

【详解】解: ∵分式有意义的条件是分母不能等于 0,

∴ $x-4 \neq 0$

∴ $x \neq 4$.

故答案为: $x \neq 4$.

【点睛】本题主要考查分式有意义的条件, 解决本题的关键是要熟练掌握分式有意义的条件.

12. 我国古代数学家张衡将圆周率取值为 $\sqrt{10}$, 祖冲之给出圆周率的一种分数形式的近似值为 $\frac{22}{7}$. 比较大
小: $\sqrt{10}$ _____ $\frac{22}{7}$ (填 “>” 或 “<”).

【答案】 >

【解析】

【分析】本题考查的是实数的大小比较, 先比较两个正数的平方, 从而可得答案.

【详解】解: ∵ $\left(\frac{22}{7}\right)^2 = \frac{484}{49}$, $(\sqrt{10})^2 = 10 = \frac{490}{49}$,

而 $\frac{484}{49} < \frac{490}{49}$,

∴ $\left(\frac{22}{7}\right)^2 < (\sqrt{10})^2$,

∴ $\sqrt{10} > \frac{22}{7}$;

故答案为: >

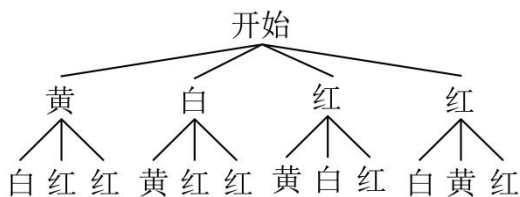
13. 不透明的袋中装有大小质地完全相同的 4 个球, 其中 1 个黄球、1 个白球和 2 个红球. 从袋中任取 2 个球, 恰为 2 个红球的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{6}$

【解析】

【分析】 本题考查了用树状图或列表法求概率，画出树状图即可求解，掌握树状图或列表法是解题的关键.

【详解】 解：画树状图如下：



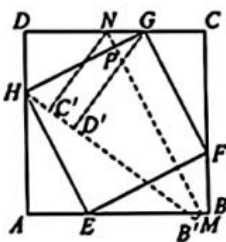
由树状图可得，共有12种等结果，其中恰为2个红球的结果有2种，

$\therefore$ 恰为2个红球的概率为 $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$,

故答案为: $\frac{1}{6}$.

14. 如图，现有正方形纸片 $ABCD$ ，点 E, F 分别在边 AB, BC 上，沿垂直于 EF 的直线折叠得到折痕 MN ，

点 B, C 分别落在正方形所在平面内的点 B', C' 处，然后还原.



(1) 若点 N 在边 CD 上，且 $\angle BEF = \alpha$ ，则 $\angle C'NM =$ _____ (用含 α 的式子表示)；

(2) 再沿垂直于 MN 的直线折叠得到折痕 GH ，点 G, H 分别在边 CD, AD 上，点 D 落在正方形所在平面内的点 D' 处，然后还原. 若点 D' 在线段 $B'C'$ 上，且四边形 $EFGH$ 是正方形， $AE = 4$ ， $EB = 8$ ， MN 与 GH 的交点为 P ，则 PH 的长为 _____.

【答案】 ①. $90^\circ - \alpha$ ②. $3\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 ①连接 CC' ，根据正方形的性质每个内角为直角以及折叠带来的折痕与对称点连线段垂直的性质，再结合平行线的性质即可求解；

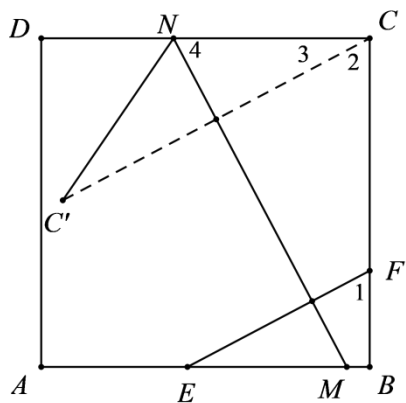
②记 HG 与 NC' 交于点 K ， 可证： $\triangle AEH \cong \triangle BFE \cong \triangle DHG \cong \triangle CGF$ ， 则 $AE = CG = DH = 4$ ，

$DG = BE = 8$ ， 由勾股定理可求 $HG = 4\sqrt{5}$ ， 由折叠的性质得到： $\angle NC'B = \angle NCB = 90^\circ$ ， $\angle 8 = \angle 9$ ，

$\angle D = \angle GD'H = 90^\circ$ ， $NC = NC'$ ， $GD = GD' = 8$ ， 则 $NG = NK$ ， $KC' = GC = 4$ ， 由 $NC' \parallel GD'$ ，

得 $\triangle HC'K \sim \triangle HD'G$ ，继而可证明 $HK = KG$ ，由等腰三角形的性质得到 $PK = PG$ ，故 $PH = \frac{3}{4}HG = 3\sqrt{5}$.

【详解】解：①连接 CC' ，由题意得 $\angle C'NM = \angle 4$ ， $MN \perp CC'$ ，



$\because MN \perp EF$ ，

$\therefore CC' \parallel FE$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle B = \angle BCD = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle 3 + \angle 4 = \angle 3 + \angle 2 = 90^\circ$ ， $\angle 1 + \angle BEF = 90^\circ$ ，

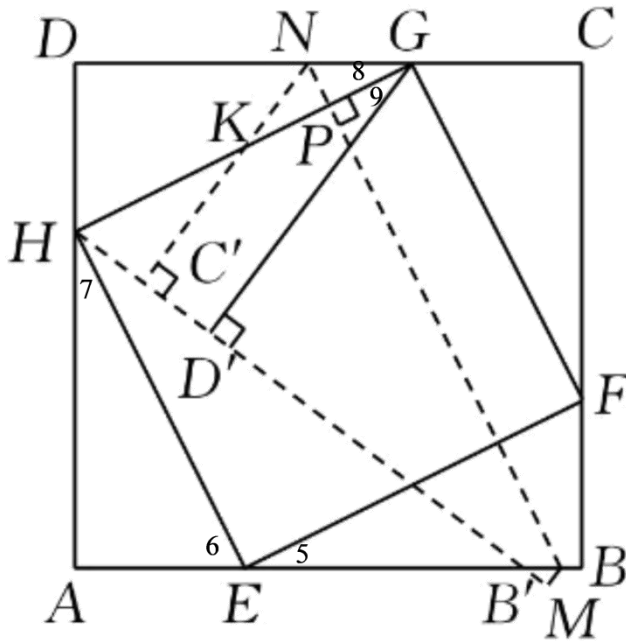
$\therefore \angle 2 = \angle 4$ ， $\angle 1 = 90^\circ - a$ ，

$\therefore \angle 4 = 90^\circ - a <$

$\therefore \angle C'NM = 90^\circ - a$ ，

故答案为： $90^\circ - a$ ；

②记 HG 与 NC' 交于点 K ，如图：



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，四边形 $EFGH$ 是正方形，

$\therefore \angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$ ， $HE = FE$ ， $\angle HEF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle 5 + \angle 6 = \angle 7 + \angle 6 = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle 5 = \angle 7$ ，

$\therefore \triangle AEH \cong \triangle BFE$ ，

同理可证： $\triangle AEH \cong \triangle BFE \cong \triangle DHG \cong \triangle CGF$ ，

$\therefore AE = CG = DH = 4$ ， $DG = BE = 8$ ，

在 $\text{Rt}\triangle HDG$ 中，由勾股定理得 $HG = \sqrt{DH^2 + DG^2} = 4\sqrt{5}$ ，

由题意得： $\angle NC'B = \angle NCB = 90^\circ$ ， $\angle 8 = \angle 9$ ， $\angle D = \angle GD'H = 90^\circ$ ， $NC = NC'$ ， $GD = GD' = 8$ ，

$\therefore NC' \parallel GD'$ ，

$\therefore \angle NKG = \angle 9$ ，

$\therefore \angle 8 = \angle NKG$ ，

$\therefore NG = NK$ ，

$\therefore NC - NG = NC' - NK$ ，

即 $KC' = GC = 4$ ，

$\therefore NC' \parallel GD'$ ，

$\therefore \triangle HC'K \sim \triangle HD'G$ ，

$$\therefore \frac{HK}{HG} = \frac{C'K}{D'G} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore HK = \frac{1}{2}HG,$$

$$\therefore HK = KG,$$

由题意得 $MN \perp HG$ ，而 $NG = NK$ ，

$$\therefore PK = PG,$$

$$\therefore PH = \frac{3}{4}HG = 3\sqrt{5},$$

故答案为： $3\sqrt{5}$.

【点睛】 本题考查了正方形的性质，折叠的性质，全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，勾股定理，等腰三角形的判定与性质，熟练掌握知识点，正确添加辅助线是解决本题的关键.

三、(本大题共 2 小题，每小题 8 分，满分 16 分)

15. 解方程： $x^2 - 2x = 3$

【答案】 $x_1 = 3$ ， $x_2 = -1$

【解析】

【分析】 先移项，然后利用因式分解法解一元二次方程，即可求出答案.

【详解】 解： $\because x^2 - 2x = 3$ ，

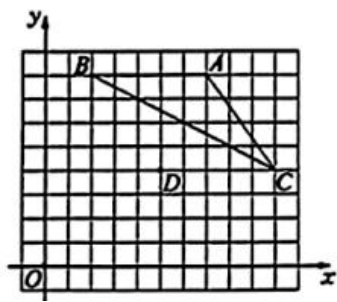
$$\therefore x^2 - 2x - 3 = 0,$$

$$\therefore (x-3)(x+1) = 0,$$

$$\therefore x_1 = 3, \quad x_2 = -1.$$

【点睛】 本题考查了解一元二次方程，解题的关键是掌握解一元二次方程的方法进行解题.

16. 如图，在由边长为 1 个单位长度的小正方形组成的网格中建立平面直角坐标系 xOy ，格点（网格线的交点） A 、 B 、 C 、 D 的坐标分别为 $(7,8)$ ， $(2,8)$ ， $(10,4)$ ， $(5,4)$.



- (1) 以点 D 为旋转中心，将 $\triangle ABC$ 旋转 180° 得到 $\triangle A_1B_1C_1$ ，画出 $\triangle A_1B_1C_1$ ；
- (2) 直接写出以 B ， C_1 ， B_1 ， C 为顶点的四边形的面积；
- (3) 在所给的网格图中确定一个格点 E ，使得射线 AE 平分 $\angle BAC$ ，写出点 E 的坐标.

【答案】(1) 见详解 (2) 40

(3) $E(6,6)$ (答案不唯一)

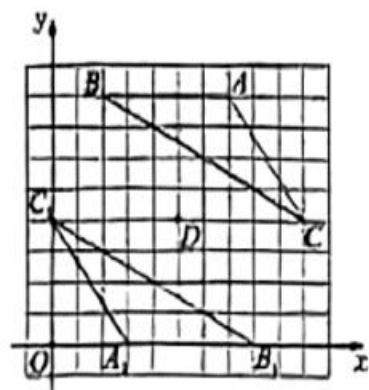
【解析】

【分析】本题主要考查了画旋转图形，平行四边形的判定以及性质，等腰三角形的判定以及性质等知识，结合网格解题是解题的关键.

- (1) 将点 A ， B ， C 分别绕点 D 旋转 180° 得到对应点，即可得出 $\triangle A_1B_1C_1$.
- (2) 连接 BB_1 ， CC_1 ，证明四边形 BC_1B_1C 是平行四边形，利用平行四边形的性质以及网格求出面积即可.
- (3) 根据网格信息可得出 $AB = 5$ ， $AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ，即可得出 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，根据三线合一的性质即可求出点 E 的坐标.

【小问 1 详解】

解： $\triangle A_1B_1C_1$ 如下图所示：



【小问 2 详解】

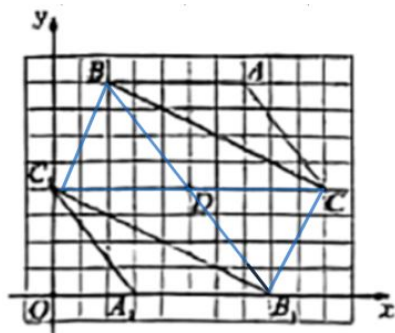
连接 BB_1 ， CC_1 ，

$\because$ 点 B 与 B_1 ，点 C 与 C_1 分别关于点 D 成中心对称，

$$\therefore DB = DB_1, \quad DC = DC_1,$$

$\therefore$ 四边形 BC_1B_1C 是平行四边形,

$$\therefore S_{\square BC_1B_1C} = 2\Delta CC_1B_1 = 2 \times \frac{1}{2} \times 10 \times 4 = 40.$$



【小问 3 详解】

∴根据网格信息可得出 $AB=5$, $AC=\sqrt{3^2+4^2}=5$,

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形.

$\therefore AE$ 也是线段 BC 的垂直平分线,

$\therefore B, C$ 的坐标分别为, $(2,8), (10,4)$

$$\therefore \text{点 } E\left(\frac{2+10}{2}, \frac{8+4}{2}\right),$$

即 $E(6,6)$. (答案不唯一)

四、(本大题共 2 小题, 每小题 8 分, 满分 16 分)

17. 乡村振兴战略实施以来，很多外出人员返乡创业. 某村有部分返乡青年承包了一些田地，采用新技术种植 A 、 B 两种农作物. 种植这两种农作物每公顷所需人数和投入资金如表：

农作物品种	每公顷所需人数	每公顷所需投入资金 (万元)
A	4	8
B	3	9

已知农作物种植人员共 24 位, 且每人只参与一种农作物种植, 投入资金共 60 万元. 问 A , B 这两种农作物的种植面积各多少公顷?

【答案】 A 农作物的种植面积为3公顷, B 农作物的种植面积为4公顷.

【解析】

【分析】本题考查了二元一次方程组的应用，设 A 农作物的种植面积为 x 公顷，B 农作物的种植面积为 y 公

顷，根据题意列出二元一次方程组即可求解，根据题意，找到等量关系，正确列出二元一次方程组是解题的关键.

【详解】解：设 A 农作物的种植面积为 x 公顷，B 农作物的种植面积为 y 公顷，

由题意可得，
$$\begin{cases} 4x + 3y = 24 \\ 8x + 9y = 60 \end{cases},$$

解得
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases},$$

答：设 A 农作物的种植面积为 3 公顷，B 农作物的种植面积为 4 公顷.

18. 数学兴趣小组开展探究活动，研究了“正整数 N 能否表示为 $x^2 - y^2$ (x, y 均为自然数)”的问题.

(1) 指导教师将学生的发现进行整理，部分信息如下 (n 为正整数):

N	奇数	4 的倍数
表示 结果	$1 = 1^2 - 0^2$	$4 = 2^2 - 0^2$
	$3 = 2^2 - 1^2$	$8 = 3^2 - 1^2$
	$5 = 3^2 - 2^2$	$12 = 4^2 - 2^2$
	$7 = 4^2 - 3^2$	$16 = 5^2 - 3^2$
	$9 = 5^2 - 4^2$	$20 = 6^2 - 4^2$
一般 结论	$2n - 1 = n^2 - (n - 1)^2$	$4n = \underline{\hspace{2cm}}$

按上表规律，完成下列问题:

(i) $24 = (\quad)^2 - (\quad)^2$;

(ii) $4n = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 兴趣小组还猜测: 像 2, 6, 10, 14, ... 这些形如 $4n - 2$ (n 为正整数) 的正整数 N 不能表示为 $x^2 - y^2$ (x, y 均为自然数). 师生一起研讨，分析过程如下:

假设 $4n-2 = x^2 - y^2$ ，其中 x, y 均为自然数.

分下列三种情形分析:

① 若 x, y 均为偶数, 设 $x = 2k, y = 2m$, 其中 k, m 均为自然数,

则 $x^2 - y^2 = (2k)^2 - (2m)^2 = 4(k^2 - m^2)$ 为 4 的倍数.

而 $4n-2$ 不是 4 的倍数, 矛盾. 故 x, y 不可能均为偶数.

② 若 x, y 均为奇数, 设 $x = 2k+1, y = 2m+1$, 其中 k, m 均为自然数,

则 $x^2 - y^2 = (2k+1)^2 - (2m+1)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 为 4 的倍数.

而 $4n-2$ 不是 4 的倍数, 矛盾. 故 x, y 不可能均为奇数.

③ 若 x, y 一个是奇数一个是偶数, 则 $x^2 - y^2$ 为奇数.

而 $4n-2$ 是偶数, 矛盾. 故 x, y 不可能一个是奇数一个是偶数.

由 ①②③ 可知, 猜测正确.

阅读以上内容, 请在情形 ② 的横线上填写所缺内容.

【答案】 (1) (i) 7, 5; (ii) $(n+1)^2 - (n-1)^2$;

(2) $4(k^2 - m^2 + k - m)$

【解析】

【分析】 (1) (i) 根据规律即可求解; (ii) 根据规律即可求解;

(2) 利用完全平方公式展开, 再合并同类项, 最后提取公因式即可;

本题考查了平方差公式, 完全平方公式, 掌握平方差公式和完全平方公式的运算是解题的关键.

【小问 1 详解】

(i) 由规律可得, $24 = 7^2 - 5^2$,

故答案为: 7, 5;

(ii) 由规律可得, $4n = (n+1)^2 - (n-1)^2$,

故答案为: $(n+1)^2 - (n-1)^2$;

【小问 2 详解】

解: 假设 $4n-2 = x^2 - y^2$, 其中 x, y 均为自然数.

分下列三种情形分析:

① 若 x, y 均为偶数, 设 $x = 2k, y = 2m$, 其中 k, m 均为自然数,

则 $x^2 - y^2 = (2k)^2 - (2m)^2 = 4(k^2 - m^2)$ 为 4 的倍数.

而 $4n - 2$ 不是 4 的倍数, 矛盾. 故 x, y 不可能均为偶数.

② 若 x, y 均为奇数, 设 $x = 2k + 1, y = 2m + 1$, 其中 k, m 均为自然数,

则 $x^2 - y^2 = (2k + 1)^2 - (2m + 1)^2 = 4(k^2 - m^2 + k - m)$ 为 4 的倍数.

而 $4n - 2$ 不是 4 的倍数, 矛盾. 故 x, y 不可能均为奇数.

③ 若 x, y 一个是奇数一个是偶数, 则 $x^2 - y^2$ 为奇数.

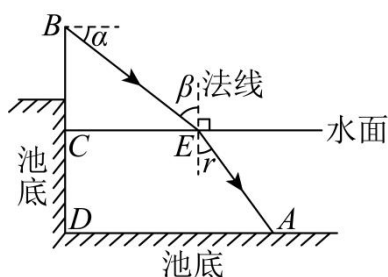
而 $4n - 2$ 是偶数, 矛盾. 故 x, y 不可能一个是奇数一个是偶数.

由 ①②③ 可知, 猜测正确.

故答案为: $4(k^2 - m^2 + k - m)$.

五、(本大题共 2 小题, 每小题 10 分, 满分 20 分)

19. 科技社团选择学校游泳池进行一次光的折射实验, 如图, 光线自点 B 处发出, 经水面点 E 折射到池底点 A 处. 已知 BE 与水平线的夹角 $\alpha = 36.9^\circ$, 点 B 到水面的距离 $BC = 1.20\text{m}$, 点 A 处水深为 1.20m , 到池壁的水平距离 $AD = 2.50\text{m}$, 点 B, C, D 在同一条竖直线上, 所有点都在同一竖直平面内. 记入射角为 β , 折射角为 γ , 求 $\frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$ 的值 (精确到 0.1, 参考数据: $\sin 36.9^\circ \approx 0.60, \cos 36.9^\circ \approx 0.80, \tan 36.9^\circ \approx 0.75$).



【答案】 $\frac{4}{3}$

【解析】

【分析】本题考查了解直角三角形, 勾股定理, 三角函数, 过点 E 作 $EF \perp AD$ 于 F , 则 $\angle AFE = 90^\circ$, $DF = CE$, 由题意可得, $\angle BEC = \angle \alpha = 36.9^\circ$, $\angle CBE = \angle \beta$, $EF = 1.2\text{m}$,

解 $\text{Rt}\triangle BCE$ 求出 CE 、 BE , 可求出 $\sin \beta$, 再由勾股定理可得 AE , 进而得到 $\sin \gamma$, 即可求解, 正确作出辅助线是解题的关键.

【详解】解: 过点 E 作 $EF \perp AD$ 于 F , 则 $\angle AFE = 90^\circ$, $DF = CE$, 由题意可得, $\angle BEC = \angle \alpha = 36.9^\circ$,

$$\angle CBE = \angle \beta, \quad EF = 1.2\text{m},$$

$$\text{在 Rt}\triangle BCE \text{ 中, } CE = \frac{BC}{\tan \alpha} \approx \frac{1.2}{0.75} = 1.6\text{m}, \quad BE = \frac{BC}{\sin \alpha} \approx \frac{1.2}{0.6} = 2\text{m},$$

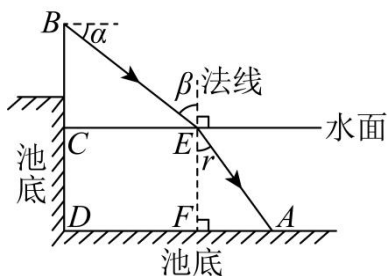
$$\therefore \sin \beta = \frac{CE}{BE} = \frac{1.6}{2} = \frac{4}{5}, \quad DF = 1.6\text{m},$$

$$\therefore AF = AD - DF = 2.5 - 1.6 = 0.9\text{m},$$

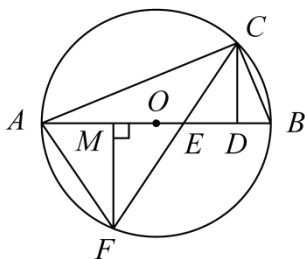
$$\therefore \text{在 Rt}\triangle AFE, \quad AE = \sqrt{EF^2 + AF^2} = \sqrt{1.2^2 + 0.9^2} = 1.5\text{m},$$

$$\therefore \sin \gamma = \frac{AF}{AE} = \frac{0.9}{1.5} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}.$$



20. 如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, D 是直径 AB 上一点, $\angle ACD$ 的平分线交 AB 于点 E , 交 $\odot O$ 于另一点 F , $FA = FE$.



(1) 求证: $CD \perp AB$;

(2) 设 $FM \perp AB$, 垂足为 M , 若 $OM = OE = 1$, 求 AC 的长.

【答案】(1) 见详解 (2) $4\sqrt{2}$.

【解析】

【分析】本题主要考查了等腰三角形的性质, 圆周角定理, 勾股定理等知识, 掌握这些性质以及定理是解题的关键.

(1) 由等边对等角得出 $\angle FAE = \angle AEF$, 由同弧所对的圆周角相等得出 $\angle FAE = \angle BCE$, 由对顶角相等得出 $\angle AEF = \angle CEB$, 等量代换得出 $\angle CEB = \angle BCE$, 由角平分线的定义可得出 $\angle ACE = \angle DCE$, 由直径所对的圆周角等于 90° 可得出 $\angle ACB = 90^\circ$, 即可得出

$\angle CEB + \angle DCE = \angle BCE + \angle ACE = \angle ACB = 90^\circ$ ，即 $\angle CDE = 90^\circ$ 。

(2) 由 (1) 知， $\angle CEB = \angle BCE$ ，根据等边对等角得出 $BE = BC$ ，根据等腰三角形三线合一的性质可得出 MA ， AE 的值，进一步求出 OA ， BE ，在利用勾股定理即可求出 AC 。

【小问 1 详解】

证明： $\because FA = FE$ ，

$\therefore \angle FAE = \angle AEF$ ，

又 $\angle FAE$ 与 $\angle BCE$ 都是 $\widehat{BF}$ 所对的圆周角，

$\therefore \angle FAE = \angle BCE$ ，

$\because \angle AEF = \angle CEB$ ，

$\therefore \angle CEB = \angle BCE$ ，

$\because CE$ 平分 $\angle ACD$ ，

$\therefore \angle ACE = \angle DCE$ ，

$\because AB$ 是直径，

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle CEB + \angle DCE = \angle BCE + \angle ACE = \angle ACB = 90^\circ$ ，

故 $\angle CDE = 90^\circ$ ，

即 $CD \perp AB$ 。

【小问 2 详解】

由 (1) 知， $\angle CEB = \angle BCE$ ，

$\therefore BE = BC$ ，

又 $FA = FE$ ， $FM \perp AB$ ，

$\therefore MA = ME = MO + OE = 2$ ， $AE = 4$ ，

$\therefore$ 圆的半径 $OA = OB = AE - OE = 3$ ，

$\therefore BE = BC = OB - OE = 2$ ，

在 $\triangle ABC$ 中，

$AB = 2OA = 6$ ， $BC = 2$

$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$

即 AC 的长为 $4\sqrt{2}$ 。

六、(本题满分 12 分)

21. 综合与实践

【项目背景】

无核柑橘是我省西南山区特产，该地区某村有甲、乙两块成龄无核柑橘园。在柑橘收获季节，班级同学前往该村开展综合实践活动，其中一个项目是：在日照、土质、空气湿度等外部环境基本一致的条件下，对两块柑橘园的优质柑橘情况进行调查统计，为柑橘园的发展规划提供一些参考。

【数据收集与整理】

从两块柑橘园采摘的柑橘中各随机选取 200 个，在技术人员指导下，测量每个柑橘的直径，作为样本数据。柑橘直径用 x （单位：cm）表示。

将所收集的样本数据进行如下分组：

组别	A	B	C	D	E
x	$3.5 \leq x < 4.5$	$4.5 \leq x < 5.5$	$5.5 \leq x < 6.5$	$6.5 \leq x < 7.5$	$7.5 \leq x \leq 8.5$

整理样本数据，并绘制甲、乙两园样本数据的频数直方图，部分信息如下：

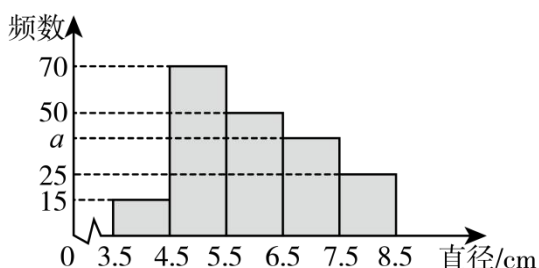


图1 甲园样本数据频数直方图

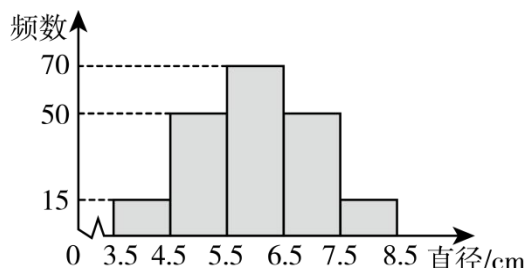


图2 乙园样本数据频数直方图

任务 1 求图 1 中 a 的值。

【数据分析与运用】

任务 2 A, B, C, D, E 五组数据的平均数分别取为 4, 5, 6, 7, 8，计算乙园样本数据的平均数。

任务 3 下列结论一定正确的是_____（填正确结论的序号）。

- ①两园样本数据的中位数均在 C 组；
- ②两园样本数据的众数均在 C 组；
- ③两园样本数据的最大数与最小数的差相等。

任务 4 结合市场情况，将 C, D 两组的柑橘认定为一级， B 组的柑橘认定为二级，其它组的柑橘认定为三级，其中一级柑橘的品质最优，二级次之，三级最次。试估计哪个园的柑橘品质更优，并说明理由。

根据所给信息，请完成以上所有任务。

【答案】任务 1：40；任务 2：6；任务 3：①；任务 4：乙园的柑橘品质更优，理由见解析

【解析】

【分析】题目主要考查统计表及频数分布直方图，平均数、中位数及众数的求法，根据图标获取相关信息是解题关键。

任务 1：直接根据总数减去各部分的数据即可；

任务 2：根据加权平均数的计算方法求解即可；

任务 3：根据中位数、众数及极差的计算方法求解即可；

任务 4：分别计算甲和乙的一级率，比较即可。

【详解】解：任务 1： $a = 200 - 15 - 70 - 50 - 25 = 40$ ；

任务 2： $\frac{15 \times 4 + 50 \times 5 + 70 \times 6 + 50 \times 7 + 15 \times 8}{200} = 6$ ，

乙园样本数据的平均数为 6；

任务 3：① $\because 15 + 70 < 100, 15 + 70 + 50 > 101$ ，

$\therefore$ 甲园样本数据的中位数在 C 组，

$\because 15 + 50 < 100, 15 + 50 + 70 > 101$ ，

$\therefore$ 乙园样本数据的中位数在 C 组，故①正确；

②由样本数据频数直方图得，甲园样本数据的众数均在 B 组，乙园样本数据的众数均在 C 组，故②错误；

③无法判断两园样本数据的最大数与最小数的差是否相等，故③错误；

故答案为：①；

任务 4：甲园样本数据的一级率为： $\frac{50 + 40}{200} \times 100\% = 45\%$ ，

乙园样本数据的一级率为： $\frac{70 + 50}{200} \times 100\% = 60\%$ ，

$\therefore$ 乙园样本数据的一级率高于甲园样本数据的一级率，

$\therefore$ 乙园的柑橘品质更优。

七、(本题满分 12 分)

22. 如图 1， $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O ，点 M, N 分别在边 AD, BC 上，且 $AM = CN$ 。点 E, F 分别是 BD 与 AN, CM 的交点。

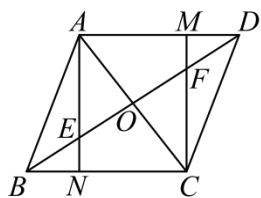


图1

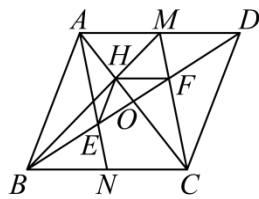


图2

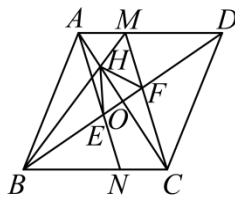


图3

(1) 求证： $OE = OF$ ；

(2) 连接 BM 交 AC 于点 H ，连接 HE, HF 。

(i) 如图 2，若 $HE \parallel AB$ ，求证： $HF \parallel AD$ ；

(ii) 如图 3, 若 $ABCD$ 为菱形, 且 $MD = 2AM$, $\angle EHF = 60^\circ$, 求 $\frac{AC}{BD}$ 的值.

【答案】(1) 见详解 (2) (i) 见详解, (ii) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

【解析】

【分析】(1) 利用平行四边形的性质得出 $AM \parallel CN$, 再证明 $AMCN$ 是平行四边形, 再根据平行四边形的性质可得出 $\angle OAE = \angle OCF$, 再利用 ASA 证明 $\triangle AOE \cong \triangle COF$, 利用全等三角形的性质可得出 $OE = OF$.

(2) (i) 由平行线截直线成比例可得出 $\frac{OH}{OA} = \frac{OE}{OB}$, 结合已知条件等量代换 $\frac{OH}{OA} = \frac{OF}{OD}$, 进一步证明 $\triangle HOF \sim \triangle AOD$, 由相似三角形的性质可得出 $\angle OHF = \angle OAD$, 即可得出 $HF \parallel AD$. (ii) 由菱形的性质得出 $AC \perp BD$, 进一步得出 $\angle EHO = \angle FHO = 30^\circ$, $OH = \sqrt{3}OE$, 由平行线截直线成比例可得出 $\frac{AH}{HC} = \frac{AM}{BC} = \frac{1}{3}$, 进一步得出 $OA = 2OH$, 同理可求出 $OB = 5OE$, 再根据 $\frac{AC}{BD} = \frac{OA}{OB} = \frac{2OH}{5OE}$ 即可得出答案.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC$, $OA = OC$,

$\therefore AM \parallel CN$,

又 $\because AM = CN$,

$\therefore$ 四边形 $AMCN$ 是平行四边形,

$\therefore AN \parallel CM$,

$\therefore \angle OAE = \angle OCF$.

在 $\triangle AOE$ 与 $\triangle COF$ 中,

$$\begin{cases} \angle OAE = \angle OCF \\ OA = OC \\ \angle AOE = \angle COF \end{cases}$$

$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF$ (ASA).

$\therefore OE = OF$.

【小问 2 详解】

(i) $\because HE \parallel AB$

$$\therefore \frac{OH}{OA} = \frac{OE}{OB},$$

$$\text{又 } OB = OD, OE = OF,$$

$$\therefore \frac{OH}{OA} = \frac{OF}{OD},$$

$$\therefore \angle HOF = \angle AOD,$$

$$\therefore \triangle HOF \sim \triangle AOD,$$

$$\therefore \angle OHF = \angle OAD,$$

$$\therefore HF \parallel AD$$

(ii) $\because ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AC \perp BD,$$

$$\text{又 } OE = OF, \angle EHF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EHO = \angle FHO = 30^\circ,$$

$$\therefore OH = \sqrt{3}OE,$$

$$\because AM \parallel BC, MD = 2AM,$$

$$\therefore \frac{AH}{HC} = \frac{AM}{BC} = \frac{1}{3},$$

$$\text{即 } HC = 3AH,$$

$$\therefore OA + AH = 3(OA - OH),$$

$$\therefore OA = 2OH,$$

$$\because BN \parallel AD, MD = 2AM, AM = CN,$$

$$\therefore \frac{BE}{ED} = \frac{BN}{AD} = \frac{2}{3},$$

$$\text{即 } 3BE = 2ED,$$

$$\therefore 3(OB - OE) = 2(OB + OE)$$

$$\therefore OB = 5OE,$$

$$\text{故 } \frac{AC}{BD} = \frac{OA}{OB} = \frac{2OH}{5OE} = \frac{2 \times \sqrt{3}OE}{5OE} = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

【点睛】本题主要考查了平行四边形的判定以及性质，全等三角形判定以及性质，相似三角形的判定以及性质，平行线截线段成比例以及菱形的性质，掌握这些判定方法以及性质是解题的关键.

八、(本题满分 14 分)

23. 已知抛物线 $y = -x^2 + bx$ (b 为常数) 的顶点横坐标比抛物线 $y = -x^2 + 2x$ 的顶点横坐标大 1.

(1) 求 b 的值;

(2) 点 $A(x_1, y_1)$ 在抛物线 $y = -x^2 + 2x$ 上, 点 $B(x_1 + t, y_1 + h)$ 在抛物线 $y = -x^2 + bx$ 上.

(i) 若 $h = 3t$, 且 $x_1 \geq 0$, $t > 0$, 求 h 的值;

(ii) 若 $x_1 = t - 1$, 求 h 的最大值.

【答案】(1) $b = 4$

(2) (i) 3; (ii) $\frac{10}{3}$

【解析】

【分析】题目主要考查二次函数的基本性质及化为顶点式, 解一元二次方程, 理解题意, 熟练掌握运用二次根数的基本性质是解题关键.

(1) 根据题意求出 $y = -x^2 + 2x$ 的顶点为 $(1, 1)$, 确定抛物线 $y = -x^2 + bx$ (b 为常数) 的顶点横坐标为 2, 即可求解;

(2) 根据题意得出 $y_1 = -x_1^2 + 2x_1$, $y_1 + h = -(x_1 + t)^2 + 4(x_1 + t)$, 然后整理化简 $h = -t^2 - 2x_1t + 2x_1 + 4t$; (i) 将 $h = 3t$ 代入求解即可; (ii) 将 $x_1 = t - 1$ 代入整理为顶点式, 即可得出结果.

【小问 1 详解】

解: $y = -x^2 + 2x = -(x^2 - 2x + 1) + 1 = -(x - 1)^2 + 1$,

$\therefore y = -x^2 + 2x$ 的顶点为 $(1, 1)$,

$\therefore$ 抛物线 $y = -x^2 + bx$ (b 为常数) 的顶点横坐标比抛物线 $y = -x^2 + 2x$ 的顶点横坐标大 1,

$\therefore$ 抛物线 $y = -x^2 + bx$ (b 为常数) 的顶点横坐标为 2,

$$\therefore -\frac{b}{2 \times (-1)} = 2,$$

$\therefore b = 4$;

【小问 2 详解】

由 (1) 得 $y = -x^2 + bx = -x^2 + 4x$

$\therefore$ 点 $A(x_1, y_1)$ 在抛物线 $y = -x^2 + 2x$ 上, 点 $B(x_1 + t, y_1 + h)$ 在抛物线 $y = -x^2 + 4x$ 上.

$\therefore y_1 = -x_1^2 + 2x_1$, $y_1 + h = -(x_1 + t)^2 + 4(x_1 + t)$,

$$\text{整理得: } h = -t^2 - 2x_1t + 2x_1 + 4t$$

$$(i) \because h = 3t,$$

$$\therefore 3t = -t^2 - 2x_1t + 2x_1 + 4t,$$

$$\text{整理得: } t(t + 2x_1) = t + 2x_1,$$

$$\because x_1 \geq 0, \quad t > 0,$$

$$\therefore t = 1,$$

$$\therefore h = 3;$$

$$(ii) \text{ 将 } x_1 = t - 1 \text{ 代入 } h = -t^2 - 2x_1t + 2x_1 + 4t,$$

$$\text{整理得 } h = -3t^2 + 8t - 2 = -3\left(t - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{10}{3},$$

$$\because -3 < 0,$$

$$\therefore \text{当 } t = \frac{4}{3}, \text{ 即 } x_1 = \frac{1}{3} \text{ 时, } h \text{ 取得最大值为 } \frac{10}{3}.$$