

数学试题

注意事项：

1. 你拿到的试卷满分为 150 分，考试时间为 120 分钟。
2. 本试卷包括“试题卷”和“答题卷”两部分。“试题卷”共 4 页，“答题卷”共 6 页。
3. 请务必在“答题卷”上答题，在“试题卷”上答题是无效的。
4. 考试结束后，请将“试题卷”和“答题卷”一并交回。审核：魏敬德老师

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，满分 40 分）

每小题都给出 A, B, C, D 四个选项，其中只有一个是符合题目要求的。

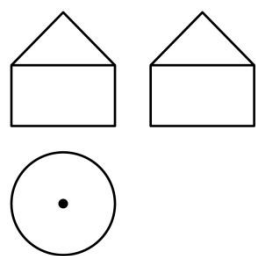
1. -5 的绝对值是 ()

- A. 5 B. -5 C. $-\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{5}$

2. 据统计，2023 年我国新能源汽车产量超过 944 万辆，其中 944 万用科学记数法表示为 ()

- A. 0.944×10^7 B. 9.44×10^6 C. 9.44×10^7 D. 94.4×10^6

3. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体为 ()



- A. B. C. D.

4. 下列计算正确的是 ()

- A. $a^3 + a^5 = a^6$ B. $a^6 \div a^3 = a^2$
C. $(-a)^2 = a^2$ D. $\sqrt{a^2} = a$

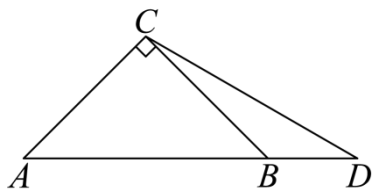
5. 若扇形 AOB 的半径为 6, $\angle AOB = 120^\circ$, 则 $\widehat{AB}$ 的长为 ()

- A. 2π B. 3π C. 4π D. 6π

6. 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 与一次函数 $y = 2 - x$ 的图象的一个交点的横坐标为 3, 则 k 的值为 ()

- A. -3 B. -1 C. 1 D. 3

7. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AC = BC = 2$ ，点 D 在 AB 的延长线上，且 $CD = AB$ ，则 BD 的长是 ()



- A. $\sqrt{10} - \sqrt{2}$ B. $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2} - 2$ D. $2\sqrt{2} - \sqrt{6}$

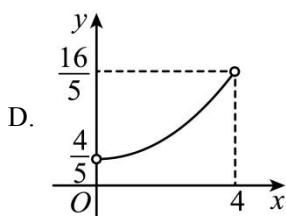
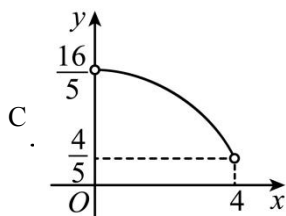
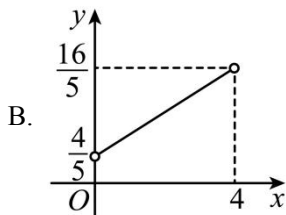
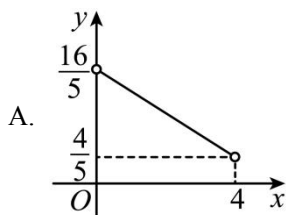
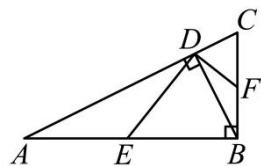
8. 已知实数 a, b 满足 $a - b + 1 = 0$ ， $0 < a + b + 1 < 1$ ，则下列判断正确的是 ()

- A. $-\frac{1}{2} < a < 0$ B. $\frac{1}{2} < b < 1$
C. $-2 < 2a + 4b < 1$ D. $-1 < 4a + 2b < 0$

9. 在凸五边形 $ABCDE$ 中， $AB = AE$ ， $BC = DE$ ， F 是 CD 的中点. 下列条件中，不能推出 AF 与 CD 一定垂直的是 ()

- A. $\angle ABC = \angle AED$ B. $\angle BAF = \angle EAF$
C. $\angle BCF = \angle EDF$ D. $\angle ABD = \angle AEC$

10. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = 4$ ， $BC = 2$ ， BD 是边 AC 上的高. 点 E, F 分别在边 AB, BC 上 (不与端点重合)，且 $DE \perp DF$. 设 $AE = x$ ，四边形 $DEBF$ 的面积为 y ，则 y 关于 x 的函数图象为 ()



二、填空题 (本大题共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分)

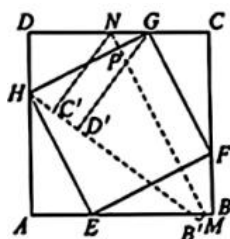
11. 若代数式 $\frac{1}{x-4}$ 有意义，则实数 x 的取值范围是_____.

12. 我国古代数学家张衡将圆周率取值为 $\sqrt{10}$ ，祖冲之给出圆周率的一种分数形式的近似值为 $\frac{22}{7}$. 比较大

小: $\sqrt{10}$ _____ $\frac{22}{7}$ (填 “>” 或 “<”).

13. 不透明的袋中装有大小质地完全相同的4个球, 其中1个黄球、1个白球和2个红球. 从袋中任取2个球, 恰为2个红球的概率是_____.

14. 如图, 现有正方形纸片 $ABCD$, 点 E, F 分别在边 AB, BC 上, 沿垂直于 EF 的直线折叠得到折痕 MN , 点 B, C 分别落在正方形所在平面内的点 B', C' 处, 然后还原.



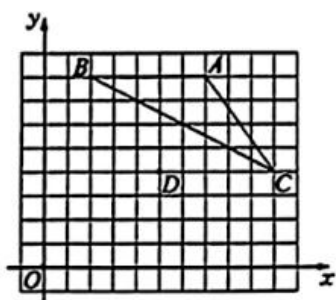
(1) 若点 N 在边 CD 上, 且 $\angle BEF = \alpha$, 则 $\angle C'NM =$ _____ (用含 α 的式子表示);

(2) 再沿垂直于 MN 的直线折叠得到折痕 GH , 点 G, H 分别在边 CD, AD 上, 点 D 落在正方形所在平面内的点 D' 处, 然后还原. 若点 D' 在线段 $B'C'$ 上, 且四边形 $EFGH$ 是正方形, $AE = 4$, $EB = 8$, MN 与 GH 的交点为 P , 则 PH 的长为_____.

三、(本大题共2小题, 每小题8分, 满分16分)

15. 解方程: $x^2 - 2x = 3$

16. 如图, 在由边长为1个单位长度的小正方形组成的网格中建立平面直角坐标系 xOy , 格点 (网格线的交点) A, B, C, D 的坐标分别为 $(7,8), (2,8), (10,4), (5,4)$.



(1) 以点 D 为旋转中心, 将 $\triangle ABC$ 旋转 180° 得到 $\triangle A_1B_1C_1$, 画出 $\triangle A_1B_1C_1$;

(2) 直接写出以 B, C_1, B_1, C 为顶点的四边形的面积;

(3) 在所给的网格图中确定一个格点 E , 使得射线 AE 平分 $\angle BAC$, 写出点 E 的坐标.

四、(本大题共2小题, 每小题8分, 满分16分)

17. 乡村振兴战略实施以来, 很多外出人员返乡创业. 某村有部分返乡青年承包了一些田地. 采用新技术种植 A, B 两种农作物. 种植这两种农作物每公顷所需人数和投入资金如表:

农作物品种	每公顷所需人数	每公顷所需投入资金（万元）
A	4	8
B	3	9

已知农作物种植人员共 24 位，且每人只参与一种农作物种植，投入资金共 60 万元. 问 A, B 这两种农作物的种植面积各多少公顷？

18. 数学兴趣小组开展探究活动，研究了“正整数 N 能否表示为 $x^2 - y^2$ (x, y 均为自然数)”的问题.

(1) 指导教师将学生的发现进行整理，部分信息如下 (n 为正整数):

N	奇数	4 的倍数
表示结果	$1 = 1^2 - 0^2$	$4 = 2^2 - 0^2$
	$3 = 2^2 - 1^2$	$8 = 3^2 - 1^2$
	$5 = 3^2 - 2^2$	$12 = 4^2 - 2^2$
	$7 = 4^2 - 3^2$	$16 = 5^2 - 3^2$
	$9 = 5^2 - 4^2$	$20 = 6^2 - 4^2$
一般结论	$2n-1 = n^2 - (n-1)^2$	$4n = \underline{\hspace{2cm}}$

按上表规律，完成下列问题:

(i) $24 = (\quad)^2 - (\quad)^2$;

(ii) $4n = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 兴趣小组还猜测: 像 2, 6, 10, 14, ... 这些形如 $4n-2$ (n 为正整数) 的正整数 N 不能表示为 $x^2 - y^2$ (x, y 均为自然数). 师生一起研讨，分析过程如下:

假设 $4n-2 = x^2 - y^2$ ，其中 x, y 均为自然数.

分下列三种情形分析：

① 若 x, y 均为偶数，设 $x = 2k, y = 2m$ ，其中 k, m 均为自然数，

则 $x^2 - y^2 = (2k)^2 - (2m)^2 = 4(k^2 - m^2)$ 为 4 的倍数.

而 $4n - 2$ 不是 4 的倍数，矛盾. 故 x, y 不可能均为偶数.

② 若 x, y 均为奇数，设 $x = 2k + 1, y = 2m + 1$ ，其中 k, m 均为自然数，

则 $x^2 - y^2 = (2k + 1)^2 - (2m + 1)^2 = \text{-----}$ 为 4 的倍数.

而 $4n - 2$ 不是 4 的倍数，矛盾. 故 x, y 不可能均为奇数.

③ 若 x, y 一个是奇数一个是偶数，则 $x^2 - y^2$ 为奇数.

而 $4n - 2$ 是偶数，矛盾. 故 x, y 不可能一个是奇数一个是偶数.

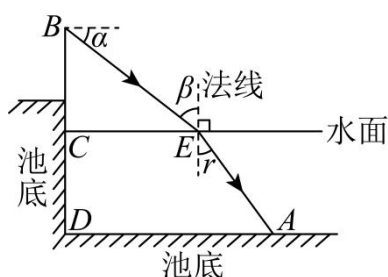
由 ①②③ 可知，猜测正确.

阅读以上内容，请在情形 ② 的横线上填写所缺内容.

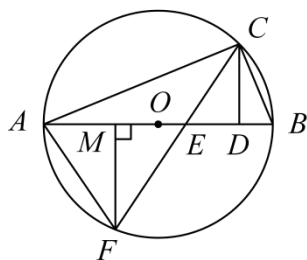
五、(本大题共 2 小题，每小题 10 分，满分 20 分)

19. 科技社团选择学校游泳池进行一次光的折射实验，如图，光线自点 B 处发出，经水面点 E 折射到池底点 A 处. 已知 BE 与水平线的夹角 $\alpha = 36.9^\circ$ ，点 B 到水面的距离 $BC = 1.20\text{m}$ ，点 A 处水深为 1.20m ，到池壁的水平距离 $AD = 2.50\text{m}$ ，点 B, C, D 在同一条竖直线上，所有点都在同一竖直平面内. 记入射角为 β ，

折射角为 γ ，求 $\frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$ 的值 (精确到 0.1，参考数据: $\sin 36.9^\circ \approx 0.60, \cos 36.9^\circ \approx 0.80, \tan 36.9^\circ \approx 0.75$).



20. 如图， $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆， D 是直径 AB 上一点， $\angle ACD$ 的平分线交 AB 于点 E ，交 $\odot O$ 于另一点 F ， $FA = FE$.



(1) 求证: $CD \perp AB$;

(2) 设 $FM \perp AB$, 垂足为 M , 若 $OM = OE = 1$, 求 AC 的长.

六、(本题满分 12 分)

21. 综合与实践

【项目背景】

无核柑橘是我省西南山区特产, 该地区某村有甲、乙两块成龄无核柑橘园. 在柑橘收获季节, 班级同学前往该村开展综合实践活动, 其中一个项目是: 在日照、土质、空气湿度等外部环境基本一致的条件下, 对两块柑橘园的优质柑橘情况进行调查统计, 为柑橘园的发展规划提供一些参考.

【数据收集与整理】

从两块柑橘园采摘的柑橘中各随机选取 200 个. 在技术人员指导下, 测量每个柑橘的直径, 作为样本数据. 柑橘直径用 x (单位: **cm**) 表示.

将所收集的样本数据进行如下分组:

组别	A	B	C	D	E
x	$3.5 \leq x < 4.5$	$4.5 \leq x < 5.5$	$5.5 \leq x < 6.5$	$6.5 \leq x < 7.5$	$7.5 \leq x \leq 8.5$

整理样本数据, 并绘制甲、乙两园样本数据的频数直方图, 部分信息如下:

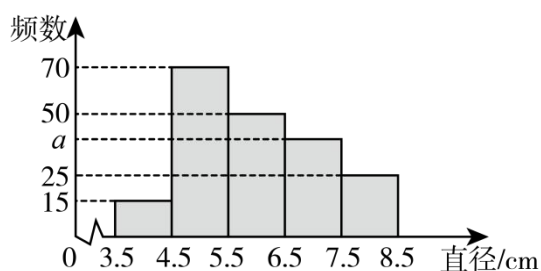


图1 甲园样本数据频数直方图

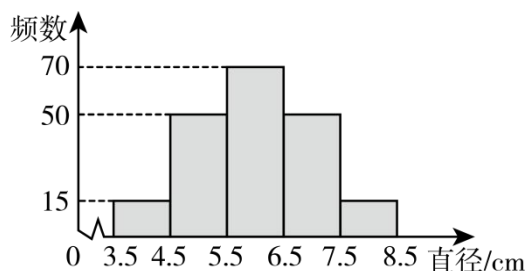


图2 甲园样本数据频数直方图

任务 1 求图 1 中 a 的值.

【数据分析与运用】

任务 2 A, B, C, D, E 五组数据的平均数分别取为 4, 5, 6, 7, 8, 计算乙园样本数据的平均数.

任务 3 下列结论一定正确的是_____ (填正确结论的序号).

①两园样本数据的中位数均在 C 组;

②两园样本数据的众数均在 C 组；

③两园样本数据的最大数与最小数的差相等.

任务 4 结合市场情况, 将 C, D 两组的柑橘认定为一级, B 组的柑橘认定为二级, 其它组的柑橘认定为三级, 其中一级柑橘的品质最优, 二级次之, 三级最次. 试估计哪个园的柑橘品质更优, 并说明理由.

根据所给信息, 请完成以上所有任务.

七、(本题满分 12 分)

22. 如图 1, $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O , 点 M, N 分别在边 AD, BC 上, 且 $AM = CN$. 点 E, F 分别是 BD 与 AN, CM 的交点.

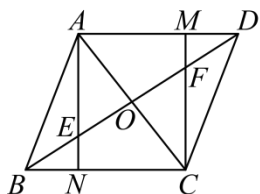


图1

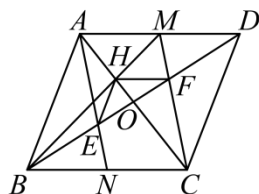


图2

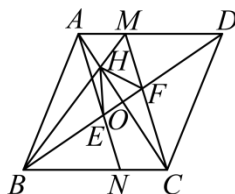


图3

(1) 求证: $OE = OF$;

(2) 连接 BM 交 AC 于点 H , 连接 HE, HF .

(i) 如图 2, 若 $HE \parallel AB$, 求证: $HF \parallel AD$;

(ii) 如图 3, 若 $ABCD$ 为菱形, 且 $MD = 2AM$, $\angle EHF = 60^\circ$, 求 $\frac{AC}{BD}$ 的值.

八、(本题满分 14 分)

23. 已知抛物线 $y = -x^2 + bx$ (b 为常数) 的顶点横坐标比抛物线 $y = -x^2 + 2x$ 的顶点横坐标大 1.

(1) 求 b 的值;

(2) 点 $A(x_1, y_1)$ 在抛物线 $y = -x^2 + 2x$ 上, 点 $B(x_1 + t, y_1 + h)$ 在抛物线 $y = -x^2 + bx$ 上.

(i) 若 $h = 3t$, 且 $x_1 \geq 0, t > 0$, 求 h 的值;

(ii) 若 $x_1 = t - 1$, 求 h 的最大值.