

凉山州 2024 年初中学业水平暨高中阶段学校招生考试试题

数学

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、座位号、准考证号用 0.5 毫米的黑色墨迹签字在答题卡上，并在答题卡背面上方填涂座位号，同时检查条形码粘贴是否正确。
2. 选择题使用 2B 铅笔涂在答题卡对应题目标号的位置上；非选择题用 0.5 毫米黑色字笔书写在答题卡对应题目标号的答题区域内，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸卷上答题无效。
3. 考试结束后，由监考教师将试题卷，答题卡，草稿纸一并收回。

本试卷共 6 页，分为 A 卷（100 分），B 卷（50 分），全卷满分 150 分，考试时间 120 分钟（A 卷又分为第 I 卷和第 II 卷）。

A 卷（共 100 分）

第 I 卷选择题（共 48 分）

一、选择题（共 12 小题，每小题 4 分，共 48 分）在每小题给出的四个选项中只有一项的，请把正确选项的字母序号填涂在答题卡上对应的位置。

1. 下列各数中： $5, -\frac{5}{7}, -3, 0, -25.8, +2$ ，负数有（ ）

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了对正数和负数定义的理解，难度不大，注意 0 既不是正数也不是负数。

根据正数和负数的定义判断即可，注意：0 既不是负数也不是正数。

【详解】解： $5 > 0$ ，是正数；

$-\frac{5}{7} < 0$ ，是负数；

$-3 < 0$ ，是负数；

0 既不是正数，也不是负数；

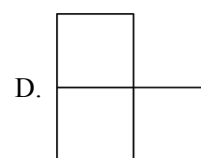
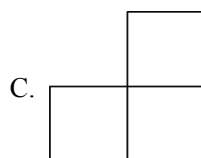
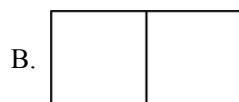
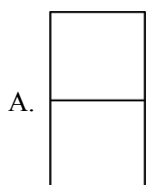
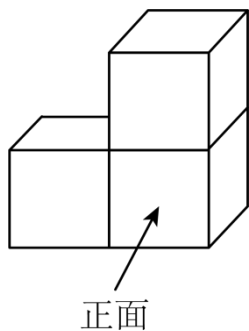
$-25.8 < 0$ ，是负数；

$+2 > 0$ ，是正数；

$\therefore$ 负数有 $-\frac{5}{7}, -3, -25.8$ ，共 3 个。

故选：C。

2. 如图，由 3 个相同的小正方体搭成的几何体的俯视图是（ ）



【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了简单组合体的三视图，俯视图是从物体的上面看得到的视图。

找到从上面看所得到的图形即可。

【详解】解：从上面可看，是一行两个相邻的正方形。

故选：B。

3. 下列运算正确的是（ ）

A. $2ab + 3ab = 5ab$

B. $(ab^2)^3 = a^3b^5$

C. $a^8 \div a^2 = a^4$

D. $a^2 \cdot a^3 = a^6$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了整式的运算，根据合并同类项法则、积的乘方、同底数幂的除法和乘法分别计算即可判断求解，掌握整式的运算法则是解题的关键。

【详解】解：A、 $2ab + 3ab = 5ab$ ，该选项正确，符合题意；

B、 $(ab^2)^3 = a^3b^6$ ，该选项错误，不合题意；

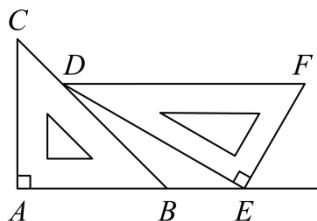
C、 $a^8 \div a^2 = a^6$ ，该选项错误，不合题意；

D、 $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ，该选项错误，不合题意；

故选：A。

4. 一副直角三角板按如图所示的方式摆放，点E在AB的延长线上，当 $DF \parallel AB$ 时， $\angle EDB$ 的度数为

()

A. 10° B. 15° C. 30° D. 45°

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查平行线的性质，三角形的外角的性质，掌握平行线的性质，是解题的关键。证明 $\angle AED = \angle FDE = 30^\circ$ ，再利用 $\angle EDB = \angle ABC - \angle AED$ ，进行求解即可。

【详解】解：由题意，得： $\angle EDF = 30^\circ$ ， $\angle ABC = 45^\circ$ ，

$\because DF \parallel AB$ ，

$\therefore \angle AED = \angle FDE = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle EDB = \angle ABC - \angle AED = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$ ；

故选 B.

5. 点 $P(a, -3)$ 关于原点对称的点是 $P'(2, b)$ ，则 $a+b$ 的值是 ()

A. 1

B. -1

C. -5

D. 5

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了关于原点对称的点的坐标特征，代数式求值，根据关于原点对称的点，横纵坐标互为相反数可得 $a = -2$ ， $b = 3$ ，再代入代数式计算即可求解，掌握关于原点对称的点的坐标特征是解题的关键。

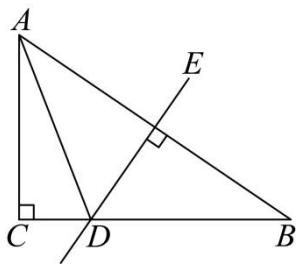
【详解】解： $\because$ 点 $P(a, -3)$ 关于原点对称的点是 $P'(2, b)$ ，

$\therefore a = -2$ ， $b = 3$ ，

$\therefore a + b = -2 + 3 = 1$ ，

故选： A .

6. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， DE 垂直平分 AB 交 BC 于点 D ，若 $\triangle ACD$ 的周长为 50 cm ，则 $AC + BC =$ ()



- A. 25 cm B. 45 cm C. 50 cm D. 55 cm

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了线段垂直平分线的性质，由线段垂直平分线的性质可得 $AD = BD$ ，进而可得 $\triangle ACD$ 的周长 $= AC + CD + AD = AC + CD + BD = AC + BC = 50\text{cm}$ ，即可求解，掌握线段垂直平分线的性质是解题的关键。

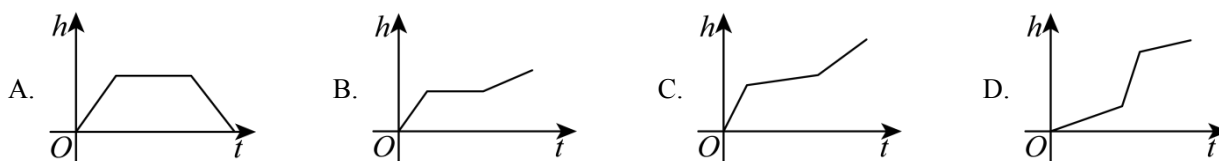
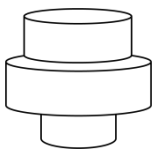
【详解】解： $\because DE$ 垂直平分 AB ，

$$\therefore AD = BD,$$

$$\therefore \triangle ACD \text{ 的周长} = AC + CD + AD = AC + CD + BD = AC + BC = 50\text{cm},$$

故选：C.

7. 匀速地向如图所示的容器内注水，直到把容器注满. 在注水过程中，容器内水面高度 h 随时间 t 变化的大致图象是（ ）



【答案】C

【解析】

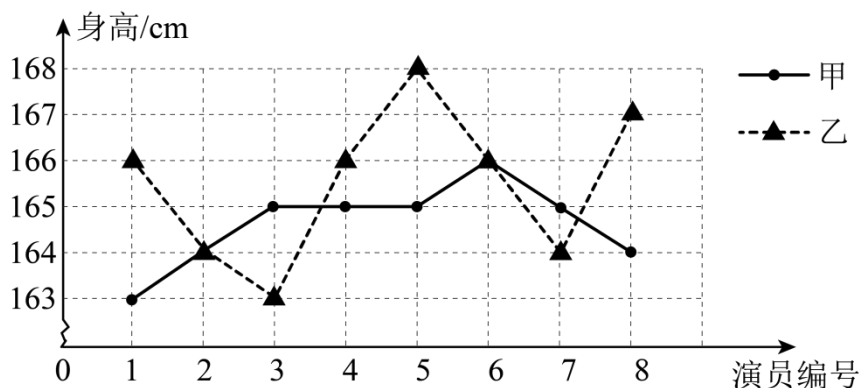
【分析】本题考查了函数图象，根据容器最下面圆柱底面积最小，中间圆柱底面积最大，最上面圆柱底面积最较大即可判断求解，正确识图是解题的关键。

【详解】解：由容器可知，最下面圆柱底面积最小，中间圆柱底面积最大，最上面圆柱底面积最较大，所以一开始水面高度 h 上升的很快，然后很慢，最后又上升的更快点，

故选：C.

8. 在一次芭蕾舞比赛中，甲、乙两个芭蕾舞团都表演了舞剧《天鹅湖》，每个团参加表演的8位女演员身高

的折线统计图如下. 则甲、乙两团女演员身高的方差 $s_{\text{甲}}^2$, $s_{\text{乙}}^2$ 大小关系正确的是 ()



- A. $s_{\text{甲}}^2 > s_{\text{乙}}^2$ B. $s_{\text{甲}}^2 < s_{\text{乙}}^2$ C. $s_{\text{甲}}^2 = s_{\text{乙}}^2$ D. 无法确定

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了方差, 根据折线统计图结合数据波动小者即可判断求解, 理解方差的意义是解题的关键.

【详解】 解: 由折线统计图可知, 甲的数据波动更小, 乙的数据波动更大, 甲比乙更稳定,

$$\therefore s_{\text{甲}}^2 < s_{\text{乙}}^2,$$

故选: B.

9. 若关于 x 的一元二次方程 $(a+2)x^2 + x + a^2 - 4 = 0$ 的一个根是 $x = 0$, 则 a 的值为 ()

- A. 2 B. -2 C. 2 或 -2 D. $\frac{1}{2}$

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程的定义和一元二次方程的解, 二次项系数不为 0. 由一元二次方程的定义, 可知 $a+2 \neq 0$; 一根是 0, 代入 $(a+2)x^2 + x + a^2 - 4 = 0$ 可得 $a^2 - 4 = 0$, 即可求答案.

【详解】 解: $(a+2)x^2 + x + a^2 - 4 = 0$ 是关于 x 的一元二次方程,

$$\therefore a+2 \neq 0, \text{ 即 } a \neq -2 \text{ ①}$$

$$\text{由一个根 } x=0, \text{ 代入 } (a+2)x^2 + x + a^2 - 4 = 0,$$

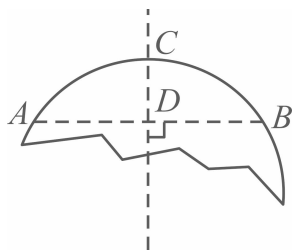
$$\text{可得 } a^2 - 4 = 0, \text{ 解之得 } a = \pm 2; \text{ ②}$$

$$\text{由 ①② 得 } a = 2;$$

故选 A

10. 数学活动课上，同学们要测一个如图所示的残缺圆形工件的半径，小明的解决方案是：在工件圆弧上任取两点 A, B ，连接 AB ，作 AB 的垂直平分线 CD 交 AB 于点 D ，交 $\widehat{AB}$ 于点 C ，测出

$AB = 40 \text{ cm}$, $CD = 10 \text{ cm}$ ，则圆形工件的半径为 ()



A. 50 cm

B. 35 cm

C. 25 cm

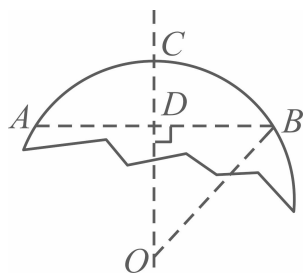
D. 20 cm

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查垂径定理，勾股定理等知识. 由垂径定理，可得出 BD 的长；设圆心为 O ，连接 OB ，在 $\text{Rt}\triangle OBD$ 中，可用半径 OB 表示出 OD 的长，进而可根据勾股定理求出得出轮子的半径，即可得出轮子的直径长.

【详解】解： $\because CD$ 是线段 AB 的垂直平分线，
 $\therefore$ 直线 CD 经过圆心，设圆心为 O ，连接 OB .



$\text{Rt}\triangle OBD$ 中， $BD = \frac{1}{2} AB = 20 \text{ cm}$ ，

根据勾股定理得：

$OD^2 + BD^2 = OB^2$ ，即：

$(OB - 10)^2 + 20^2 = OB^2$ ，

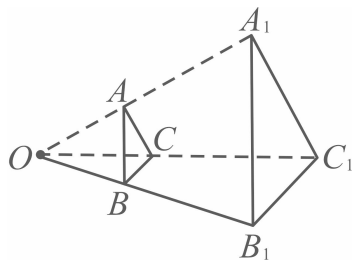
解得： $OB = 25$ ；

故轮子的半径为 25 cm ，

故选：C.

11. 如图，一块面积为 60 cm^2 的三角形硬纸板（记为 $\triangle ABC$ ）平行于投影面时，在点光源 O 的照射下形成

的投影是 $\triangle A_1B_1C_1$ ，若 $OB:BB_1 = 2:3$ ，则 $\triangle A_1B_1C_1$ 的面积是（ ）



A. 90 cm^2

B. 135 cm^2

C. 150 cm^2

D. 375 cm^2

【答案】D

【解析】

【详解】解：∵一块面积为 60 cm^2 的三角形硬纸板（记为 $\triangle ABC$ ）平行于投影面时，在点光源 O 的照射下形成的投影是 $\triangle A_1B_1C_1$ ， $OB:BB_1 = 2:3$ ，

$$\therefore \frac{OB}{OB_1} = \frac{2}{5},$$

∴位似图形由三角形硬纸板与其灯光照射下的中心投影组成，相似比为 $2:5$ ，

∴三角形硬纸板的面积为 60 cm^2 ，

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25},$$

∴ $\triangle A_1B_1C_1$ 的面积为 375 cm^2 。

故选：D.

12. 抛物线 $y = \frac{2}{3}(x-1)^2 + c$ 经过 $(-2, y_1)$, $(0, y_2)$, $\left(\frac{5}{2}, y_3\right)$ 三点，则 y_1, y_2, y_3 的大小关系正确的是

()

A. $y_1 > y_2 > y_3$

B. $y_2 > y_3 > y_1$

C. $y_3 > y_1 > y_2$

D. $y_1 > y_3 > y_2$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查二次函数的图象与性质，熟练掌握二次函数的图象与性质是解题的关键。根据二次函数的图象与性质可进行求解。

【详解】解：由抛物线 $y = \frac{2}{3}(x-1)^2 + c$ 可知：开口向上，对称轴为直线 $x=1$ ，

该二次函数上所有的点满足离对称轴的距离越近，其对应的函数值也就越小，

$$\therefore (-2, y_1), (0, y_2), \left(\frac{5}{2}, y_3\right),$$

$$\text{而 } 1 - (-2) = 3, \quad 1 - 0 = 1, \quad \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}, \quad 1 < \frac{3}{2} < 3$$

$\therefore$ 点 $(0, y_2)$ 离对称轴最近，点 $(-2, y_1)$ 离对称轴最远，

$$\therefore y_1 > y_3 > y_2;$$

故选：D.

第Ⅱ卷非选择题 (共 52 分)

二、填空题 (共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分)

13. 已知 $a^2 - b^2 = 12$ ，且 $a - b = -2$ ，则 $a + b = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -6

【解析】

【分析】本题考查了因式分解的应用，先把 $a^2 - b^2 = 12$ 的左边分解因式，再把 $a - b = -2$ 代入即可求出 $a + b$ 的值.

【详解】解： $\because a^2 - b^2 = 12$,

$$\therefore (a+b)(a-b) = 12,$$

$$\because a-b = -2,$$

$$\therefore a+b = -6.$$

故答案为：-6.

14. 方程 $\frac{2}{x-3} = \frac{3}{x}$ 的解是 $\underline{\hspace{2cm}}$

【答案】 $x=9$

【解析】

【分析】观察可得最简公分母是 $x(x-3)$ ，方程两边乘最简公分母，可以把分式方程转化为整式方程求解.

【详解】解：方程的两边同乘 $x(x-3)$ ，得

$$3x-9=2x,$$

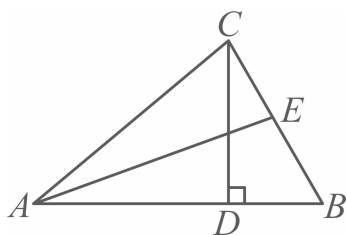
解得 $x=9$.

检验：把 $x=9$ 代入 $x(x-3) = 54 \neq 0$.

$\therefore$ 原方程的解为： $x=9$.

故答案为： $x=9$.

15. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle BCD = 30^\circ$, $\angle ACB = 80^\circ$, CD 是边 AB 上的高, AE 是 $\angle CAB$ 的平分线, 则 $\angle AEB$ 的度数是_____.



【答案】 100° ## 100 度

【解析】

【分析】 本题考查了三角形内角和以及外角性质、角平分线的定义. 先求出 $\angle ACD = 50^\circ$, 结合高的定义, 得 $\angle DAC = 40^\circ$, 因为角平分线的定义得 $\angle CAE = 20^\circ$, 运用三角形的外角性质, 即可作答.

【详解】 解: $\because \angle BCD = 30^\circ$, $\angle ACB = 80^\circ$,

$$\therefore \angle ACD = 50^\circ,$$

$\because CD$ 是边 AB 上的高,

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC = 40^\circ,$$

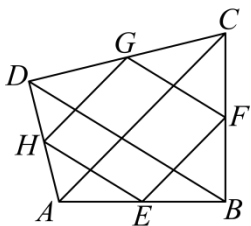
$\because AE$ 是 $\angle CAB$ 的平分线,

$$\therefore \angle CAE = \frac{1}{2} \angle DAC = 20^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle CAE + \angle ACB = 20^\circ + 80^\circ = 100^\circ.$$

故答案为: 100° .

16. 如图, 四边形 $ABCD$ 各边中点分别是 E, F, G, H , 若对角线 $AC = 24$, $BD = 18$, 则四边形 $EFGH$ 的周长是_____.



【答案】 42

【解析】

【分析】 本题考查的是中点四边形, 熟记三角形中位线定理是解题的关键.

根据三角形中位线定理分别求出 EF 、 FG 、 GH 、 HE , 根据四边形的周长公式计算, 得到答案.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 各边中点分别是 E 、 F 、 G 、 H ,

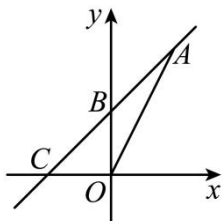
$\therefore EF$ 、 FG 、 GH 、 HE 分别为 $\triangle ABC$ 、 $\triangle BCD$ 、 $\triangle ADC$ 、 $\triangle ABD$ 的中位线，

$$\therefore EF = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 24 = 12, \quad GH = \frac{1}{2}AC = 12, \quad FG = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 18 = 9, \quad HE = \frac{1}{2}BD = 9,$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 的周长为： $12 + 9 + 12 + 9 = 42$ ，

故答案为：42.

17. 如图，一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过 $A(3, 6)$ 、 $B(0, 3)$ 两点，交 x 轴于点 C ，则 $\triangle AOC$ 的面积为_____.



【答案】9

【解析】

【分析】本题考查了一次函数图象上点的坐标特征、待定系数法求一次函数解析式以及三角形的面积. 根据点 A 、 B 的坐标，利用待定系数法可求出直线 AB 的解析式，得出点 C 的坐标及 OC 的长，再利用三角形的面积公式即可求出 $\triangle AOC$ 的面积.

【详解】解：将 $A(3, 6)$ 、 $B(0, 3)$ 代入 $y = kx + b$ ，得：

$$\begin{cases} 3k + b = 6 \\ b = 3 \end{cases},$$

解得：

$$\begin{cases} k = 1 \\ b = 3 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AB 的解析式为 $y = x + 3$.

当 $y = 0$ 时， $x + 3 = 0$ ，解得： $x = -3$ ，

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(-3, 0)$ ， $OC = 3$ ，

$$\therefore S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2}OC \cdot |y_A| = \frac{1}{2} \times 3 \times 6 = 9.$$

故答案为：9.

三、解答题（共 5 小题，共 32 分）解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

18. 计算： $\frac{1}{\sqrt{3}-1} + |2-\sqrt{3}| + 2^{-1} + \cos 30^\circ - (-1)^0$.

【答案】2

【解析】

【分析】本题考查了实数的混合运算. 分别进行零指数幂、负整数指数幂、二次根式及绝对值的运算，然

后代入特殊角的三角函数值代入运算即可.

$$\begin{aligned}
 \text{【详解】解: } & \frac{1}{\sqrt{3}-1} + |2-\sqrt{3}| + 2^{-1} + \cos 30^\circ - (-1)^0 \\
 &= \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} + 2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \\
 &= \frac{\sqrt{3}+1}{2} + 2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \\
 &= 2.
 \end{aligned}$$

19. 求不等式 $-3 < 4x - 7 \leq 9$ 的整数解.

【答案】 2, 3, 4

【解析】

【分析】 本题考查了解一元一次不等式组，熟练掌握知识点是解题的关键.

先将 $-3 < 4x - 7 \leq 9$ 变形为 $\begin{cases} -3 < 4x - 7 \\ 4x - 7 \leq 9 \end{cases}$ ，再解每一个不等式，取解集的公共部分作为不等式组的解集，再找出其中的整数解即可.

$$\text{【详解】解: 由题意得 } \begin{cases} -3 < 4x - 7 \text{ ①} \\ 4x - 7 \leq 9 \text{ ②} \end{cases},$$

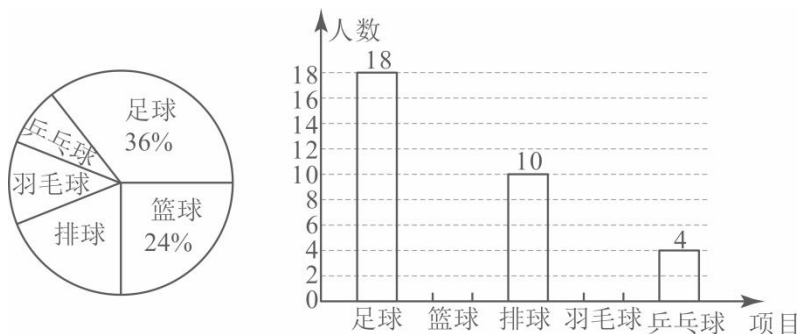
解①得: $x > 1$,

解②得: $x \leq 4$,

$\therefore$ 该不等式组的解集为: $1 < x \leq 4$,

$\therefore$ 整数解为: 2, 3, 4

20. 为保证每位同学在学校组织的课外体育活动中，都能参与自己最喜欢的球类项目，学校体育社团随机抽取部分同学进行“最喜欢的球类项目”的调查（每人只能选择一项），根据调查结果绘制成以下两幅不完整的统计图：



请根据统计图回答下列问题:

- (1) 本次调查的总人数是_____人, 估计全校1500 名学生中最喜欢乒乓球项目的约有_____人;
- (2) 补全条形统计图;
- (3) 学校体育社团为了制订训练计划, 将从最喜欢篮球项目的甲、乙、丙、丁四名同学中任选两名进行个别访谈, 请用列表法或画树状图法求抽取的两人恰好是甲和乙的概率.

【答案】(1) 50, 120;

(2) 补图见解析; (3) $\frac{1}{6}$.

【解析】

【分析】(1) 用最喜欢足球的学生人数除以其百分比可求出调查的总人数, 用1500 乘以最喜欢乒乓球项目的百分比可求出最喜欢乒乓球项目的学生人数;

(2) 求出最喜欢篮球项目的学生人数和最喜欢羽毛球项目的学生人数, 即可补全条形统计图;

(3) 画出树状图, 根据树状图即可求解;

本题考查了条形统计图和扇形统计图, 样本估计总体, 用树状图或列表法求概率, 看懂统计图及正确画出树状图是解题的关键.

【小问 1 详解】

解: 本次调查的总人数是 $18 \div 36\% = 50$ 人,

估计全校1500 名学生中最喜欢乒乓球项目的约有 $1500 \times \frac{4}{50} = 120$ 人,

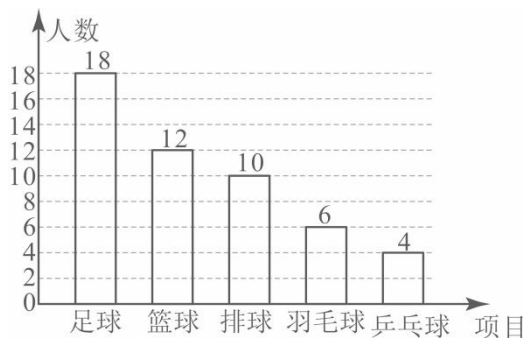
故答案为: 50, 120;

【小问 2 详解】

解: 最喜欢篮球项目的学生有 $50 \times 24\% = 12$ 人,

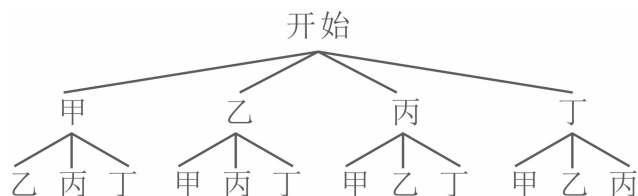
$\therefore$ 最喜欢羽毛球项目的学生有 $50 - 18 - 12 - 10 - 4 = 6$ 人,

$\therefore$ 补全条形统计图如下:



【小问 3 详解】

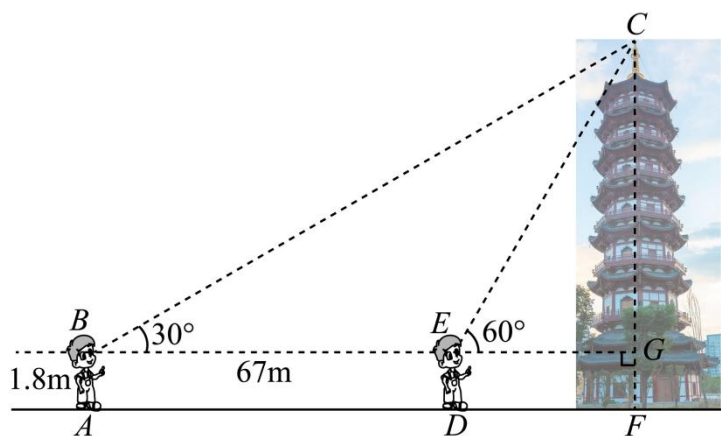
解：画树状图如下：



由树状图可知，共有12种等结果，其中抽取的两人恰好是甲和乙的结果有2种，

$$\therefore \text{抽取的两人恰好是甲和乙的概率为 } \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

21. 为建设全域旅游西昌，加快旅游产业发展，2022年9月29日位于西昌主城区东部的历史风貌核心区唐园正式开园，坐落于唐园内的怀远塔乃唐园至高点，为七层密檐式八角砖混结构阁楼式塔楼，建筑面积为1845.4平方米，塔顶金碧辉煌，为“火珠垂莲”窠（sū）堵坡造型。某校为了让学生进一步了解怀远塔，组织九年级（2）班学生利用综合实践课测量怀远塔的高度。小江同学站在如图所示的怀远塔前的平地上A点处，测得塔顶C的仰角为 30° ，眼睛B距离地面1.8m，向塔前行67m，到达点D处，测得塔顶C的仰角为 60° ，求塔高CF。（参考数据： $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{3} \approx 1.732$ ，结果精确到0.01m）



【答案】59.83m.

【解析】

【分析】本题考查了解直角三角形的应用-仰角俯角问题，设 $CG = xm$ ，解直角三角形得到

$$BG = \frac{CG}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}x, \quad EG = \frac{CG}{\tan 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}x, \quad \text{再根据 } BG - EG = BE \text{ 可得 } \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}x = 67, \text{ 解方程求}$$

出 x 即可求解，正确解直角三角形是解题的关键.

【详解】解：由题意可得， $\angle CBG = 30^\circ$ ， $\angle CEG = 60^\circ$ ， $BE = AD = 67\text{m}$ ， $AB = DE = FG = 1.8\text{m}$ ，
设 $CG = xm$ ，

$$\text{在 Rt}\triangle CBG \text{ 中, } BG = \frac{CG}{\tan 30^\circ} = \frac{x}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle CEG \text{ 中, } EG = \frac{CG}{\tan 60^\circ} = \frac{x}{\tan 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}x,$$

$$\therefore BG - EG = BE,$$

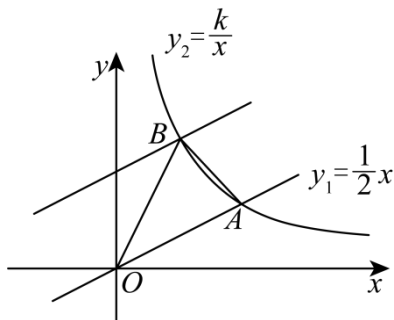
$$\therefore \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}x = 67,$$

解得 $x \approx 58.03$ ，

$$\therefore CF = CG + FG = 58.03 + 1.8 = 59.83\text{m},$$

答：塔高 CF 为 59.83m 。

22. 如图，正比例函数 $y_1 = \frac{1}{2}x$ 与反比例函数 $y_2 = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象交于点 $A(m, 2)$ 。



(1) 求反比例函数的解析式；

(2) 把直线 $y_1 = \frac{1}{2}x$ 向上平移 3 个单位长度与 $y_2 = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象交于点 B ，连接 AB, OB ，求 $\triangle AOB$ 的面积。

【答案】(1) $y_2 = \frac{8}{x}$

(2) 6

【解析】

【分析】本题考查了一次函数与反比例函数的交点问题，待定系数法求函数解析式，一次函数的平移等知识，熟练掌握函数的平移法则是关键。

(1) 待定系数法求出反比例函数解析式即可；

(2) 先得到平移后直线解析式，联立方程组求出点 B 坐标，根据平行线间的距离可得 $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle ADO}$ ，代入数据计算即可。

【小问 1 详解】

解：∵点 $A(m, 2)$ 在正比例函数图象上，

$$\therefore 2 = \frac{1}{2}m, \text{ 解得 } m = 4,$$

$$\therefore A(4, 2),$$

∵ $A(4, 2)$ 在反比例函数图象上，

$$\therefore k = 8,$$

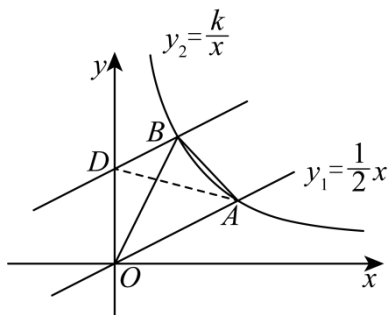
$$\therefore \text{反比例函数解析式为 } y_2 = \frac{8}{x}.$$

【小问 2 详解】

解：把直线 $y_1 = \frac{1}{2}x$ 向上平移 3 个单位得到解析式为 $y = \frac{1}{2}x + 3$,

令 $x = 0$ ，则 $y = 3$ ，

∴记直线与 y 轴交点坐标为 $D(0, 3)$ ，连接 AD ，



$$\text{联立方程组 } \begin{cases} y = \frac{8}{x} \\ y = \frac{1}{2}x + 3 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}, \begin{cases} x = -8 \\ y = -1 \end{cases} \text{ (舍去),}$$

$$\therefore B(2, 4),$$

由题意得： $BD \parallel AO$ ，

∴ $\triangle AOB$ ， $\triangle AOD$ 同底等高，

$$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle ADO} = \frac{1}{2}OD \cdot x_A = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6.$$

B 卷 (共 50 分)

四、填空题 (共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分)

23. 已知 $y^2 - x = 0$, $x^2 - 3y^2 + x - 3 = 0$, 则 x 的值为_____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程，熟练掌握解一元二次方程的方法是解题的关键.

将 $y^2 = x$ 代入 $x^2 - 3y^2 + x - 3 = 0$, 转化为解一元二次方程, $y^2 = x \geq 0$, 要进行舍解.

【详解】 解: $\because y^2 - x = 0$,

$$\therefore y^2 = x,$$

将 $y^2 = x$ 代入 $x^2 - 3y^2 + x - 3 = 0$

$$\text{得, } x^2 - 3x + x - 3 = 0,$$

$$\text{即: } x^2 - 2x - 3 = 0,$$

$$(x-3)(x+1) = 0,$$

$$\therefore x = 3 \text{ 或 } x = -1,$$

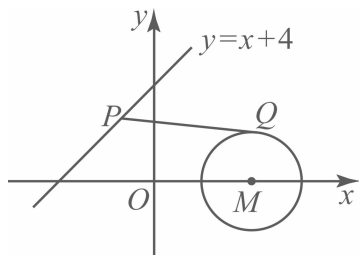
$$\because y^2 = x \geq 0,$$

$$\therefore x = -1 \text{ 舍,}$$

$$\therefore x = 3,$$

故答案为: 3.

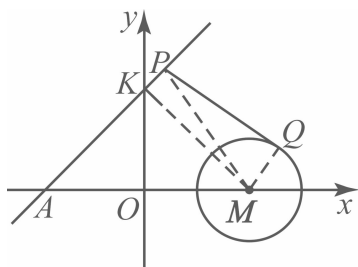
24. 如图, $\odot M$ 的圆心为 $M(4,0)$, 半径为 2, P 是直线 $y = x + 4$ 上的一个动点, 过点 P 作 $\odot M$ 的切线, 切点为 Q , 则 PQ 的最小值为_____



【答案】 $2\sqrt{7}$

【解析】

【详解】 解: 记直线 $y = x + 4$ 与 x , y 轴分别交于点 A , K , 连接 QM, PM, KM ,



当 $x=0$, $y=4$, 当 $y=0$, 即 $x+4=0$,

解得: $x=-4$,

而 $M(4,0)$

$\therefore OA=OK=OM=4$,

$\therefore \triangle OAK, \triangle OKM$ 均是等腰直角三角形,

$\therefore \angle AKO = \angle MKO = 45^\circ$,

$\therefore \angle AKM = 90^\circ$,

$\because QP$ 与 $\odot M$ 相切,

$\therefore \angle PQM = 90^\circ$,

$\therefore PQ = \sqrt{PM^2 - QM^2}$,

$\because QM = 2$,

$\therefore$ 当 PQ 最小时即 PM 最小,

$\therefore$ 当 $PM \perp AK$ 时, 取得最小值,

即点 P 与点 K 重合, 此时 PM 最小值为 KM ,

在 $\text{Rt}\triangle OKM$ 中, 由勾股定理得: $KM = \sqrt{OM^2 + OK^2} = 4\sqrt{2}$,

$\therefore PQ = \sqrt{32 - 4} = 2\sqrt{7}$,

$\therefore PQ$ 最小值为 $2\sqrt{7}$.

【点睛】 本题考查了圆的切线的性质, 勾股定理, 一次函数与坐标轴的交点问题, 垂线段最短, 正确添加辅助线是解题的关键.

五、解答题 (共 4 小题, 共 40 分)

25. 阅读下面材料, 并解决相关问题:

下图是一个三角点阵, 从上向下数有无数多行, 其中第一行有 1 个点, 第二行有 2 个点……第 n 行有 n 个点……



容易发现，三角点阵中前 4 行的点数之和为 10.

(1) 探索：三角点阵中前 8 行的点数之和为____，前 15 行的点数之和为____，那么，前 n 行的点数之和为____

(2) 体验：三角点阵中前 n 行的点数之和____ (填“能”或“不能”) 为 500.

(3) 运用：某广场要摆放若干种造型的盆景，其中一种造型要用 420 盆同样规格的花，按照第一排 2 盆，第二排 4 盆，第三排 6 盆……第 n 排 $2n$ 盆的规律摆放而成，则一共能摆放多少排？

【答案】(1) 36; 120; $\frac{1}{2}n(n+1)$

(2) 不能 (3) 一共能摆放 20 排.

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的应用，找准等量关系，正确列出一元二次方程是解题的关键.

(1) 根据图形，总结规律，列式计算即可求解；

(2) 根据前 n 行的点数和是 500，即可得出关于 n 的一元二次方程，解之即可判断；

(2) 先得到前 n 行的点数和是 $n(n+1)$ ，再根据题意得出关于 n 的一元二次方程，解之即可得出 n 的值.

【小问 1 详解】

解：三角点阵中前 8 行的点数之和为 $1+2+3+4+5+6+7+8 = \frac{1}{2}(1+8) \times 8 = 36$,

前 15 行的点数之和为 $1+2+3+\cdots+14+15 = \frac{1}{2}(1+15) \times 15 = 120$,

那么，前 n 行的点数之和为 $1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}(1+n) \times n = \frac{1}{2}n(n+1)$;

故答案为：36; 120; $\frac{1}{2}n(n+1)$;

【小问 2 详解】

解：不能，

理由如下：

由题意得 $\frac{1}{2}n(n+1) = 500$,

得 $n^2 + n - 1000 = 0$,

$\Delta = 1^2 - 4 \times (-1000) = 4001$,

∴此方程无正整数解，

所以三角点阵中前 n 行的点数和不能是 500；

故答案为：不能；

【小问 3 详解】

解：同理，前 n 行的点数之和为 $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = 2 \times \frac{1}{2}(1+n) \times n = n(n+1)$ ，

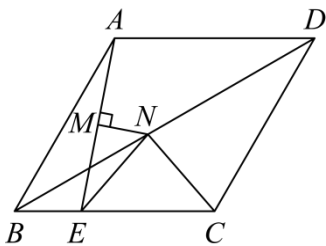
由题意得 $n(n+1) = 420$ ，

得 $n^2 + n - 420 = 0$ ，即 $(n+21)(n-20) = 0$ ，

解得 $n = 20$ 或 $n = -21$ （舍去），

∴一共能摆放 20 排.

26. 如图，在菱形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $AB = 2$ ， E 是 BC 边上一个动点，连接 AE ， AE 的垂直平分线 MN 交 AE 于点 M ，交 BD 于点 N ，连接 EN, CN 。



(1) 求证： $EN = CN$ ；

(2) 求 $2EN + BN$ 的最小值.

【答案】(1) 见详解 (2) $2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 根据菱形的性质证明 $\triangle ABN \cong \triangle CBN$ ，再结合 MN 是 AE 的垂直平分线，即可证明 $EN = CN$ ；

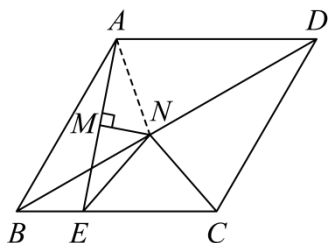
(2) 过点 N 作 $NF \perp BC$ 于点 F ，连接 NF, AF ， $\angle DBC = 30^\circ$ ，则 $NF = \frac{1}{2}BN$ ，故

$2EN + BN = 2\left(EN + \frac{1}{2}BN\right) = 2(AN + NF) \geq 2AF$ ，此时 $AF \perp BC$ ，在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中，进行解直角三

角形即可.

【小问 1 详解】

证明：连接 AN ，



∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore \angle ABD = \angle CBD = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ, \quad BA = BC,$$

$$\therefore BN = BN,$$

$$\therefore \triangle ABN \cong \triangle CBN,$$

$$\therefore AN = CN,$$

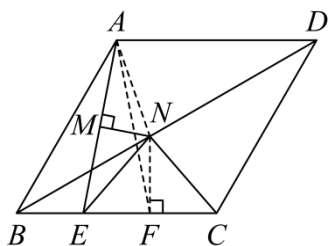
∵ MN 是 AE 的垂直平分线,

$$\therefore AN = NE,$$

$$\therefore EN = CN;$$

【小问 2 详解】

解: 过点 N 作 $NF \perp BC$ 于点 F , 连接 NF, AF ,



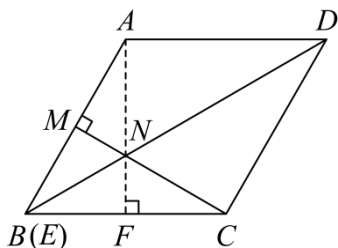
$$\therefore \angle DBC = 30^\circ,$$

$$\therefore NF = \frac{1}{2} BN,$$

$$\therefore AN = EN,$$

$$\therefore 2EN + BN = 2 \left(EN + \frac{1}{2} BN \right) = 2(AN + NF) \geq 2AF,$$

当点 A, N, F 三点共线时, 取得最小值, 如图:



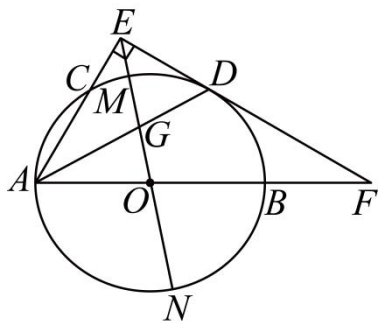
即 $AF \perp BC$,

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ABF \text{ 中, } AF = AB \cdot \sin ABC = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore 2EN + BN \text{ 的最小值为 } 2\sqrt{3}.$$

【点睛】本题考查了菱形的性质，垂直平分线的性质，全等三角形的判定与性质，垂线段最短，解直角三角形，正确添加辅助线是解决本题的关键.

27. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C 在 $\odot O$ 上， AD 平分 $\angle BAC$ 交 $\odot O$ 于点 D ，过点 D 的直线 $DE \perp AC$ ，交 AC 的延长线于点 E ，交 AB 的延长线于点 F .



(1) 求证： EF 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 连接 EO 并延长，分别交 $\odot O$ 于 M, N 两点，交 AD 于点 G ，若 $\odot O$ 的半径为 2， $\angle F = 30^\circ$ ，求 $GM \cdot GN$ 的值.

【答案】(1) 见详解 (2) $\frac{72}{25}$

【解析】

【分析】(1) 连接 OD ，根据等腰三角形的性质及角平分线得到 $OD \parallel AC$ ，根据平行线的性质得 $\angle ODF = 90^\circ$ ，即可证明；

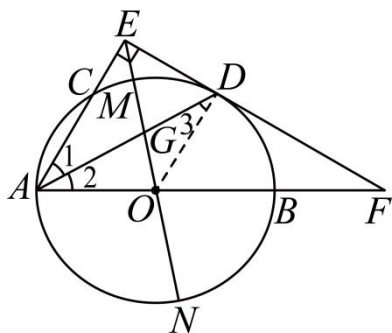
(2) 连接 MD, AN ，先解 $\text{Rt}\triangle ODF$ ，求得 $OF = 4$ ， $DF = 2\sqrt{3}$ ，则 $AF = 6$ ， $AE = 3$ ，可证明

$AD = DF = 2\sqrt{3}$ ，由 $\triangle DGO \sim \triangle AGE$ ，得 $\frac{DG}{AG} = \frac{OD}{AE} = \frac{2}{3}$ ，故 $DG = \frac{2}{5}AD$ ， $AG = \frac{3}{5}AD$ ，证明

$\triangle MGD \sim \triangle AGN$ ，即可得到 $GM \cdot GN = GD \cdot GA = \frac{72}{25}$.

【小问 1 详解】

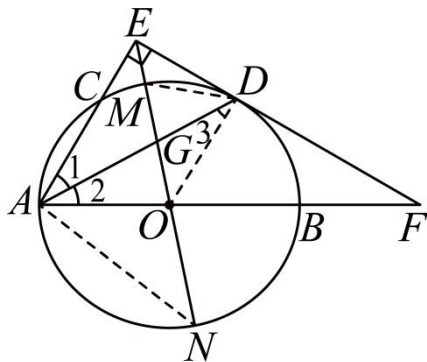
解：连接 OD ，



$\because OA = OD,$
 $\therefore \angle 2 = \angle 3,$
 $\because AD \text{ 平分 } \angle BAC,$
 $\therefore \angle 1 = \angle 2,$
 $\therefore \angle 1 = \angle 3,$
 $\therefore OD \parallel AC,$
 $\therefore \angle ODF = \angle AED$
 $\because DE \perp AC,$
 $\therefore \angle AED = 90^\circ,$
 $\therefore \angle ODF = 90^\circ,$
 即 $OD \perp EF,$
 $\because OD$ 是 $\odot O$ 的半径
 $\therefore EF$ 是 $\odot O$ 的切线;

【小问 2 详解】

解：连接 $MD, AN,$



$\because \angle F = 30^\circ,$
 $\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ODF$ 中, $OF = 2OD = 4,$
 由勾股定理得: $DF = \sqrt{OF^2 - OD^2} = 2\sqrt{3}$

$$\therefore AF = 2 + 4 = 6,$$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 中, $\angle F = 30^\circ$,

$$\therefore AE = \frac{1}{2}AF = 3,$$

$\therefore \angle F = 30^\circ$, $OD \perp EF$

$$\therefore \angle DOF = 60^\circ = \angle 2 + \angle 3, \text{ 而 } \angle 2 = \angle 3,$$

$$\therefore \angle 2 = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle F,$$

$$\therefore AD = DF = 2\sqrt{3},$$

$\therefore OD \parallel AE$,

$\therefore \triangle DGO \sim \triangle AGE$,

$$\therefore \frac{DG}{AG} = \frac{OD}{AE} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore DG = \frac{2}{5}AD, AG = \frac{3}{5}AD,$$

$\therefore \overline{AM} = \overline{AM}$,

$$\therefore \angle ANG = \angle MDG,$$

$$\therefore \angle MGD = \angle AGN,$$

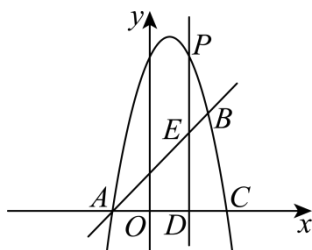
$\therefore \triangle MGD \sim \triangle AGN$,

$$\therefore \frac{MG}{AG} = \frac{GD}{GN},$$

$$\therefore GM \cdot GN = GD \cdot GA = \frac{2}{5}AD \cdot \frac{3}{5}AD = \frac{6}{25}AD^2 = \frac{6}{25} \times (2\sqrt{3})^2 = \frac{72}{25}.$$

【点睛】本题考查了圆的切线的判定，相似三角形的判定与性质，勾股定理， 30° 的直角三角形的性质，等腰三角形的性质，正确添加辅助线是解题的关键。

28. 如图，抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与直线 $y = x + 2$ 相交于 $A(-2, 0)$, $B(3, m)$ 两点，与 x 轴相交于另一点 C .



(1) 求抛物线的解析式；

(2) 点 P 是直线 AB 上方抛物线上的一个动点 (不与 A, B 重合), 过点 P 作直线 $PD \perp x$ 轴于点 D , 交直线 AB 于点 E , 当 $PE = 2ED$ 时, 求 P 点坐标;

(3) 抛物线上是否存在点 M 使 $\triangle ABM$ 的面积等于 $\triangle ABC$ 面积的一半? 若存在, 请直接写出点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) 抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 8$

(2) P 的坐标为 $(1, 9)$

(3) M 的坐标为 $(\frac{1+\sqrt{13}}{2}, \frac{11+\sqrt{13}}{2})$ 或 $(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{11-\sqrt{13}}{2})$ 或 $(\frac{1+\sqrt{37}}{2}, \frac{-1+\sqrt{37}}{2})$ 或 $(\frac{1-\sqrt{37}}{2}, \frac{-1-\sqrt{37}}{2})$

【解析】

【分析】(1) 把 $B(3, m)$ 代入 $y = x + 2$ 求出 $B(3, 5)$, 再用待定系数法可得抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 8$;

(2) 设 $P(t, -t^2 + 2t + 8)$, 则 $E(t, t + 2)$, $D(t, 0)$, 由 $PE = 2DE$, 可得 $-t^2 + 2t + 8 - (t + 2) = 2(t + 2)$, 解出 t 的值可得 P 的坐标为 $(1, 9)$;

(3) 过 M 作 $MK \parallel y$ 轴交直线 AB 于 K , 求出 $C(4, 0)$, 知 $AC = 6$, 故 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 5 = 15$, 设 $M(m, -m^2 + 2m + 8)$, 则 $K(m, m + 2)$, 可得 $MK = |-m^2 + 2m + 8 - (m + 2)| = |-m^2 + m + 6|$, $S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} MK \cdot |x_B - x_A| = \frac{1}{2} |-m^2 + m + 6| \times 5 = \frac{5}{2} |-m^2 + m + 6|$, 根据 $\triangle ABM$ 的面积等于 $\triangle ABC$ 面积的一半, 有 $\frac{5}{2} |-m^2 + m + 6| = \frac{1}{2} \times 15$, 可得 $|-m^2 + m + 6| = 3$, 即 $-m^2 + m + 6 = 3$ 或 $-m^2 + m + 6 = -3$, 解出 m 的值可得答案.

【小问 1 详解】

解: 把 $B(3, m)$ 代入 $y = x + 2$ 得: $m = 3 + 2 = 5$,

$\therefore B(3, 5)$,

把 $A(-2, 0)$, $B(3, 5)$ 代入 $y = -x^2 + bx + c$ 得:

$$\begin{cases} -4 - 2b + c = 0 \\ -9 + 3b + c = 5 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} b = 2 \\ c = 8 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 8$;

【小问 2 详解】

解：设 $P(t, -t^2 + 2t + 8)$ ，则 $E(t, t + 2)$ ， $D(t, 0)$ ，

$$\because PE = 2DE,$$

$$\therefore -t^2 + 2t + 8 - (t + 2) = 2(t + 2),$$

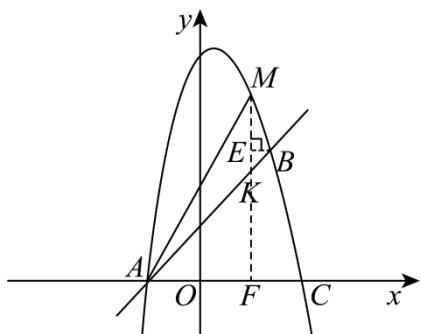
解得 $t = 1$ 或 $t = -2$ （此时 P 不在直线 AB 上方，舍去）；

$\therefore P$ 的坐标为 $(1, 9)$ ；

【小问 3 详解】

解：抛物线上存在点 M ，使 $\triangle ABM$ 的面积等于 $\triangle ABC$ 面积的一半，理由如下：

过 M 作 $MK \parallel y$ 轴交直线 AB 于 K ，过点 B 作 $BE \perp MK$ ，延长 MK 交 x 轴于点 F ，如图：



在 $y = -x^2 + 2x + 8$ 中，令 $y = 0$ 得 $0 = -x^2 + 2x + 8$ ，

解得 $x = -2$ 或 $x = 4$ ，

$$\therefore A(-2, 0), C(4, 0),$$

$$\therefore AC = 6,$$

$$\because B(3, 5),$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 5 = 15,$$

设 $M(m, -m^2 + 2m + 8)$ ，则 $K(m, m + 2)$ ，

$$\therefore MK = |-m^2 + 2m + 8 - (m + 2)| = |-m^2 + m + 6|,$$

$$\because S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} MK \cdot BE + \frac{1}{2} MK \cdot AF = \frac{1}{2} MK (BE + AF) = \frac{1}{2} MK \cdot |x_B - x_A|$$

$$\therefore S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} MK \cdot |x_B - x_A| = \frac{1}{2} |-m^2 + m + 6| \times 5 = \frac{5}{2} |-m^2 + m + 6|,$$

$\because \triangle ABM$ 的面积等于 $\triangle ABC$ 面积的一半，

$$\therefore \frac{5}{2} |-m^2 + m + 6| = \frac{1}{2} \times 15,$$

$$\therefore |-m^2 + m + 6| = 3,$$

$$\therefore -m^2 + m + 6 = 3 \text{ 或 } -m^2 + m + 6 = -3,$$

$$\text{解得 } m = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \text{ 或 } m = \frac{1 \pm \sqrt{37}}{2},$$

$$\therefore M \text{ 的坐标为 } \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}, \frac{11+\sqrt{13}}{2}\right) \text{ 或 } \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{11-\sqrt{13}}{2}\right) \text{ 或 } \left(\frac{1+\sqrt{37}}{2}, \frac{-1+\sqrt{37}}{2}\right) \text{ 或 } \left(\frac{1-\sqrt{37}}{2}, \frac{-1-\sqrt{37}}{2}\right).$$

【点睛】 本题考查二次函数的图像与性质，涉及待定系数法求函数解析式，抛物线与坐标轴交点问题，解一元二次方程，三角形面积等知识，解题的关键是用含字母的式子表示相关点坐标和相关线段的长度.