

2023 湖南省衡阳市中考数学

一、选择题（本大题共 12 个小题，每小题 3 分，满分 36 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．）

1. 中国是最早采用正负数表示相反意义的量、并进行负数运算的国家．若收入 500 元记作 +500 元，则支出 237 元记作（ ）

- A. +237 元 B. -237 元 C. 0 元 D. -474 元

【答案】B

【解析】

【分析】根据相反意义的量的意义解答即可．

【详解】 $\because$ 收入 500 元记作 +500 元，

$\therefore$ 支出 237 元记作 -237 元，

故选 B．

【点睛】本题考查了相反意义的量，正确理解定义是解题的关键．

2. 下列长度的各组线段能组成一个三角形的是（ ）

- A. 1cm, 2cm, 3cm B. 3cm, 8cm, 5cm
C. 4cm, 5cm, 10cm D. 4cm, 5cm, 6cm

【答案】D

【解析】

【分析】根据两边之和大于第三边，两边之差小于第三边判断即可．

【详解】A. $1\text{cm} + 2\text{cm} = 3\text{cm}$ ，不符合题意；

B. $3\text{cm} + 5\text{cm} = 8\text{cm}$ ，不符合题意；

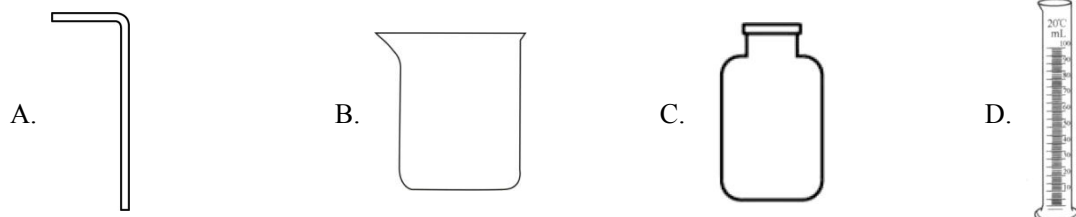
C. $4\text{cm} + 5\text{cm} = 9\text{cm} < 10\text{cm}$ ，不符合题意；

D. $4\text{cm} + 5\text{cm} = 9\text{cm} > 6\text{cm}$ ，符合题意，

故选 D．

【点睛】本题考查了是否构成三角形，熟练掌握三角形两边之和大于第三边是解题的关键．

3. 下面四种化学仪器的示意图是轴对称图形的是（ ）



【答案】C

【解析】

【分析】根据轴对称图形的概念对各选项分析判断即可得解.

【详解】解：A. 不是轴对称图形，故本选项不合题意；

B. 不是轴对称图形，故本选项不符合题意；

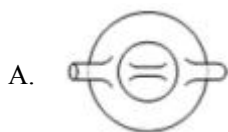
C. 是轴对称图形，故本选项合题意；

D. 不是轴对称图形，故本选项不合题意.

故选：C.

【点睛】本题考查了轴对称图形的概念，轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合.

4. 作为中国非物质文化遗产之一的紫砂壶，成型工艺特别，造型式样丰富，陶器色泽古朴典雅，从一个方面鲜明地反映了中华民族造型审美意识. 如图是一把做工精湛的紫砂壶“景舟石瓢”，下面四幅图是从左面看到的图形的是（ ）



【答案】B

【解析】

【分析】根据左视图定义从左向右看得到的图形，从左面看看到壶嘴，画的全身，看不见弧把手，对各选项进行分析判断即可.

【详解】A.  是从上向下看得到的图形为俯视图，故选项 A 不合题意；

B.  是从左向右看得到的图形为左视图，故选项 B 符合题意；

C.  是从下往上看得到的图形是仰视图，故选项 C 不合题意；

D.  是从前往后看得到的图形是主视图，故选项 D 不合题意.

故选择 B.

【点睛】本题考查物体的三视图，掌握三视图的定义是解题关键.

5. 计算 $\left(\frac{1}{2}x^3\right)^2$ 的结果正确的是 ()

- A. x^6 B. $\frac{1}{4}x^6$ C. $\frac{1}{4}x^5$ D. x^9

【答案】B

【解析】

【分析】运用积的乘方法则、幂的乘方法则即可得出结果.

【详解】解： $\left(\frac{1}{2}x^3\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 (x^3)^2 = \frac{1}{4}x^6$,

故选：B.

【点睛】本题考查了积的乘方法则、幂的乘方法则，熟练运用积的乘方法则、幂的乘方法则是解题的关键.

6. 据共青团中央 2023 年 5 月 3 日发布的中国共青团团内统计公报，截至 2022 年 12 月底，全国共有共青团员 7358 万. 数据 7358 万用科学记数法表示为 ()

- A. 7.358×10^7 B. 7.358×10^3 C. 7358×10^4 D. 7.358×10^6

【答案】A

【解析】

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 ≥ 10 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数. 据此可得出结果.

【详解】7358 万 $= 73580000 = 7.358 \times 10^7$,

故选：A.

【点睛】此题主要考查科学记数法的表示方法. 正确确定 a 的值以及 n 的值是本题的关键.

7. 对于二次根式的乘法运算，一般地，有 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$. 该运算法则成立的条件是 ()

- A. $a > 0, b > 0$ B. $a < 0, b < 0$ C. $a \leq 0, b \leq 0$ D. $a \geq 0, b \geq 0$

【答案】D

【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件得出不等式组，再解不等式组即可得出结果.

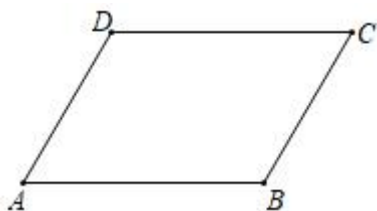
【详解】解：根据二次根式有意义的条件，得
$$\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ ab \geq 0 \end{cases},$$

$$\therefore a \geq 0, b \geq 0,$$

故选：D.

【点睛】二次根式有意义的条件，及解不等式组，掌握二次根式有意义的条件是被开方数为非负数是本题的关键.

8. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $BC \parallel AD$ ，添加下列条件，不能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形的是（ ）



A. $AB = CD$

B. $AB \parallel CD$

C. $\angle A = \angle C$

D. $BC = AD$

【答案】A

【解析】

【分析】依据平行四边形的判定，依次分析判断即可得出结果.

【详解】解：A、当 $BC \parallel AD$ ， $AB = CD$ 时，不能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形，故此选项符合题意；

B、当 $AB \parallel CD$ ， $BC \parallel AD$ 时，依据两组对边分别平行的四边形是平行四边形，能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形，故此选项不合题意；

C、当 $BC \parallel AD$ ， $\angle A = \angle C$ 时，可推出 $AB \parallel DC$ ，依据两组对边分别平行的四边形是平行四边形，能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形，故此选项不合题意；

D、当 $BC \parallel AD$ ， $BC = AD$ 时，依据一组对边平行且相等的四边形是平行四边形，能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形，故此选项不合题意；

故选：A.

【点睛】此题考查了平行四边形的判定，解决问题的关键要熟记平行四边形的判定方法.

9. 《孙子算经》中有“鸡兔同笼”问题：“今有鸡兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问鸡兔各几何.”

设有 x 只鸡， y 只兔. 依题意，可列方程组为（ ）

A.
$$\begin{cases} x + y = 35, \\ 4x + 2y = 94 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x + y = 94, \\ 4x + 2y = 35 \end{cases}$$

$$C. \begin{cases} x+y=35, \\ 2x+4y=94 \end{cases}$$

$$D. \begin{cases} x+y=94, \\ 2x+4y=35 \end{cases}$$

【答案】C

【解析】

【分析】根据等量关系“鸡的只数+兔的只数=35”和“2×鸡的只数+4×兔的只数=94”即可列出方程组.

【详解】解：设有 x 只鸡， y 只兔，

$$\text{由题意可得：} \begin{cases} x+y=35 \\ 2x+4y=94 \end{cases},$$

故选：C.

【点睛】本题主要考查了由实际问题抽象出二元一次方程组，解题的关键是找出等量关系.

10. 某射击运动队进行了五次射击测试，甲、乙两名选手的测试成绩如下表. 甲、乙两名选手成绩的方差分别记为 $S_{\text{甲}}^2$ 和 $S_{\text{乙}}^2$ ，则 $S_{\text{甲}}^2$ 与 $S_{\text{乙}}^2$ 的大小关系是（ ）

测试次数	1	2	3	4	5
甲	5	10	9	3	8
乙	8	6	8	6	7

A. $S_{\text{甲}}^2 > S_{\text{乙}}^2$

B. $S_{\text{甲}}^2 < S_{\text{乙}}^2$

C. $S_{\text{甲}}^2 = S_{\text{乙}}^2$

D. 无法确定

【答案】A

【解析】

【分析】先分别求出甲、乙的平均数，再求出甲、乙的方差即可得出答案.

【详解】解：甲的平均数为 $\frac{5+10+9+3+8}{5}=7$ ，

$$\text{甲的方差为 } S_{\text{甲}}^2 = \frac{1}{5}[(5-7)^2 + (10-7)^2 + (9-7)^2 + (3-7)^2 + (8-7)^2] = 6.8,$$

$$\text{乙的平均数为 } \frac{8+6+8+6+7}{5}=7,$$

$$\text{乙的方差为 } S_{\text{乙}}^2 = \frac{1}{5}[(8-7)^2 + (6-7)^2 + (8-7)^2 + (6-7)^2 + (7-7)^2] = 0.8,$$

$$\therefore 0.8 < 6.8,$$

$$\therefore S_{\text{甲}}^2 > S_{\text{乙}}^2.$$

故选：A.

【点睛】此题主要考查了平均数及方差的知识. 方差的定义：一般地设 n 个数据， $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均数为 $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ ，则方差 $S^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]$ ，它反映了一组数据的波动大小，方差越大，波动性越大，反之也成立.

11. 我们可以用以下推理来证明“在一个三角形中，至少有一个内角小于或等于 60° ”. 假设三角形没有一个内角小于或等于 60° ，即三个内角都大于 60° . 则三角形的三个内角的和大于 180° ，这与“三角形的内角和等于 180° ”这个定理矛盾. 所以在一个三角形中，至少有一个内角小于或等于 60° . 上述推理使用的证明方法是 ()

- A. 反证法 B. 比较法 C. 综合法 D. 分析法

【答案】A

【解析】

【分析】根据反证法的步骤分析判断，即可解答.

【详解】解：假设三角形没有一个内角小于或等于 60° ，即三个内角都大于 60° .

则三角形的三个内角的和大于 180° ,

这与“三角形的内角和等于 180° ”这个定理矛盾.

所以在一个三角形中，至少有一个内角小于或等于 60° .

以上步骤符合反证法的步骤.

故推理使用的证明方法是反证法.

故选：A.

【点睛】本题考查了反证法，解答此题关键要懂得反证法的意义及步骤. 反证法的步骤是：(1) 假设结论不成立；(2) 从假设出发推出矛盾；(3) 假设不成立，则结论成立.

12. 已知 $m > n > 0$ ，若关于 x 的方程 $x^2 + 2x - 3 - m = 0$ 的解为 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$. 关于 x 的方程 $x^2 + 2x - 3 - n = 0$ 的解为 $x_3, x_4 (x_3 < x_4)$. 则下列结论正确的是 ()

- A. $x_3 < x_1 < x_2 < x_4$ B. $x_1 < x_3 < x_4 < x_2$ C. $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ D. $x_3 < x_4 < x_1 < x_2$

【答案】B

【解析】

【分析】把 x_1, x_2 看做是直线 $y = m$ 与抛物线 $y = x^2 + 2x - 3$ 交点的横坐标，把 x_3, x_4 看做是直线 $y = n$ 与抛物线 $y = x^2 + 2x - 3$ 交点的横坐标，画出对应的函数图象即可得到答案.

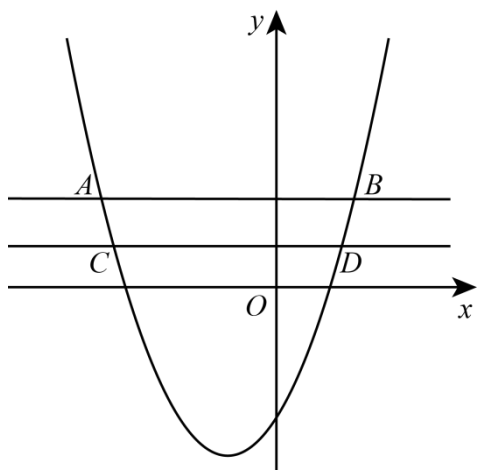
【详解】解：如图所示，设直线 $y = m$ 与抛物线 $y = x^2 + 2x - 3$ 交于 A 、 B 两点，直线 $y = n$ 与抛物线 $y = x^2 + 2x - 3$ 交于 C 、 D 两点，

$\because m > n > 0$ ，关于 x 的方程 $x^2 + 2x - 3 - m = 0$ 的解为 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)，关于 x 的方程 $x^2 + 2x - 3 - n = 0$ 的解为 x_3, x_4 ($x_3 < x_4$)，

$\therefore x_1, x_2, x_3, x_4$ 分别是 A 、 B 、 C 、 D 的横坐标，

$\therefore x_1 < x_3 < x_4 < x_2$ ，

故选 B.



【点睛】本题主要考查了抛物线与一元二次方程的关系，正确把一

元二次方程的解转换成直线与抛物线交点的横坐标是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 6 个小题，每小题 3 分，满分 18 分.)

13. 在平面直角坐标系中，点 $P(-3, -2)$ 所在象限是第_____象限.

【答案】三

【解析】

【分析】根据各象限内点的坐标特征解答.

【详解】解： $P(-3, -2)$ 的横坐标为负数，纵坐标为负数，

$\therefore P(-3, -2)$ 在第三象限，

故答案为：三.

【点睛】本题考查了各象限内点的坐标的符号特征，记住各象限内点的坐标的符号是解题的关键，四个象限的符号特点分别是：第一象限 $(+, +)$ ，第二象限 $(-, +)$ ，第三象限 $(-, -)$ ，第四象限 $(+, -)$.

14. 一个布袋中放着 3 个红球和 9 个黑球，这两种球除了颜色以外没有任何其他区别. 布袋中的球已经搅匀. 从布袋中任取 1 个球，取出红球的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{4}$ 0.25

【解析】

【分析】 根据公式 $\frac{3}{3+9} = \frac{3}{12}$ 计算即可.

【详解】 $\because$ 一个布袋中放着 3 个红球和 9 个黑球,

$\therefore$ 取出红球的概率是 $\frac{3}{3+9} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$,

故答案为: $\frac{1}{4}$.

【点睛】 本题考查了根据概率公式计算概率, 熟练掌握公式是解题的关键.

15. 已知 $x = 5$, 则代数式 $\frac{3}{x-4} - \frac{24}{x^2-16}$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 先通分, 再根据同分母分式的减法运算法则计算, 然后代入数值即可.

【详解】 解: 原式 $= \frac{3(x+4)}{(x-4)(x+4)} - \frac{24}{(x-4)(x+4)}$

$$= \frac{3x-12}{(x-4)(x+4)}$$

$$= \frac{3}{x+4}$$

$$\because x = 5$$

$$\therefore \frac{3}{x+4} = \frac{3}{5+4} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

故答案为: $\frac{1}{3}$

【点睛】 本题主要考查了分式通分计算的能力, 解决本题的关键突破口是通分整理.

16. 已知关于 x 的方程 $x^2 + mx - 20 = 0$ 的一个根是 -4 , 则它的另一个根是_____.

【答案】 5

【解析】

【分析】 根据一元二次方程根与系数的关系可得 $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -20$, 根据该方程一个根为 -4 , 即可求出另一个根.

【详解】 解: 根据题意可得: $a = 1, b = m, c = -20$,

$$\therefore x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -20,$$

$\therefore$ 该方程一个根为 -4 , 令 $x_1 = -4$,

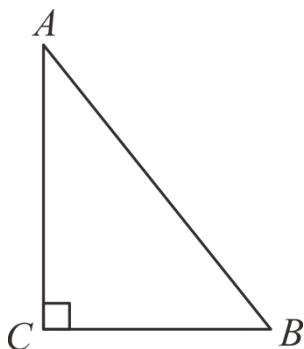
$$\therefore -4x_2 = -20, \text{ 解得: } x_2 = 5.$$

故答案为: 5.

【点睛】 本题主要考查了一元二次方程根与系数的关系, 解题的关键是掌握一元二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0) \text{ 有两根为 } x_1, x_2, \text{ 则 } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}, x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

17. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 8$, $BC = 6$. 以点 C 为圆心, r 为半径作圆, 当所作的圆与斜边 AB 所在的直线相切时, r 的值为_____.



【答案】 $\frac{24}{5}$

【解析】

【分析】 根据勾股定理, 得 $AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$, 根据切线的性质, 得到圆的半径等于 AB 边上的高, 根据直角三角形的面积不变性计算即可.

【详解】 $\because \angle ACB = 90^\circ$, $AC = 8$, $BC = 6$,

$$\therefore AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10,$$

根据切线的性质, 得到圆的半径等于 AB 边上的高,

$$\therefore \frac{1}{2} AB \times r = \frac{1}{2} AC \times BC,$$

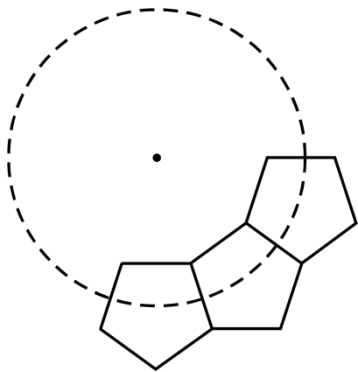
$$\therefore r = \frac{AC \times BC}{AB} = \frac{8 \times 6}{10} = \frac{24}{5},$$

故答案为: $\frac{24}{5}$.

【点睛】 本题考查了勾股定理, 切线的性质, 熟练掌握勾股定理, 切线的性质是解题的关键.

18. 如图, 用若干个全等的正五边形排成圆环状, 图中所示的是其中 3 个正五边形的位置. 要完成这一圆环

排列，共需要正五边形的个数是_____个.



【答案】 10

【解析】

【分析】先求出正五边形的外角为 72° ，则 $\angle 1 = \angle 2 = 72^\circ$ ，进而得出 $\angle AOB = 36^\circ$ ，即可求解.

【详解】解：根据题意可得：

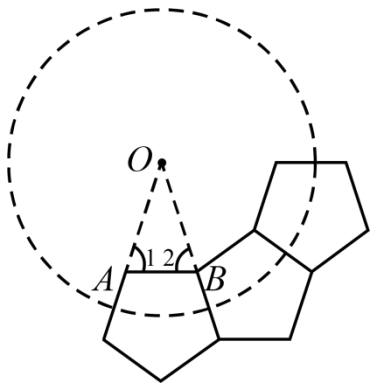
$$\because \text{正五边形的一个外角} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB = 180^\circ - 72^\circ \times 2 = 36^\circ,$$

$$\therefore \text{共需要正五边形的个数} = \frac{360^\circ}{36^\circ} = 10 \text{ (个)},$$

故答案为：10.



【点睛】本题主要考查了圆的基本性质，正多边形的外角，解题的关键是

掌握正多边形的外角的求法.

三、解答题（本大题共 8 个小题，19~20 题每题 6 分，21~24 题每题 8 分，25 题 10 分，26 题 12 分，满分 66 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

19. 计算： $|-3| + \sqrt{4} + (-2) \times 1$

【答案】 3

【解析】

【分析】根据求一个数的绝对值，二次根式的性质，有理数的乘法进行计算即可求解.

【详解】解： $|-3| + \sqrt{4} + (-2) \times 1$

$$= 3 + 2 - 2$$

$$= 3$$

【点睛】本题考查了实数的混合运算，熟练掌握求一个数的绝对值，二次根式的性质，有理数的乘法是解题的关键.

20. 解不等式组:
$$\begin{cases} x - 4 \leq 0 \text{①} \\ 2(x + 1) < 3x \text{②} \end{cases}$$

【答案】 $2 < x \leq 4$

【解析】

【分析】分别求出每一个不等式的解集，根据口诀：同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小找不到确定不等式组的解集.

【详解】解:
$$\begin{cases} x - 4 \leq 0 \text{①} \\ 2(x + 1) < 3x \text{②} \end{cases}$$

解不等式①得: $x \leq 4$

解不等式②得: $x > 2$

$\therefore$ 不等式组的解集为: $2 < x \leq 4$

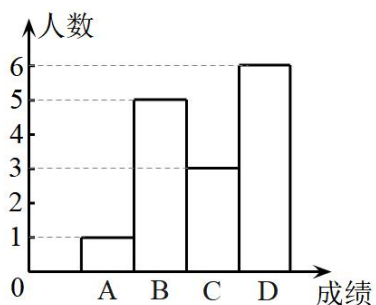
【点睛】本题考查了解一元一次不等式组，正确掌握一元一次不等式解集确定方法是解题的关键.

21. 2023 年 3 月 27 日是第 28 个全国中小学生安全教育日，为提高学生安全防范意识和自我防护能力，某学校举行了校园安全知识竞赛活动. 现从八、九年级中各随机抽取 15 名学生的竞赛成绩（百分制）进行整理、描述和分析（成绩得分用 x 表示，80 分及以上为优秀，共分成四组，A: $60 \leq x < 70$; B: $70 \leq x < 80$; C: $80 \leq x < 90$; D: $90 \leq x \leq 100$ ），并给出下面部分信息:

八年级抽取的学生竞赛成绩在 C 组中的数据为: 84, 84, 88.

九年级抽取的学生竞赛成绩为: 68, 77, 75, 100, 80, 100, 82, 86, 95, 91, 100, 86, 84, 94, 87.

八年级抽取的学生竞赛成绩
频数分布直方图



八、九年级抽取的学生竞赛成绩统计表

年级	平均数	中位数	众数	优秀率
八	87	a	98	60%
九	87	86	b	c

根据以上信息，解答下列问题：

(1) 填空： $a =$ _____, $b =$ _____, $c =$ _____.

(2) 该校八、九年级共 500 人参加了此次竞赛活动，请你估计该校八、九年级参加此次竞赛活动成绩达到 90 分及以上的学生人数.

【答案】 (1) 84, 100, 80%;

(2) 200 人

【解析】

【分析】 (1) 根据中位数的定义得出 a 为排序后第八名学生的成绩；找出抽取的九年级学生的竞赛成绩中出现次数最多的分数，即可求出 b ；用抽取的九年级学生的竞赛成绩中 80 分以上的个数除以 15，即可求出 c ；

(2) 用 500 人乘以抽取的八、九年级学生竞赛成绩中 90 分以上的人数所占百分比，即可求解.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 一共抽取八年级学生 15 人，

$\therefore$ 中位数是排序后的第 8 个数据，

$\therefore 1+5=6$,

$\therefore$ 第 8 个数据落在 C 组，

$\therefore a$ 为第八名学生成绩，即 $a = 84$ ；

$\therefore$ 抽取的九年级学生竞赛成绩中，100 分出现了 3 次，出现次数最多，

$\therefore b = 100$ ，

$\therefore$ 抽取的九年级学生竞赛成绩中，80 分及以上的有 12 个，

$\therefore c = \frac{12}{15} \times 100\% = 80\%$ ；

故答案为：84, 100, 80%；

【小问 2 详解】

解：根据频数分布直方图可得，抽取的八年级学生竞赛成绩中，90 分以上的有 6 个；

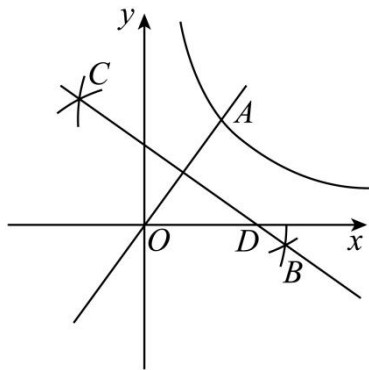
根据抽取的九年级学生的竞赛成绩可得，90 分以上的有 6 个；

$\therefore$ 该校八、九年级参加此次竞赛活动成绩达到 90 分及以上的学生人数为： $500 \times \frac{6+6}{15+15} = 200$ (人)，

答：该校八、九年级参加此次竞赛活动成绩达到 90 分及以上的学生人数为 200 人.

【点睛】本题主要考查了频数分布直方图，中位数，众数，频率，以及用样本估计总体，解题的关键是熟练掌握相关知识点，并灵活运用，正确从统计图中获取需要数据.

22. 如图，正比例函数 $y = \frac{4}{3}x$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{12}{x} (x > 0)$ 的图象相交于点 A .



(1) 求点 A 的坐标.

(2) 分别以点 O 、 A 为圆心，大于 OA 一半的长为半径作圆弧，两弧相交于点 B 和点 C ，作直线 BC ，交 x 轴于点 D . 求线段 OD 的长.

【答案】(1) $A(3, 4)$

(2) $OD = \frac{25}{6}$

【解析】

【分析】(1) 解两个函数联立组成的方程组即可；

(2) 由题意可得： CD 垂直平分 OA ，连接 AD ，如图，根据线段垂直平分线的性质可得 $AD = OD$ ，设 $D(m, 0)$ ，根据两点间的距离建立方程，解方程即可求出答案.

【小问 1 详解】

$$\text{解：解方程组 } \begin{cases} y = \frac{4}{3}x \\ y = \frac{12}{x} \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 4 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = -4 \end{cases},$$

$\because x > 0$,

$\therefore A(3, 4)$;

【小问 2 详解】

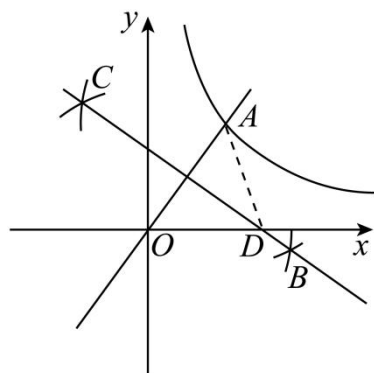
解：由题意可得： CD 垂直平分 OA ，

连接 AD ，如图，则 $AD = OD$ ，

设 $D(m, 0)$,

$$\text{则 } m^2 = (m-3)^2 + 4^2, \text{ 解得 } m = \frac{25}{6},$$

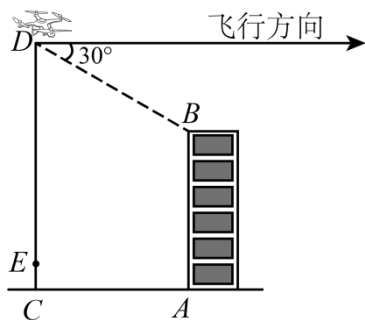
$$\therefore OD = \frac{25}{6}.$$



【点睛】本题考查了一次函数与反比例函数的交点、线段垂直平分线的尺

规作图和性质以及两点间的距离等知识，熟练掌握上述知识是解题的关键。

23. 随着科技的发展，无人机已广泛应用于生产生活，如代替人们在高空测量距离和高度。圆圆要测量教学楼 AB 的高度，借助无人机设计了如下测量方案：如图，圆圆在离教学楼底部 $24\sqrt{3}$ 米的 C 处，遥控无人机旋停在点 C 的正上方的点 D 处，测得教学楼 AB 的顶部 B 处的俯角为 30° ， CD 长为 49.6 米。已知目高 CE 为 1.6 米。



(1) 求教学楼 AB 的高度。

(2) 若无人机保持现有高度沿平行于 CA 的方向，以 $4\sqrt{3}$ 米/秒的速度继续向前匀速飞行，求经过多少秒时，无人机刚好离开圆圆的视线 EB 。

【答案】(1) 教学楼 AB 的高度为 25.6 米

(2) 无人机刚好离开视线 EB 的时间为 12 秒

【解析】

【分析】(1) 过点 B 作 $BG \perp DC$ 于点 G ，根据题意可得： $DC \perp AC$, $AB \perp AC$ ， $AC = 24\sqrt{3}$ 米， $\angle FDB = 30^\circ$ ，通过证明四边形 $GCAB$ 为矩形，得出 $BG = AC = 24\sqrt{3}$ 米，进而得出 $DG = BG \cdot \tan 30^\circ = 24$ 米，最后根据线段之间的和差关系可得 $CG = AB = CD - DG$ ，即可求解；

(2) 连接 EB 并延长, 交 DF 于点 H , 先求出 $EG = CG - CE = 24$ 米, 进而得出 $BD = BE$, 则 $\angle BEG = \angle BDG = 60^\circ$, 则 $DH = DE \cdot \tan 60^\circ = 48\sqrt{3}$ 米, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: 过点 B 作 $BG \perp DC$ 于点 G ,

根据题意可得: $DC \perp AC, AB \perp AC$, $AC = 24\sqrt{3}$ 米, $\angle FDB = 30^\circ$,

$\because DC \perp AC, AB \perp AC, BG \perp DC$,

$\therefore$ 四边形 $GCAB$ 为矩形,

$\therefore BG = AC = 24\sqrt{3}$ 米,

$\because DF \perp DC, BG \perp DC$,

$\therefore DF \parallel BG$,

$\therefore \angle DBG = \angle FDB = 30^\circ$,

$\therefore DG = BG \cdot \tan 30^\circ = 24$ 米,

$\because CD$ 长为 49.6 米,

$\therefore CG = AB = CD - DG = 49.6 - 24 = 25.6$ (米),

答: 教学楼 AB 的高度为 25.6 米.

【小问 2 详解】

解: 连接 EB 并延长, 交 DF 于点 H ,

$\because CE = 1.6$ 米, $CG = 25.6$ 米,

$\therefore EG = CG - CE = 24$ 米,

$\because DG = EG = 24$ 米, $BG \perp DC$,

$\therefore BD = BE$,

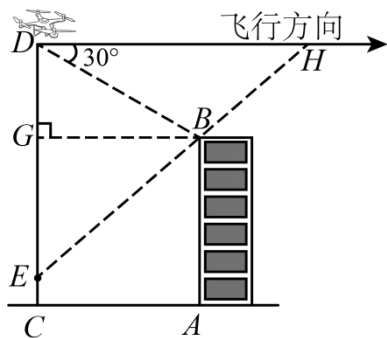
$\therefore \angle BEG = \angle BDG = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, $DE = DG + EG = 48$ 米,

$\therefore DH = DE \cdot \tan 60^\circ = 48\sqrt{3}$ (米),

$\because$ 无人机以 $4\sqrt{3}$ 米/秒的速度飞行,

$\therefore$ 离开视线 EB 的时间为: $\frac{48\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = 12$ (秒),

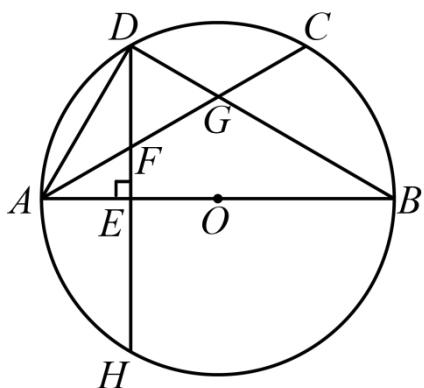
答: 无人机刚好离开视线 EB 的时间为 12 秒.



【点睛】本题主要考查了解直角三角形的实际应用，解题的关键是正确画

出辅助线，构造直角三角形，熟练掌握解直角三角形的方法和步骤.

24. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， AC 是一条弦， D 是 $\widehat{AC}$ 的中点， $DE \perp AB$ 于点 E ，交 AC 于点 F ，交 $\odot O$ 于点 H ， DB 交 AC 于点 G .



(1) 求证: $AF = DF$.

(2) 若 $AF = \frac{5}{2}$, $\sin \angle ABD = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 求 $\odot O$ 的半径.

【答案】(1) 见解析 (2) 5

【解析】

【分析】(1) 根据 D 是 $\widehat{AC}$ 的中点， $DE \perp AB$ 于点 E ，得到 $\widehat{CD} = \widehat{DA} = \widehat{AH}$ ，得到 $\angle ADH = \angle DAC$ 即可得证.

(2) 根据 $\sin \angle ABD = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{AD}{AB}$ ，设 $AD = \sqrt{5}x$, $AB = 5x$ ，运用勾股定理，得到

$$BD = \sqrt{(5x)^2 - (\sqrt{5}x)^2} = 2\sqrt{5}x, \text{ 结合 } \sin \angle ABD = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{DE}{BD}, \text{ 得到 } DE = 2x, \text{ 运用勾股定理，得到}$$

$$BE = \sqrt{(2\sqrt{5}x)^2 - (2x)^2} = 4x, \text{ 从而得到 } AE = x, EF = ED - DF = DE - AF = \left(2x - \frac{5}{2}\right), \text{ 在 } \text{Rt}\triangle AEF \text{ 中,}$$

利用勾股定理计算 x 即可.

【小问 1 详解】

$\because D$ 是 $\widehat{AC}$ 的中点,

$$\therefore \widehat{CD} = \widehat{DA},$$

$\because DE \perp AB$, AB 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \widehat{DA} = \widehat{AH},$$

$$\therefore \widehat{CD} = \widehat{DA} = \widehat{AH},$$

$$\therefore \angle ADH = \angle DAC,$$

$$\therefore AF = DF.$$

【小问 2 详解】

$\because DE \perp AB$, AB 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\because \sin \angle ABD = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{AD}{AB},$$

设 $AD = \sqrt{5}x$, $AB = 5x$,

$$\therefore BD = \sqrt{(5x)^2 - (\sqrt{5}x)^2} = 2\sqrt{5}x,$$

$$\because \sin \angle ABD = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{DE}{BD},$$

$$\therefore DE = 2x,$$

$$\therefore BE = \sqrt{(2\sqrt{5}x)^2 - (2x)^2} = 4x,$$

$$\therefore AE = x, EF = ED - DF = DE - AF = \left(2x - \frac{5}{2}\right),$$

在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 中, $AF^2 = AE^2 + EF^2$,

$$\therefore \left(\frac{5}{2}\right)^2 = x^2 + \left(2x - \frac{5}{2}\right)^2,$$

解得 $x = 2$ 或 $x = 0$ (舍去),

$$\therefore AB = 5x = 10,$$

$\therefore \odot O$ 的半径为 5.

【点睛】 本题考查了垂径定理, 勾股定理, 圆周角定理, 正弦函数, 熟练掌握垂径定理, 勾股定理, 圆周

角定理，正弦函数是解题的关键.

25. (1) [问题探究]

如图 1, 在正方形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 、 BD 相交于点 O . 在线段 AO 上任取一点 P (端点除外), 连接 PD 、 PB .

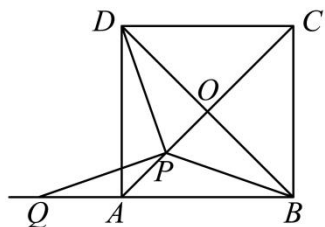


图1

①求证: $PD = PB$;

②将线段 DP 绕点 P 逆时针旋转, 使点 D 落在 BA 的延长线上的点 Q 处. 当点 P 在线段 AO 上的位置发生变化时, $\angle DPQ$ 的大小是否发生变化? 请说明理由;

③探究 AQ 与 OP 的数量关系, 并说明理由.

(2) [迁移探究]

如图 2, 将正方形 $ABCD$ 换成菱形 $ABCD$, 且 $\angle ABC = 60^\circ$, 其他条件不变. 试探究 AQ 与 CP 的数量关系, 并说明理由.

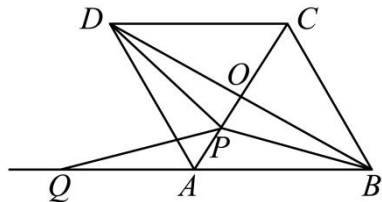


图2

【答案】(1) ①见解析; ②不变化, $\angle DPQ = 90^\circ$, 理由见解析; ③ $AQ = \sqrt{2}OP$, 理由见解析; (2) $AQ = CP$, 理由见解析

【解析】

【分析】(1) ①根据正方形的性质证明 $\triangle DCP \cong \triangle BCP$, 即可得到结论;

②作 $PM \perp AB$, $PN \perp AD$, 垂足分别为点 M 、 N , 如图, 可得 $PM = PN$, 证明四边形 $AMPN$ 是矩形, 推出 $\angle MPN = 90^\circ$, 证明 $\text{Rt}\triangle DPN \cong \text{Rt}\triangle QPM$ (HL), 得出 $\angle DPN = \angle QPM$, 进而可得结论;

③作 $PE \perp AO$ 交 AB 于点 E , 作 $EF \perp OB$ 于点 F , 如图, 证明 $AQ = BE$, $BE = \sqrt{2}EF$ 即可得出结论;

(2) 先证明 $PQ = PB$, 作 $PE \parallel BC$ 交 AB 于点 E , $EG \parallel AC$ 交 BC 于点 G , 如图, 则四边形 $PEGC$ 是

平行四边形，可得 $EG = PC$ ， $\triangle APE, \triangle BEG$ 都是等边三角形，进一步即可证得结论.

【详解】(1) ①证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore CD = CB, \angle DCA = \angle BCA = 45^\circ,$$

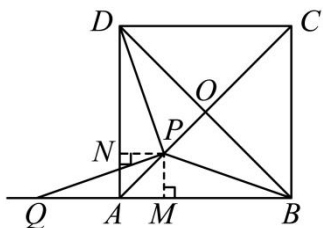
$$\because CP = CP,$$

$$\therefore \triangle DCP \cong \triangle BCP,$$

$$\therefore PD = PB;$$

② $\angle DPQ$ 的大小不发生变化， $\angle DPQ = 90^\circ$ ；

证明：作 $PM \perp AB, PN \perp AD$ ，垂足分别为点 M, N ，如图，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore \angle DAC = \angle BAC = 45^\circ, \angle DAB = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $AMPN$ 是矩形， $PM = PN$ ，

$$\therefore \angle MPN = 90^\circ,$$

$$\because PD = PQ, PM = PN,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle DPN \cong \text{Rt}\triangle QPM \text{ (HL)},$$

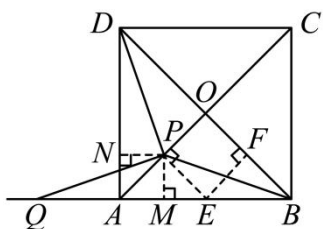
$$\therefore \angle DPN = \angle QPM,$$

$$\because \angle QPN + \angle QPM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle QPN + \angle DPN = 90^\circ, \text{ 即 } \angle DPQ = 90^\circ;$$

$$\textcircled{3} AQ = \sqrt{2}OP;$$

证明：作 $PE \perp AO$ 交 AB 于点 E ，作 $EF \perp OB$ 于点 F ，如图，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore \angle BAC = 45^\circ, \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEP = 45^\circ, \text{ 四边形 } OPEF \text{ 是矩形},$$

$$\therefore \angle PAE = \angle PEA = 45^\circ, EF = OP,$$

$$\therefore PA = PE,$$

$$\therefore PD = PB, PD = PQ,$$

$$\therefore PQ = PB,$$

作 $PM \perp AE$ 于点 M ,

$$\text{则 } QM = BM, AM = EM,$$

$$\therefore AQ = BE,$$

$$\therefore \angle EFB = 90^\circ, \angle EBF = 45^\circ,$$

$$\therefore BE = \frac{EF}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}EF,$$

$$\therefore AQ = \sqrt{2}OP;$$

$$(2) \quad AQ = CP;$$

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\angle ABC = 60^\circ$,

$$\therefore AB = BC, AC \perp BD, DO = BO,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 是等边三角形, } AC \text{ 垂直平分 } BD,$$

$$\therefore \angle BAC = 60^\circ, PD = PB,$$

$$\therefore PD = PQ,$$

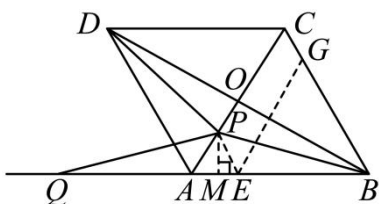
$$\therefore PQ = PB,$$

作 $PE \parallel BC$ 交 AB 于点 E , $EG \parallel AC$ 交 BC 于点 G , 如图,

则四边形 $PEGC$ 是平行四边形, $\angle GEB = \angle BAC = 60^\circ$, $\angle AEP = \angle ABC = 60^\circ$,

$$\therefore EG = PC, \triangle APE, \triangle BEG \text{ 都是等边三角形},$$

$$\therefore BE = EG = PC,$$



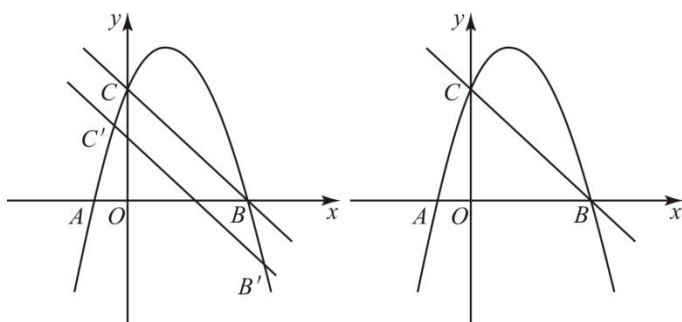
作 $PM \perp AB$ 于点 M , 则 $QM = MB, AM = EM$,

$$\therefore QA = BE,$$

$$\therefore AQ = CP.$$

【点睛】本题是四边形综合题，主要考查了正方形、菱形的性质，矩形、平行四边形、等边三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质以及解直角三角形等知识，熟练掌握相关图形的判定和性质、正确添加辅助线是解题的关键.

26. 如图，已知抛物线 $y = ax^2 - 2ax + 3$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 和点 B ，与 y 轴交于点 C ，连接 AC ，过 B 、 C 两点作直线.



(1) 求 a 的值.

(2) 将直线 BC 向下平移 $m(m > 0)$ 个单位长度，交抛物线于 B' 、 C' 两点. 在直线 $B'C'$ 上方的抛物线上是否存在定点 D ，无论 m 取何值时，都是点 D 到直线 $B'C'$ 的距离最大，若存在，请求出点 D 的坐标；若不存在，请说明理由.

(3) 抛物线上是否存在点 P ，使 $\angle PBC + \angle ACO = 45^\circ$ ，若存在，请求出直线 BP 的解析式；若不存在，请说明理由.

【答案】(1) $a = -1$

(2) 存在 $D\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$ ，理由见详解

(3) 存在点 P ，直线 BP 的解析式为 $y = -3x + 9$ 或 $y = -\frac{1}{3}x + 1$.

【解析】

【分析】(1) 根据待定系数法即可得出结果；

(2) 设 $B'C'$ 与 y 轴交于点 G ，设 $D(t, -t^2 + 2t + 3)$ ，过点 D 作 $DE \parallel y$ 轴交 $B'C'$ 于点 E ，作 $DF \perp B'C'$ 于点 F ，先证明 $\triangle DEF$ 是等腰直角三角形，再表示出 DE 的长度，根据二次函数的性质即可得出结果；

(3) 分两种情况讨论，当点 P 在直线 BC 下方时，与当点 P 在直线 BC 上方时.

【小问 1 详解】

解：抛物线 $y = ax^2 - 2ax + 3$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$,

得 $a + 2a + 3 = 0$,

解得： $a = -1$;

【小问 2 详解】

解：存在 $D\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$ ，理由如下：

设 $B'C'$ 与 y 轴交于点 G ，由 (1) 中结论 $a = -1$ ，得抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$ ，

当 $y = 0$ 时， $x_1 = -1$ ， $x_2 = 3$ ，即 $A(-1, 0)$ ， $B(3, 0)$ ， $C(0, 3)$ ，

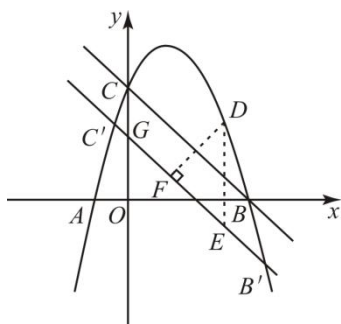
$OB = OC$ ， $\angle BOC = 90^\circ$ ，即 $\triangle BOC$ 是等腰直角三角形，

$\therefore \angle BCO = 45^\circ$ ，

$\because B'C' \parallel BC$ ，

$\therefore \angle BCO = \angle B'GO = 45^\circ$ ，

设 $D(t, -t^2 + 2t + 3)$ ，过点 D 作 $DE \parallel y$ 轴交 $B'C'$ 于点 E ，作 $DF \perp B'C'$ 于点 F ，



$\therefore \angle DEF = \angle B'GO = 45^\circ$ ，即 $\triangle DEF$ 是等腰直角三角形，

设直线 BC 的解析式为 $y = kx + b$ ，代入 $B(3, 0)$ ， $C(0, 3)$ ，

$$\text{得} \begin{cases} 3k + b = 0 \\ b = 3 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = -1 \\ b = 3 \end{cases},$$

故直线 BC 的解析式为 $y = -x + 3$ ，

将直线 BC 向下平移 m ($m > 0$) 个单位长度，得直线 $B'C'$ 的解析式为 $y = -x + 3 - m$ ，

$\therefore E(t, -t + 3 - m)$ ，

$$DE = -t^2 + 2t + 3 - (-t + 3 - m) = -t^2 + 3t + m = -\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} + m,$$

当 $t = \frac{3}{2}$ 时, DE 有最大值 $\frac{9}{4} + m$,

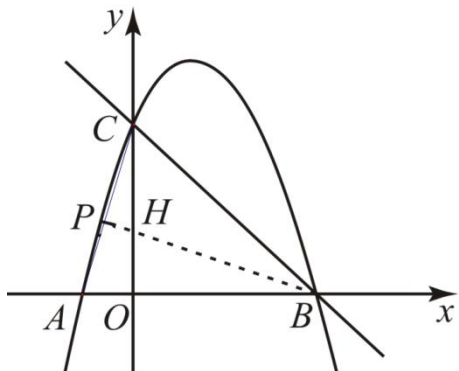
此时 $DF = \frac{\sqrt{2}}{2} DE$ 也有最大值, $D\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$;

【小问 3 详解】

解: 存在点 P , 理由如下:

当点 P 在直线 BC 下方时,

在 y 轴上取点 $H(0,1)$, 作直线 BH 交抛物线于 (异于点 B) 点 P ,



由 (2) 中结论, 得 $\angle OBC = 45^\circ$,

$\therefore OH = OA = 1, OB = OC, \angle BOH = \angle COA = 90^\circ$,

$\therefore \triangle BOH \cong \triangle COA (SAS)$,

$\therefore \angle OBH = \angle ACO$,

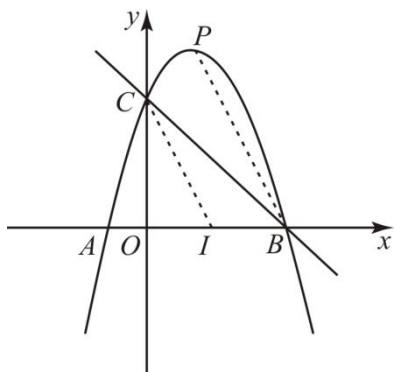
$\therefore \angle PBC + \angle ACO = \angle PBC + \angle OBH = \angle OBC = 45^\circ$,

设直线 BP 的解析式为 $y = k_1x + b_1$, 代入点 $B(3,0)$, $H(0,1)$,

$$\text{得} \begin{cases} 3k_1 + b_1 = 0 \\ b_1 = 1 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k_1 = -\frac{1}{3} \\ b_1 = 1 \end{cases},$$

故直线 BP 的解析式为 $y = -\frac{1}{3}x + 1$;

当点 P 在直线 BC 上方时, 如图, 在 x 轴上取点 $I(1,0)$, 连接 CI , 过点 B 作 $BP \parallel CI$ 交抛物线于点 P ,



$$\therefore \angle PBC = \angle BCI,$$

$$\therefore OI = OA = 1, \quad OC = OC, \quad \angle COI = \angle COA = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle COI \cong \triangle COA \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle OCI = \angle ACO,$$

$$\therefore \angle PBC + \angle ACO = \angle BCI + \angle OCI = \angle OCB = 45^\circ,$$

设直线 CI 的解析式为 $y = k_2x + b_2$, 代入点 $I(1,0)$, $C(0,3)$,

$$\text{得} \begin{cases} k_2 + b_2 = 0 \\ b_2 = 3 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k_2 = -3 \\ b_2 = 3 \end{cases},$$

故设直线 CI 的解析式为 $y = -3x + 3$,

$BP \parallel CI$, 且过点 $B(3,0)$,

故设直线 BP 的解析式为 $y = -3x + n$,

$$\therefore 0 = -3 \times 3 + n,$$

解得 $n = 9$,

$\therefore$ 直线 BP 的解析式为 $y = -3x + 9$.

综上所述: 直线 BP 的解析式为 $y = -3x + 9$ 或 $y = -\frac{1}{3}x + 1$.

【点睛】 本题考查二次函数的性质、二次函数的图象、全等三角形的判定和性质, 等腰直角三角形的判定和性质, 解答本题的关键是明确题意, 利用二次函数的性质解答.

