

黑龙江省龙东地区 2023 年初中毕业学业统一考试

数学试题

考生注意：

1. 考试时间 120 分钟

2. 全卷共三道大题，总分 120 分

一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 下列运算正确的是（ ）

A. $(-2a)^2 = -4a^2$

B. $(a-b)^2 = a^2 - b^2$

C. $(-m+2)(-m-2) = m^2 - 4$

D. $(a^5)^2 = a^7$

【答案】C

【解析】

【分析】分别根据积的乘方，完全平方公式，平方差公式和幂的乘方法则进行判断即可。

【详解】解：A. $(-2a)^2 = 4a^2$ ，原式计算错误；

B. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ，原式计算错误；

C. $(-m+2)(-m-2) = m^2 - 4$ ，计算正确；

D. $(a^5)^2 = a^{10}$ ，原式计算错误。

故选：C.

【点睛】本题考查了积的乘方，完全平方公式，平方差公式和幂的乘方，熟练掌握运算法则，牢记乘法公式是解题的关键。

2. 下列新能源汽车标志图案中，既是轴对称图形，又是中心对称图形的是（ ）



【答案】A

【解析】

【分析】根据轴对称图形和中心对称图形的定义进行逐一判断即可：如果一个平面图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形就叫做轴对称图形；把一个图形绕着某一个点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形叫做中心对称图形，这个点就是它的对称中心。

【详解】解：A、既是轴对称图形，也是中心对称图形，符合题意；

B、是轴对称图形，不是中心对称图形，不符合题意；

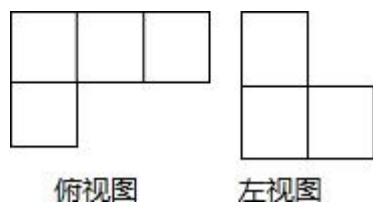
C、既不是轴对称图形，也不是中心对称图形，不符合题意；

D、是轴对称图形，不是中心对称图形，不符合题意；

故选 A.

【点睛】本题主要考查了轴对称图形和中心对称图形的识别，熟知二者的定义是解题的关键.

3. 一个几何体由若干大小相同的小正方体组成，它的俯视图和左视图如图所示，那么组成该几何体所需小正方体的个数最少为（ ）



A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

【答案】B

【解析】

【分析】在“俯视打地基”的前提下，结合左视图知俯视图上一行三个小正方体的上方（第2层）至少还有1个正方体，据此可得答案.

【详解】解：由俯视图与左视图知，该几何体所需小正方体个数最少分布情况如下图所示：



所以组成该几何体所需小正方体的个数最少为 5,

故选：B.

【点睛】本题主要考查由三视图判断几何体，解题的关键是掌握口诀“俯视打地基，主视疯狂盖，左视拆违章”.

4. 已知一组数据1,0,-3,5,x,2,-3的平均数是1，则这组数据的众数是（ ）

A. -3

B. 5

C. -3 和 5

D. 1 和 3

【答案】C

【解析】

【分析】先根据平均数的定义列出关于 x 的方程，求出 x 的值，从而还原这组数据，再利用众数的概念求解即可.

【详解】解：∵数据1, 0, -3, 5, x , 2, -3 的平均数是 1,

$$\therefore 1 + 0 - 3 + 5 + x + 2 - 3 = 7 \times 1,$$

解得 $x = 5$,

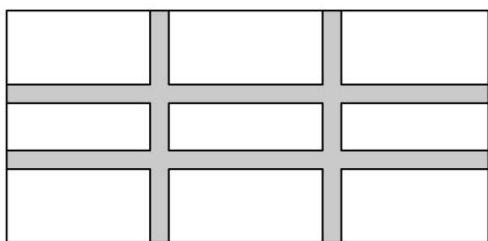
则 1, 0, -3, 5, 5, 2, -3,

∴这组数据的众数是 -3 和 5,

故选：C.

【点睛】此题主要考查了众数和平均数，解题关键是掌握众数和平均数的概念.

5. 如图，在长为 100m，宽为 50m 的矩形空地上修筑四条宽度相等的小路，若余下的部分全部种上花卉，且花圃的面积是 3600m^2 ，则小路的宽是 ()



A. 5m

B. 70m

C. 5m 或 70m

D. 10m

【答案】A

【解析】

【分析】设小路宽为 $x\text{m}$ ，则种植花草部分的面积等于长为 $(100 - 2x)\text{m}$ ，宽为 $(50 - 2x)\text{m}$ 的矩形的面积，根据花草的种植面积为 3600m^2 ，即可得出关于 x 的一元二次方程，解之取其符合题意的值即可得出结论.

【详解】解：设小路宽为 $x\text{m}$ ，则种植花草部分的面积等于长为 $(100 - 2x)\text{m}$ ，宽为 $(50 - 2x)\text{m}$ 的矩形的面积，

依题意得： $(100 - 2x)(50 - 2x) = 3600$

解得： $x_1 = 5$ ， $x_2 = 70$ (不合题意，舍去)，

∴小路宽为 5m.

故选 A.

【点睛】本题考查了一元二次方程的应用，找准等量关系，正确列出一元二次方程是解题的关键.

6. 已知关于 x 的分式方程 $\frac{m}{x-2} + 1 = \frac{x}{2-x}$ 的解是非负数，则 m 的取值范围是 ()

- A. $m \leq 2$ B. $m \geq 2$ C. $m \leq 2$ 且 $m \neq -2$ D. $m < 2$ 且 $m \neq -2$

【答案】C

【解析】

【分析】解分式方程求出 $x = \frac{2-m}{2}$ ，然后根据解是非负数以及解不是增根得出关于 m 的不等式组，求解即可.

【详解】解：分式方程去分母得： $m + x - 2 = -x$ ，

$$\text{解得： } x = \frac{2-m}{2},$$

$\therefore$ 分式方程 $\frac{m}{x-2} + 1 = \frac{x}{2-x}$ 的解是非负数，

$$\therefore \frac{2-m}{2} \geq 0, \text{ 且 } x = \frac{2-m}{2} \neq 2,$$

$$\therefore m \leq 2 \text{ 且 } m \neq -2,$$

故选：C.

【点睛】本题考查了解分式方程，解一元一次不等式组，正确得出关于 m 的不等式组是解题的关键.

7. 某社区为了打造“书香社区”，丰富小区居民的业余文化生活，计划出资 500 元全部用于采购 A, B, C 三种图书，A 种每本 30 元，B 种每本 25 元，C 种每本 20 元，其中 A 种图书至少买 5 本，最多买 6 本（三种图书都要买），此次采购的方案有（ ）

- A. 5 种 B. 6 种 C. 7 种 D. 8 种

【答案】B

【解析】

【分析】设采购 A 种图书 x 本，B 种图书 y 本，C 种图书 z 本，根据采购三种图书需 500 元列出方程，再依据 x 的数量分两种情况讨论求解即可.

【详解】解：设采购 A 种图书 x 本，B 种图书 y 本，C 种图书 z 本，其中 $5 \leq x \leq 6, y > 0, z > 0$ ，且 x, y, z 均为整数，根据题意得，

$$30x + 25y + 20z = 500,$$

$$\text{整理得， } 6x + 5y + 4z = 100,$$

$$\text{①当 } x = 5 \text{ 时， } 6 \times 5 + 5y + 4z = 100,$$

$$\therefore y = \frac{70-4z}{5},$$

$\therefore y > 0, z > 0$ ，且 y, z 均为整数，

$\therefore$ 当 $70 - 4z = 10$ 时, $y = 2$, $\therefore z = 15$;

当 $70 - 4z = 30$ 时, $y = 6$, $\therefore z = 10$;

当 $70 - 4z = 50$ 时, $y = 10$, $\therefore z = 5$;

②当 $x = 6$ 时, $6 \times 6 + 5y + 4z = 100$,

$$\therefore y = \frac{64 - 4z}{5},$$

$\because y > 0, z > 0$, 且 y, z 均为整数,

$\therefore$ 当 $64 - 4z = 20$ 时, $y = 4$, $\therefore z = 11$;

当 $64 - 4z = 40$ 时, $y = 8$, $\therefore z = 6$;

当 $64 - 4z = 60$ 时, $y = 12$, $\therefore z = 1$;

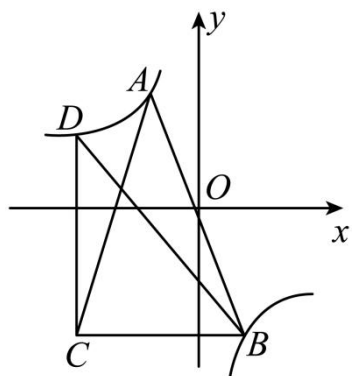
综上, 此次共有 6 种采购方案,

故选: B.

【点睛】 本题主要考查了二元一次方程的应用, 正确理解题意、进行分类讨论是解答本题的关键.

8. 如图, $\triangle ABC$ 是等腰三角形, AB 过原点 O , 底边 $BC \parallel x$ 轴, 双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 过 A, B 两点, 过点 C 作

$CD \parallel y$ 轴交双曲线于点 D , 若 $S_{\triangle BCD} = 12$, 则 k 的值是 ()



A. -6

B. -12

C. $-\frac{9}{2}$

D. -9

【答案】 C

【解析】

【分析】 设 $B\left(b, \frac{k}{b}\right)$, 根据反比例函数的中心对称性可得 $A\left(-b, -\frac{k}{b}\right)$, 然后过点 A 作 $AE \perp BC$ 于 E , 求出

$BC = 4b$, 点 D 的横坐标为 $-3b$, 再根据 $S_{\triangle BCD} = 12$ 列式求出 CD , 进而可得点 D 的纵坐标, 将点 D 坐标

代入反比例函数解析式即可求出 k 的值.

【详解】解：由题意，设 $B\left(b, \frac{k}{b}\right)$,

$\therefore AB$ 过原点 O ,

$$\therefore A\left(-b, -\frac{k}{b}\right),$$

过点 A 作 $AE \perp BC$ 于 E ,

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形,

$$\therefore CE = BE = b - (-b) = 2b,$$

$\therefore BC = 4b$, 点 D 的横坐标为 $-3b$,

$\therefore$ 底边 $BC \parallel x$ 轴, $CD \parallel y$ 轴,

$$\therefore S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} BC \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 4b \cdot CD = 12,$$

$$\therefore CD = \frac{6}{b},$$

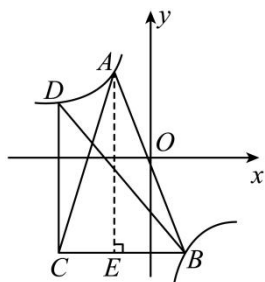
$$\therefore \text{点 } D \text{ 的纵坐标为 } \frac{6}{b} - \left(-\frac{k}{b}\right) = \frac{6+k}{b},$$

$$\therefore D\left(-3b, \frac{6+k}{b}\right),$$

$$\therefore k = -3b \cdot \frac{6+k}{b} = -3(6+k),$$

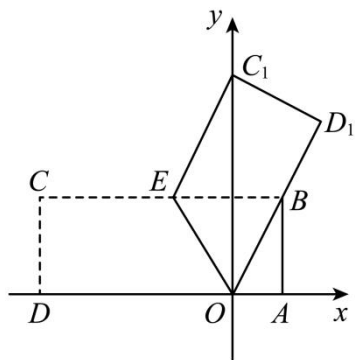
$$\text{解得: } k = -\frac{9}{2},$$

故选: C.



【点睛】本题考查了反比例函数的图象和性质，中心对称的性质，等腰三角形的性质等知识，设出点 B 坐标，正确表示出点 D 的坐标是解题的关键.

9. 如图，在平面直角坐标中，矩形 $ABCD$ 的边 $AD = 5$, $OA : OD = 1 : 4$, 将矩形 $ABCD$ 沿直线 OE 折叠到如图所示的位置，线段 OD_1 恰好经过点 B ，点 C 落在 y 轴的点 C_1 位置，点 E 的坐标是 ()



- A. $(1, 2)$ B. $(-1, 2)$ C. $(\sqrt{5}-1, 2)$ D. $(1-\sqrt{5}, 2)$

【答案】D

【解析】

【分析】首先证明 $\triangle AOB \sim \triangle D_1C_1O$ ，求出 $AB = CD = 2$ ，连结 OC ，设 BC 与 OC_1 交于点 F ，然后求出 $OC = OC_1 = 2\sqrt{5}$ ，可得 $C_1F = 2\sqrt{5} - 2$ ，再用含 EF 的式子表示出 EC_1 ，最后在 $\text{Rt}\triangle EFC_1$ 中，利用勾股定理构建方程求出 EF 即可解决问题.

【详解】解： $\because$ 矩形 $ABCD$ 的边 $AD = 5$ ， $OA : OD = 1 : 4$ ，

$$\therefore OA = 1, OD = 4, BC = 5,$$

由题意知 $AB \parallel OC_1$ ，

$$\therefore \angle ABO = \angle D_1OC_1,$$

$$\text{又} \because \angle BAO = \angle OD_1C_1 = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AOB \sim \triangle D_1C_1O,$$

$$\therefore \frac{OA}{AB} = \frac{D_1C_1}{OD_1},$$

由折叠知 $OD_1 = OD = 4$ ， $D_1C_1 = DC = AB$ ，

$$\therefore \frac{1}{AB} = \frac{AB}{4},$$

$$\therefore AB = 2, \text{ 即 } CD = 2,$$

连接 OC ，设 BC 与 OC_1 交于点 F ，

$$\therefore OC = \sqrt{OD^2 + CD^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore \angle FOA = \angle OAB = \angle ABF = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $OABF$ 是矩形，

$$\therefore AB = OF = 2, \quad \angle BFO = 90^\circ = \angle EFC_1, \quad OA = BF = 1,$$

$$\therefore CF = 5 - 1 = 4,$$

由折叠知 $OC_1 = OC = 2\sqrt{5}$, $EC_1 = EC = CF - EF = 4 - EF$,

$$\therefore C_1F = OC_1 - OF = 2\sqrt{5} - 2,$$

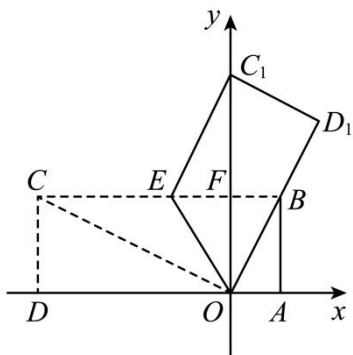
$$\therefore \text{在 Rt}\triangle EFC_1 \text{ 中, } EF^2 + C_1F^2 = EC_1^2,$$

$$\therefore EF^2 + (2\sqrt{5} - 2)^2 = (4 - EF)^2,$$

解得: $EF = \sqrt{5} - 1$,

$\therefore$ 点 E 的坐标是 $(1-\sqrt{5}, 2)$,

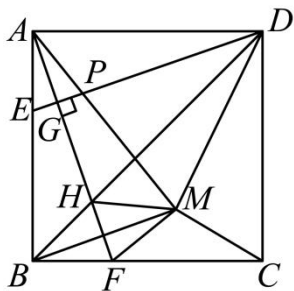
故选: D.



【点睛】本题考查了矩形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，折叠的

性质以及勾股定理的应用等知识,通过证明三角形相似,利用相似三角形的性质求出 AB 的长是解题的关键.

10. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E, F 分别是 AB, BC 上的动点, 且 $AF \perp DE$, 垂足为 G , 将 $\triangle ABF$ 沿 AF 翻折, 得到 $\triangle AMF$, AM 交 DE 于点 P , 对角线 BD 交 AF 于点 H , 连接 HM, CM, DM, BM , 下列结论正确的是: ① $AF = DE$; ② $BM \parallel DE$; ③若 $CM \perp FM$, 则四边形 $BHMF$ 是菱形; ④当点 E 运动到 AB 的中点, $\tan \angle BHF = 2\sqrt{2}$; ⑤ $EP \cdot DH = 2AG \cdot BH$. ()



- A. ①②③④⑤

- B. ①②③⑤

- C. ①②③

- D. ①②⑤

【答案】B

【解析】

【分析】利用正方形的性质和翻折的性质，逐一判断，即可解答.

【详解】解：∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore \angle DAE = \angle ABF = 90^\circ, \quad DA = AB,$$

$$\because AF \perp DE,$$

$$\therefore \angle BAF + \angle AED = 90^\circ,$$

$$\because \angle BAF + \angle AFB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AED = \angle BFA,$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle AED (\text{AAS}),$$

$$\therefore AF = DE, \text{ 故①正确,}$$

∵将 $\triangle ABF$ 沿 AF 翻折，得到 $\triangle AMF$ ，

$$\therefore BM \perp AF,$$

$$\because AF \perp DE,$$

$$\therefore BM \parallel DE, \text{ 故②正确,}$$

当 $CM \perp FM$ 时， $\angle CMF = 90^\circ$ ，

$$\because \angle AMF = \angle ABF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AMF + \angle CMF = 180^\circ, \text{ 即 } A, M, C \text{ 在同一直线上,}$$

$$\therefore \angle MCF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle MFC = 90^\circ - \angle MCF = 45^\circ,$$

通过翻折的性质可得 $\angle HBF = \angle HMF = 45^\circ$ ， $BF = MF$ ，

$$\therefore \angle HMF = \angle MFC, \quad \angle HBC = \angle MFC,$$

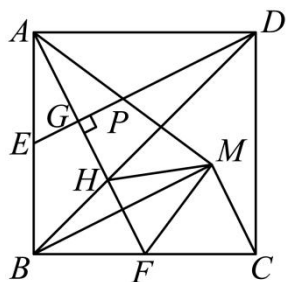
$$\therefore BC \parallel MH, HB \parallel MF,$$

∴四边形 $BHMF$ 是平行四边形，

$$\because BF = MF,$$

∴平行四边形 $BHMF$ 是菱形，故③正确，

当点 E 运动到 AB 的中点，如图，



设正方形 $ABCD$ 的边长为 $2a$ ，则 $AE = BF = a$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AED$ 中, $DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{5}a = AF$,

$$\therefore \angle AHD = \angle FHB, \angle ADH = \angle FBH = 45^\circ.$$
$$\therefore \triangle AHD \sim \triangle FHB,$$

$$\therefore \frac{FH}{AH} = \frac{BF}{AD} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AH = \frac{2}{3} AF = \frac{2\sqrt{5}}{3} a ,$$

$$\therefore \angle AGE = \angle ABF = 90^\circ,$$
$$\therefore \Delta AGF \sim \Delta ABF,$$

$$\therefore \frac{AE}{AF} = \frac{EG}{BF} = \frac{AG}{AB} = \frac{a}{\sqrt{5}a} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore EG = \frac{\sqrt{5}}{5} BF = \frac{\sqrt{5}}{5} a, \quad AG = \frac{\sqrt{5}}{5} AB = \frac{2\sqrt{5}}{5} a,$$

$$\therefore DG = ED - EG = \frac{4\sqrt{5}}{5}a, \quad GH = AH - AG = \frac{4\sqrt{5}}{15}a,$$

$$\therefore \angle BHF = \angle DHA,$$

在 $\text{Rt}\triangle DGH$ 中, $\tan \angle BHF = \tan \angle DHA = \frac{DG}{GH} = 3$, 故④错误,

$$\therefore \triangle AHD \sim \triangle FHB,$$

$$\therefore \frac{BH}{DH} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BH = \frac{1}{3}BD = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{2}a = \frac{2\sqrt{2}}{3}a, \quad DH = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3} \times 2\sqrt{2}a = \frac{4\sqrt{2}}{3}a,$$

$$\therefore AF \perp EP,$$

根据翻折的性质可得 $EP = 2EG = \frac{2\sqrt{5}}{5}a$,

$$\therefore EP \cdot DH = \frac{2\sqrt{5}}{5}a \cdot \frac{4\sqrt{2}}{3}a = \frac{8\sqrt{10}}{15}a^2,$$

$$2AG \cdot BH = 2 \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5}a \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}a = \frac{8\sqrt{10}}{15}a^2,$$

$$\therefore EP \cdot DH = 2AG \cdot BH = \frac{8\sqrt{10}}{15}a^2, \text{ 故⑤正确;}$$

综上所述可知，正确的是①②③⑤.

故选：B.

【点睛】本题考查了正方形的性质，翻折的性质，相似三角形的判定和性质，正切的概念，熟练按照要求做出图形，利用寻找相似三角形是解题的关键.

二、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

11. 据交通运输部信息显示：2023 年“五一”假期第一天，全国营运性客运量约 5699 万人次，将 5699 万用科学记数法表示为_____.

【答案】 5.699×10^7

【解析】

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 ≥ 10 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数.

【详解】5699 万 $= 56990000 = 5.699 \times 10^7$,

故答案为： 5.699×10^7 .

【点睛】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

12. 函数 $y = \sqrt{x+3}$ 中，自变量 x 的取值范围是_____.

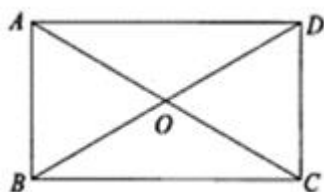
【答案】 $x \geq -3$

【解析】

【详解】解：由题意得， $x+3 \geq 0$,

解得 $x \geq -3$.

13. 如图，在矩形 $ABCD$ 中对角线 AC ， BD 交于点 O ，请添加一个条件_____，使矩形 $ABCD$ 是正方形（填一个即可）



【答案】 $AB = BC$ 或 $AC \perp BD$

【解析】

【分析】 根据正方形的判定定理可知：邻边相等的矩形是正方形，对角线互相垂直的矩形是正方形.

【详解】 $\because$ 邻边相等的矩形是正方形，

$\therefore$ 可添加条件 $AB = BC$

或者 $\because$ 对角线互相垂直的矩形是正方形

$\therefore$ 还可以添加条件 $AC \perp BD$

【点睛】 本题考查正方形的判定，找出正方形与矩形的性质差异，即为可添加的条件.

14. 一个不透明的袋子中装有 3 个红球和 2 个白球，这些小球除标号外完全相同，随机摸出两个小球，恰好是一红一白的概率是_____.

【答案】 $\frac{3}{5}$ 或 0.6

【解析】

【分析】 首先根据题意列出表格，然后由表格求得所有等可能的结果与随机摸出一红一白的情况，再利用概率公式即可求得答案.

【详解】 解：列表得：

	红 1	红 2	红 3	白 1	白 2
红 1		(红 1, 红 2)	(红 1, 红 3)	(红 1, 白 1)	(红 1, 白 2)
红 2	(红 2, 红 1)		(红 2, 红 3)	(红 2, 白 1)	(红 2, 白 2)
红 3	(红 3, 红 1)	(红 3, 红 2)		(红 3, 白 1)	(红 3, 白 2)
白 1	(白 1, 红 1)	(白 1, 红 2)	(白 1, 红 3)		(白 1, 白 2)
白 2	(白 2, 红 1)	(白 2, 红 2)	(白 2, 红 3)	(白 2, 白 1)	

由列表可知：共有 20 种等可能的结果，其中随机摸出两个小球，恰好是一红一白的情况有 12 种，

$\therefore$ 恰好是一红一白的概率是 $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$,

故答案为： $\frac{3}{5}$.

【点睛】 本题考查的是用列表法或画树状图法求概率. 注意列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果, 列表法适合于两步完成的事件, 树状图法适合两步或两步以上完成的事件. 用到的知识点为: 概率 = 所求情况数与总情况数之比.

15. 关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x+5>0 \\ x-m\leq 1 \end{cases}$ 有 3 个整数解, 则实数 m 的取值范围是_____.

【答案】 $-3\leq m<-2$ 或 $-2>m\geq -3$

【解析】

【分析】 解不等式组, 根据不等式组有 3 个整数解得出关于 m 的不等式组, 进而可求得 m 的取值范围.

【详解】 解: 解不等式组 $\begin{cases} x+5>0 \\ x-m\leq 1 \end{cases}$ 得: $-5<x\leq m+1$,

$\therefore$ 关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x+5>0 \\ x-m\leq 1 \end{cases}$ 有 3 个整数解,

$\therefore$ 这 3 个整数解为 $-4, -3, -2$,

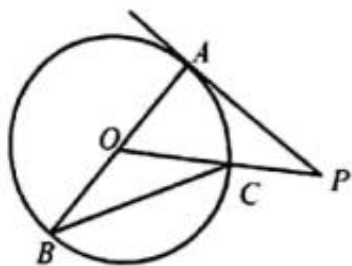
$\therefore -2\leq m+1<-1$,

解得: $-3\leq m<-2$,

故答案为: $-3\leq m<-2$.

【点睛】 本题考查了解一元一次不等式组, 一元一次不等式组的整数解, 正确得出关于 m 的不等式组是解题的关键.

16. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, PA 切 $\odot O$ 于点 A , PO 交 $\odot O$ 于点 C , 连接 BC , 若 $\angle B = 28^\circ$, 则 $\angle P =$ _____ $^\circ$.



【答案】 34

【解析】

【分析】 首先根据等边对等角得到 $\angle B = \angle OCB = 28^\circ$, 然后利用外角的性质得到 $\angle AOC = \angle B + \angle OCB = 56^\circ$, 利用切线的性质得到 $\angle OAP = 90^\circ$, 最后利用三角形内角和定理求解即可.

【详解】 解: $\because \angle B = 28^\circ, OB = OC$,

$$\therefore \angle B = \angle OCB = 28^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC = \angle B + \angle OCB = 56^\circ,$$

$\because PA$ 切 $\odot O$ 于点 A ,

$$\therefore \angle OAP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle P = 180^\circ - \angle OAP - \angle AOP = 34^\circ.$$

故答案为：34.

【点睛】此题考查了切线的性质和三角形的外角的性质，三角形内角和定理等知识，解题的关键是熟练掌握以上知识点.

17. 已知圆锥的母线长 13cm，侧面积 $65\pi\text{cm}^2$ ，则这个圆锥的高是_____cm.

【答案】12

【解析】

【分析】利用圆锥的侧面积公式可得到底面半径，再利用勾股定理即可得到高.

【详解】解：根据圆锥侧面积公式 $S_{\text{侧}} = \pi r l$ 变形可得 $r = \frac{S_{\text{侧}}}{\pi l} = \frac{65\pi}{13\pi} = 5\text{cm}$,

根据圆锥母线公式 $l = \sqrt{r^2 + h^2}$ ，可得 $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\text{cm}$ ，

故答案为：12.

【点睛】本题考查了圆锥的侧面积公式和母线公式，熟知上述公式是解题的关键.

18. 在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中， $\angle BAC = 30^\circ$, $CB = 2$ ，点 E 是斜边 AB 的中点，把 $\text{Rt}\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转，得 $\text{Rt}\triangle AFD$ ，点 C ，点 B 旋转后的对应点分别是点 D ，点 F ，连接 CF ， EF ， CE ，在旋转的过程中， $\triangle CEF$ 面积的最大值是_____.

【答案】 $4 + \sqrt{3}$

【解析】

【分析】过点 A 作 $AG \perp CE$ 交 CE 的延长线于点 G ，求出 $AG = \frac{1}{2}AC = \sqrt{3}$ ，然后由旋转的性质可知点 F 在以 A 为圆心 AB 的长为半径的圆上运动，则可得如图中 G 、 A 、 F 三点共线时点 F 到直线 CE 的距离最大，求出距离的最大值，然后计算即可.

【详解】解：如图，在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中， $\angle BAC = 30^\circ$ ， $CB = 2$ ，点 E 是斜边 AB 的中点，

$$\therefore AB = 2CB = 4, \quad CE = \frac{1}{2}AB = 2 = AE, \quad AC = \sqrt{3}BC = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \angle ECA = \angle BAC = 30^\circ,$$

过点 A 作 $AG \perp CE$ 交 CE 的延长线于点 G ,

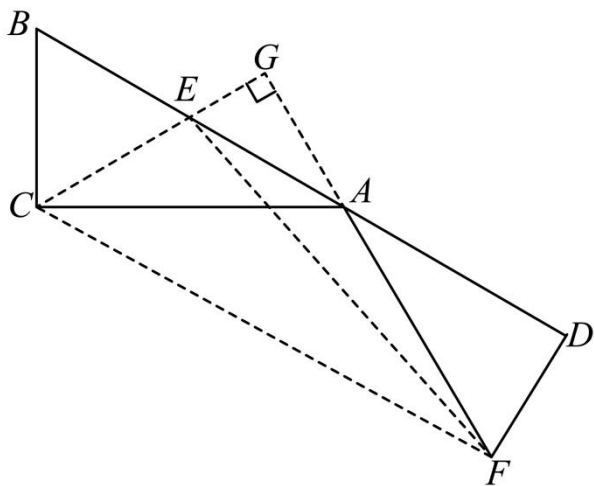
$$\therefore AG = \frac{1}{2} AC = \sqrt{3},$$

又 $\because$ 在旋转的过程中, 点 F 在以 A 为圆心 AB 的长为半径的圆上运动, $AF = AB = 4$,

$\therefore$ 点 F 到直线 CE 的距离的最大值为 $4 + \sqrt{3}$, (如图, G 、 A 、 F 三点共线时)

$$\therefore \triangle CEF \text{ 面积的最大值} = \frac{1}{2} CE \times (4 + \sqrt{3}) = \frac{1}{2} \times 2 \times (4 + \sqrt{3}) = 4 + \sqrt{3},$$

故答案为: $4 + \sqrt{3}$.



【点睛】本题考查了含 30° 直角三角形的性质, 直角三

角形斜边中线的性质, 旋转的性质, 圆的基本性质等知识, 根据旋转的性质求出点 F 到直线 CE 距离的最大值是解答本题的关键.

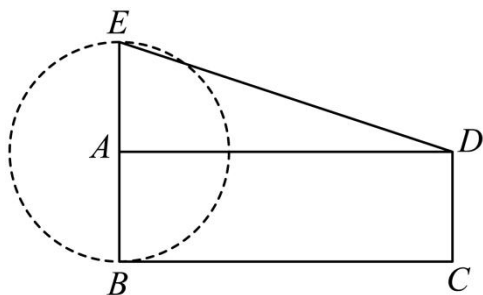
19. 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 3$, $AD = 9$, 将矩形 $ABCD$ 沿过点 A 的直线折叠, 使点 B 落在点 E 处, 若 $\triangle ADE$ 是直角三角形, 则点 E 到直线 BC 的距离是_____.

【答案】6 或 $3 + 2\sqrt{2}$ 或 $3 - 2\sqrt{2}$

【解析】

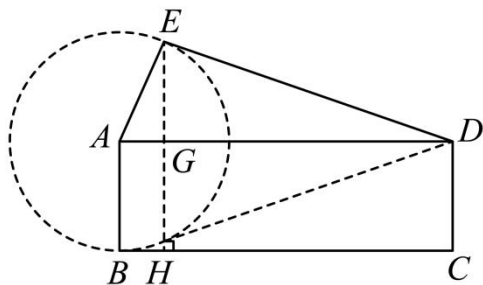
【分析】由折叠的性质可得点 E 在以点 A 为圆心, AB 长为半径的圆上运动, 延长 BA 交 $\odot A$ 的另一侧于点 E , 则此时 $\triangle ADE$ 是直角三角形, 易得点 E 到直线 BC 的距离; 当过点 D 的直线与圆相切于点 E 时, $\triangle ADE$ 是直角三角形, 分两种情况讨论即可求解.

【详解】解: 由题意矩形 $ABCD$ 沿过点 A 的直线折叠, 使点 B 落在点 E 处, 可知点 E 在以点 A 为圆心, AB 长为半径的圆上运动, 如图, 延长 BA 交 $\odot A$ 的另一侧于点 E , 则此时 $\triangle ADE$ 是直角三角形, 点 E 到直线 BC 的距离为 BE 的长度, 即 $BE = 2AB = 6$,



当过点 D 的直线与圆相切与点 E 时， $\triangle ADE$ 是直角三角形，分两种情况，

①如图，过点 E 作 $EH \perp BC$ 交 BC 于点 H ，交 AD 于点 G ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore EG \perp AD$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABHG$ 是矩形， $GH = AB = 3$

$\because AE = AB = 3$ ， $AE \perp DE$ ， $AD = 9$ ，

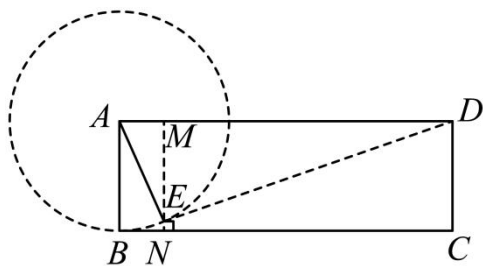
由勾股定理可得 $DE = \sqrt{9^2 - 3^2} = 6\sqrt{2}$ ，

$$\because S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} AE \cdot DE = \frac{1}{2} AD \cdot EG,$$

$\therefore EG = 2\sqrt{2}$ ，

$\therefore E$ 到直线 BC 的距离 $EH = EG + GH = 3 + 2\sqrt{2}$ ，

②如图，过点 E 作 $EN \perp BC$ 交 BC 于点 N ，交 AD 于点 M ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore NM \perp AD$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABNM$ 是矩形， $MN = AB = 3$

$\because AE = AB = 3$ ， $AE \perp DE$ ， $AD = 9$ ，

由勾股定理可得 $DE = \sqrt{9^2 - 3^2} = 6\sqrt{2}$,

$$\therefore S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} AE \cdot DE = \frac{1}{2} AD \cdot EM,$$

$$\therefore EM = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore E \text{ 到直线 } BC \text{ 的距离 } EN = MN - GN = 3 - 2\sqrt{2},$$

综上, 6 或 $3 + 2\sqrt{2}$ 或 $3 - 2\sqrt{2}$,

故答案为: 6 或 $3 + 2\sqrt{2}$ 或 $3 - 2\sqrt{2}$.

【点睛】 本题考查了矩形的折叠问题切线的应用, 以及勾股定理, 找到点 E 的运动轨迹是解题的关键.

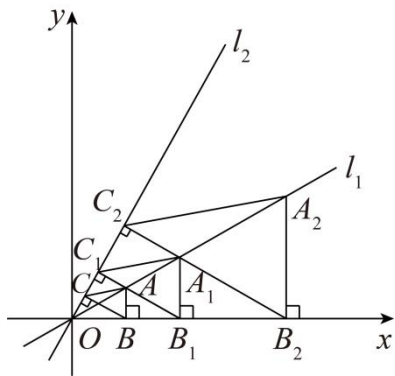
20. 如图, 在平面直角坐标系中, $\triangle ABC$ 的顶点 A 在直线 $l_1: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 上, 顶点 B 在 x 轴上, AB 垂直 x 轴,

且 $OB = 2\sqrt{2}$, 顶点 C 在直线 $l_2: y = \sqrt{3}x$ 上, $BC \perp l_2$; 过点 A 作直线 l_2 的垂线, 垂足为 C_1 , 交 x 轴于 B_1 ,

过点 B_1 作 A_1B_1 垂直 x 轴, 交 l_1 于点 A_1 , 连接 A_1C_1 , 得到第一个 $\triangle A_1B_1C_1$; 过点 A_1 作直线 l_2 的垂线, 垂足

为 C_2 , 交 x 轴于 B_2 , 过点 B_2 作 A_2B_2 垂直 x 轴, 交 l_1 于点 A_2 , 连接 A_2C_2 , 得到第二个 $\triangle A_2B_2C_2$; 如此下

去, $\dots\dots$, 则 $\triangle A_{2023}B_{2023}C_{2023}$ 的面积是_____.



【答案】 $2^{4046}\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 解直角三角形得出 $\angle AOB = 30^\circ$, $\angle BOC = 60^\circ$, 求出 $S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}$, 证明 $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$,

$\triangle ABC \sim \triangle A_2B_2C_2$, 得出 $S_{\triangle A_1B_1C_1} = 4S_{\triangle ABC}$, $S_{\triangle A_2B_2C_2} = 4^2 \cdot S_{\triangle ABC} = (2^2)^2 \cdot S_{\triangle ABC}$, 总结得出

$$S_{\triangle A_nB_nC_n} = (2^n)^2 S_{\triangle ABC} = 2^{2n} S_{\triangle ABC}, \text{ 从而得出 } S_{\triangle A_{2023}B_{2023}C_{2023}} = 2^{2 \times 2023} \times \sqrt{3} = 2^{4046} \sqrt{3}.$$

【详解】 解: $\because OB = 2\sqrt{2}$,

$$\therefore B(2\sqrt{2}, 0),$$

$$\because AB \perp x \text{轴},$$

$$\therefore \text{点 } A \text{ 的横坐标为 } 2\sqrt{2},$$

$$\because l_1: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x,$$

$$\therefore \text{点 } A \text{ 的纵坐标为 } \frac{\sqrt{3}}{3} \times 2\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{6}}{3},$$

$$\therefore \tan \angle AOB = \frac{AB}{OB} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle AOB = 30^\circ,$$

$$\because l_2: y = \sqrt{3}x,$$

$$\therefore \text{设 } C(x_C, y_C), \text{ 则 } y_C = \sqrt{3}x_C,$$

$$\therefore \tan \angle BOC = \frac{y_C}{x_C} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \angle BOC = 60^\circ,$$

$$\therefore OC = OB \times \cos 60^\circ = 2\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \sqrt{2},$$

$$BC = OB \times \sin 60^\circ = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6},$$

$$\therefore \angle AOC_1 = \angle BOC - \angle AOB = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB = \angle AOC_1,$$

$$\therefore OA \text{ 平分 } \angle BOC,$$

$$\because AC_1 \perp l_2, \quad AB \perp OB,$$

$$\therefore AC_1 = AB = \frac{2\sqrt{6}}{3},$$

$$\because AB = AC_1, \quad OA = OA,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle OAB \cong \text{Rt}\triangle OAC_1,$$

$$\therefore OC_1 = OB = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore CC_1 = OC_1 - OC = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle OAB} - S_{\triangle ACC_1} - S_{\triangle BOC}$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} - \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} - \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{6}$$

$$= \sqrt{3},$$

$$\therefore BC \perp l_2,$$

$$\therefore \angle BCO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CBO = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore B_1C_1 \perp l_2, \quad BC \perp l_2, \quad B_2C_2 \perp l_2,$$

$$\therefore BC \parallel B_1C_1 \parallel B_2C_2,$$

$$\therefore \angle C_1B_1O = \angle C_2B_2O = \angle CBO = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle C_1B_1O = \angle C_2B_2O = \angle CBO = \angle AOB,$$

$$\therefore AO = AB_1, \quad A_1O = A_1B_2,$$

$$\therefore AB \perp x \text{轴}, \quad A_1B_1 \perp x \text{轴},$$

$$\therefore OB = \frac{1}{2}OB_1, \quad OB_1 = \frac{1}{2}OB_2,$$

$$\therefore AB \perp x \text{轴}, \quad A_1B_1 \perp x \text{轴}, \quad A_2B_2 \perp x \text{轴},$$

$$\therefore AB \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2,$$

$$\therefore \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OB}{OB_1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{AB}{A_2B_2} = \frac{OB}{OB_2} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore BC \parallel B_1C_1 \parallel B_2C_2,$$

$$\therefore \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{OB}{OB_1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{BC}{B_2C_2} = \frac{OB}{OB_2} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1},$$

$$\therefore \angle ABC = \angle A_1 B_1 C_1 = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A_1 B_1 C_1,$$

$$\text{同理 } \triangle ABC \sim \triangle A_2 B_2 C_2,$$

$$\therefore S_{\triangle A_1 B_1 C_1} = 4 S_{\triangle ABC},$$

$$S_{\triangle A_2 B_2 C_2} = 4^2 \cdot S_{\triangle ABC} = (2^2)^2 \cdot S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore S_{\triangle A_n B_n C_n} = (2^n)^2 S_{\triangle ABC} = 2^{2n} S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore S_{\triangle A_{2023} B_{2023} C_{2023}} = 2^{2 \times 2023} \times \sqrt{3} = 2^{4046} \sqrt{3}.$$

故答案为： $2^{4046} \sqrt{3}$.

【点睛】 本题主要考查了三角形相似的判定和性质，解直角三角形，三角形面积的计算，平行线的判定和性质，一次函数规律探究，角平分线的性质，三角形全等的判定和性质，解题的关键是得出一般规律

$$S_{\triangle A_n B_n C_n} = (2^n)^2 S_{\triangle ABC} = 2^{2n} S_{\triangle ABC}.$$

三、解答题（满分 60 分）

21. 先化简，再求值： $\left(1 - \frac{2}{m+1}\right) \div \frac{m^2 - 2m + 1}{m^2 - m}$ ，其中 $m = \tan 60^\circ - 1$.

【答案】 $\frac{m}{m+1}$ ，原式 = $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】 先根据分式的混合运算法则化简，然后求出 $m = \sqrt{3} - 1$ ，最后代值计算即可.

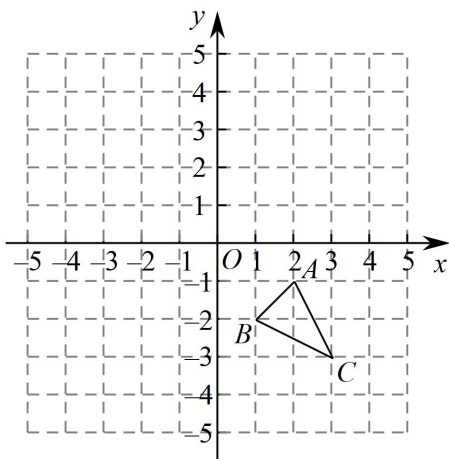
$$\begin{aligned} \text{【详解】 解：} & \left(1 - \frac{2}{m+1}\right) \div \frac{m^2 - 2m + 1}{m^2 - m} \\ &= \frac{m+1-2}{m+1} \div \frac{(m-1)^2}{m(m-1)} \\ &= \frac{m-1}{m+1} \cdot \frac{m(m-1)}{(m-1)^2} \\ &= \frac{m}{m+1}, \end{aligned}$$

$$\therefore m = \tan 60^\circ - 1 = \sqrt{3} - 1,$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1+1} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}.$$

【点睛】本题主要考查了分式的化简求值，求特殊角三角函数值，正确计算是解题的关键.

22. 如图，在平面直角坐标系中，已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点坐标分别是 $A(2, -1)$, $B(1, -2)$, $C(3, -3)$.



- (1) 将 $\triangle ABC$ 向上平移 4 个单位，再向右平移 1 个单位，得到 $\triangle A_1B_1C_1$ ，请画出 $\triangle A_1B_1C_1$.
- (2) 请画出 $\triangle ABC$ 关于 y 轴对称的 $\triangle A_2B_2C_2$.
- (3) 将 $\triangle A_2B_2C_2$ 着原点 O 顺时针旋转 90° ，得到 $\triangle A_3B_3C_3$ ，求线段 A_2C_2 在旋转过程中扫过的面积（结果保留 π ）.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

(3) $\frac{13\pi}{4}$

【解析】

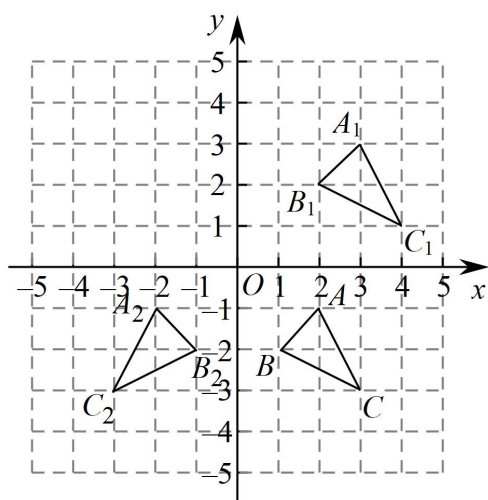
【分析】(1) 根据平移的性质得出对应点的位置进而画出图形；

(2) 利用轴对称的性质得出对应点的位置进而画出图形；

(3) 画出旋转后的图形，根据 $S_{C_3A_3A_2C_2} = S_{C_3DEC_2} = S_{\text{扇形}C_2OC_3} - S_{\text{扇形}DOE}$ 即可得出答案.

【小问 1 详解】

解：如图所示， $\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求；

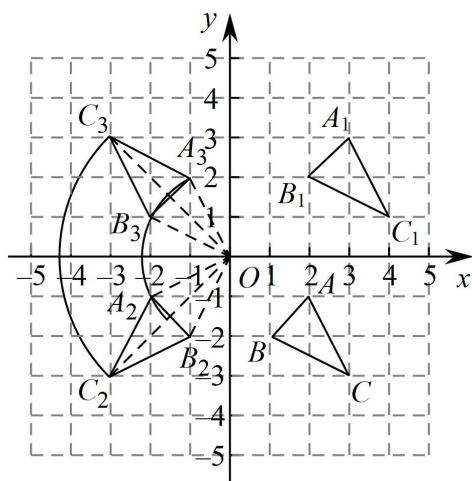


【小问 2 详解】

如图所示， $\triangle A_2B_2C_2$ 即为所求；

【小问 3 详解】

将 $\triangle A_2B_2C_2$ 着原点 O 顺时针旋转 90° ，得到 $\triangle A_3B_3C_3$ ，



设 $\widehat{A_2A_3}$ 所在圆交 OC_3 于点 D ，交 OC_2 于点 E ，

$$\because OA_2 = OA_3, \quad OC_2 = OC_3,$$

$$\therefore C_2E = C_3D,$$

$$\because \angle A_3OA_2 = 90^\circ, \quad \angle C_2OC_3 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A_3OD = \angle A_2OE,$$

$$\therefore \widehat{A_3D} = \widehat{A_2E},$$

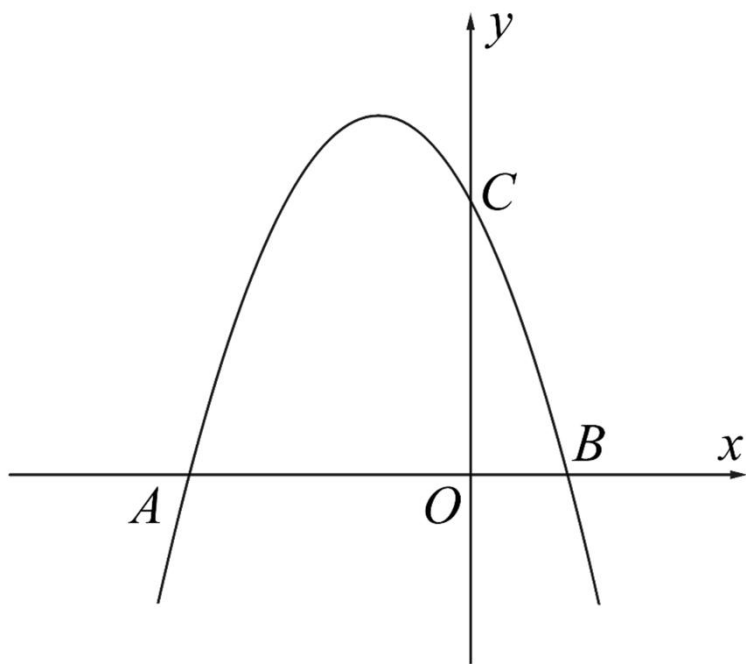
$$\therefore S_{\text{曲边} \triangle A_3C_3D} = S_{\text{曲边} \triangle A_2C_2E}, \quad OC_3 = 3\sqrt{2}, \quad OD = OA_2 = \sqrt{5},$$

$$\therefore S_{C_3A_3A_2C_2} = S_{C_3DEC_2} = S_{\text{扇}C_2OC_3} - S_{\text{扇}DOE} = \frac{90^\circ\pi(OC_3)^2}{360^\circ} - \frac{90^\circ\pi(OD)^2}{360^\circ} = \frac{90^\circ\pi(3\sqrt{2})^2}{360^\circ} - \frac{90^\circ\pi(\sqrt{5})^2}{360^\circ} = \frac{13\pi}{4},$$

故线段 A_2C_2 在旋转过程中扫过的面积为 $\frac{13\pi}{4}$.

【点睛】本题考查平移、轴对称变换作图和旋转的性质以及扇形的面积，熟练掌握网格结构准确找出对应点的位置是解题的关键.

23. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 与 x 轴交于 $A(-3, 0), B(1, 0)$ 两点，交 y 轴于点 C .



(1) 求抛物线的解析式.

(2) 抛物线上是否存在一点 P ，使得 $S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$ ，若存在，请直接写出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

【答案】(1) $y = -x^2 - 2x + 3$

(2) 存在，点 P 的坐标为 $(-2, 3)$ 或 $(3, -12)$

【解析】

【分析】(1) 采用待定系数法，将点 A 和点 B 坐标直接代入抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ ，即可求得抛物线的解析式.

(2) 过线段 AB 的中点 D ，且与 BC 平行的直线上的点与点 B ，点 C 连线组成的三角形的面积都等于 $\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$ ，则此直线与抛物线的交点即为所求；求出此直线的解析式，与抛物线解析式联立，即可求得答案.

【小问 1 详解】

解：因为抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 经过点 $A(-3, 0)$ 和点 $B(1, 0)$ 两点，所以

$$\begin{cases} 9a - 3b + 3 = 0 \\ a + b + 3 = 0 \end{cases},$$

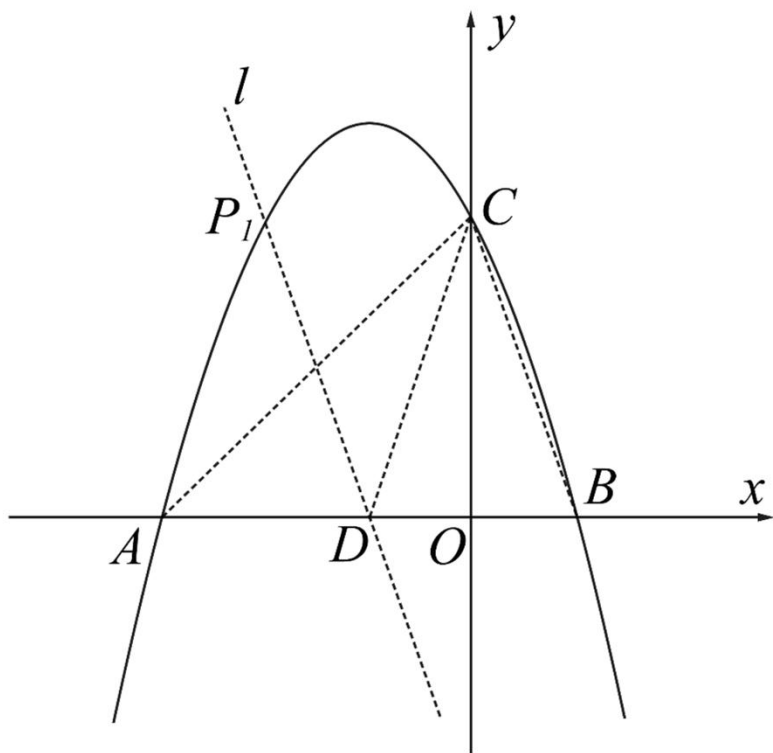
解得

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases},$$

所以抛物线解析式为： $y = -x^2 - 2x + 3$.

【小问 2 详解】

解：如图，设线段 AB 的中点为 D ，可知点 D 的坐标为 $(-1, 0)$ ，过点 D 作与 BC 平行的直线 l ，假设与抛物线交于点 P_1 ， P_2 (P_1 在 P_2 的左边)，(P_2 在图中未能显示)。



设直线 BC 的函数解析式为 $y = kx + b_1$ ($k \neq 0$) .

因为直线 BC 经过点 $B(1, 0)$ 和 $C(0, 3)$ ，所以

$$\begin{cases} k + b_1 = 0 \\ b_1 = 3 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -3 \\ b_1 = 3 \end{cases},$$

所以，直线 BC 的函数解析式为： $y = -3x + 3$.

又 $P_1P_2 // BC$,

可设直线 P_1P_2 的函数解析式为 $y = -3x + b_2$,

因为直线 P_1P_2 经过点 $D (-1, 0)$, 所以

$$3 + b_2 = 0 .$$

解得 $b_2 = -3$.

所以，直线 P_1P_2 的函数解析式为 $y = -3x - 3$.

根据题意可知，

$$S_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} .$$

又 $P_1P_2 // BC$,

所以，直线 P_1P_2 上任意一点 P' 与点 B , 点 C 连线组成的 $\triangle P'BC$ 的面积都满足 $S_{\triangle P'BC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$.

所以，直线 P_1P_2 与抛物线 $y = -x^2 - 2x + 3$ 的交点 P_1 , P_2 即为所求，可得

$$-3x - 3 = -x^2 - 2x + 3 ,$$

化简，得

$$x^2 - x - 6 = 0 ,$$

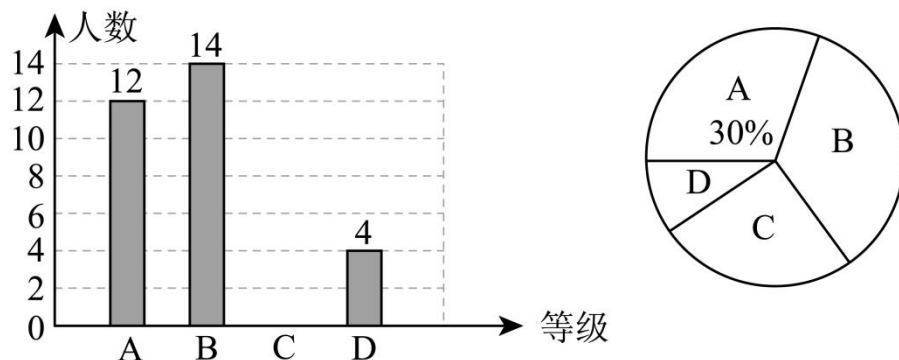
解得 $x_1 = 3$, $x_2 = -2$,

所以，点 P_1 的坐标为 $(-2, 3)$, 点 P_2 的坐标为 $(3, -12)$.

故答案为：存在，点 P 的坐标为 $(-2, 3)$ 或 $(3, -12)$.

【点睛】 本题主要考查二次函数的图象和性质、一次函数的图象和性质、一元二次方程、一元一次方程等，灵活结合二次函数和一次函数图象特点是解题的关键.

24. 某中学开展主题为“垃圾分类，绿色生活”的宣传活动中，为了解学生对垃圾分类知识的掌握情况，该校团委在校园内随机抽取了部分学生进行问卷调查，将他们的得分按 A ：优秀， B ：良好， C ：合格， D ：不合格四个等级进行统计，并绘制了如下不完整的条形统计图和扇形统计图.



- (1) 这次学校抽查的学生人数是_____人；
- (2) 将条形图补充完整；
- (3) 扇形统计图中 C 组对应的扇形圆心角度数是_____°；
- (4) 如果该校共有 2200 人，请估计该校不合格的人数.

【答案】 (1) 40 (2) 见解析

(3) 90

(4) 220 人

【解析】

【分析】 (1) 用 A ：优秀的人数除以其人数占比即可求出参与调查的学生人数；

(2) 先求出 C ：合格的人数，再补全统计图即可；

(3) 用 360 度乘以 C 组对应人数占比即可得到答案；

(4) 用 2200 乘以样本中 D 组对应的人数占比即可得到答案.

【小问 1 详解】

解： $12 \div 30\% = 40$ 人，

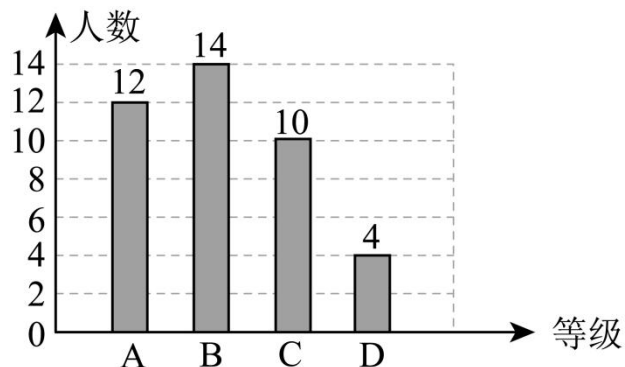
$\therefore$ 这次学校抽查的学生人数是 40 人，

故答案为：40；

【小问 2 详解】

解： 由 (1) 得 C ：合格的人数为 $40 - 12 - 14 - 4 = 10$ 人，

补全统计图如下所示：



【小问 3 详解】

解： $360^\circ \times \frac{10}{40} = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 扇形统计图中 C 组对应的扇形圆心角度数是 90° ，

故答案为：90；

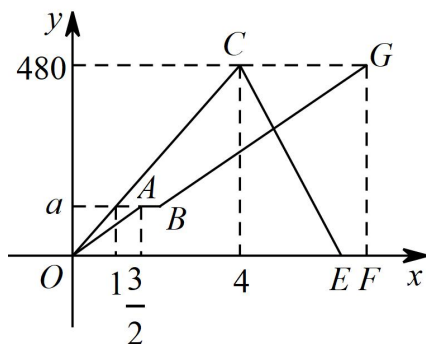
【小问 4 详解】

解： $2200 \times \frac{4}{40} = 220$ 人，

$\therefore$ 估计该校不合格的人数为 220 人。

【点睛】 本题主要考查了条形统计图与扇形统计图信息相关联，用样本估计总体，正确读懂统计图是解题的关键。

25. 已知甲、乙两地相距 480km，一辆出租车从甲地出发往返于甲乙两地，一辆货车沿同一条公路从乙地前往甲地，两车同时出发，货车途经服务区时，停下来装完货物后，发现此时与出租车相距 120km，货车继续出发 $\frac{2}{3}h$ 后与出租车相遇。出租车到达乙地后立即按原路返回，结果比货车早 15 分钟到达甲地。如图是两车距各自出发地的距离 $y(km)$ 与货车行驶时间 $x(h)$ 之间的函数图象，结合图象回答下列问题：



(1) 图中 a 的值是_____；

(2) 求货车装完货物后驶往甲地的过程中，距其出发地的距离 $y(km)$ 与行驶时间 $x(h)$ 之间的函数关系式；

(3) 直接写出在出租车返回的行驶过程中，货车出发多长时间与出租车相距 12km。

【答案】 (1) 120 (2) $y = 60x$

(3) $\frac{125}{17}h$ 或 $\frac{131}{17}h$

【解析】

【分析】 (1) 利用待定系数法求得 OC 的解析式，将 $(1, a)$ 代入解析式，解方程即可解答；

(2) 根据题意可得 a 的值，即为货车装货时距离乙地的长度，结合货车停下来装完货物后，发现此时与出租车相距 120km，可求出装货时间，即点 B 的坐标，再根据货车继续出发 $\frac{2}{3}h$ 后与出租车相遇，求出装完货后货车的速度，即直线 BG 的解析式中 k 的值，最后将点 B 坐标代入直线 BG 的解析式，利用待定系数

法即可解答；

(3) 根据 (2) 中直线 BG 的解析式求得点 F 的坐标，结合题意，可得点 E 的坐标，从而可得到出租车返回时的速度，然后进行分类讨论：①出租车和货车第二次相遇前，相距 12km 时；②出租车和货车第二次相遇后，距离 12km 时，分别进行解答即可。

【小问 1 详解】

解：结合图象，可得 $C(4, 480)$ ，

设直线 OC 的解析式为 $y = kx$ ，

将 $C(4, 480)$ 代入解析式，可得 $480 = 4k$ ，解得 $k = 120$ ，

$\therefore$ 直线 OC 的解析式为 $y = 120x$ ，

把 $(1, a)$ 代入 $y = 120x$ ，得 $a = 120$ ，

故答案为：120；

【小问 2 详解】

解：根据货车停下来装完货物后，发现此时与出租车相距 120km ，

可得此时出租车距离乙地为 $120 + 120 = 240\text{km}$ ，

$\therefore$ 出租车距离甲地为 $480 - 240 = 240\text{km}$ ，

把 $y = 240$ 代入 $y = 120x$ ，可得 $240 = 120x$ ，解得 $x = 2$ ，

$\therefore$ 货车装完货时， $x = 2$ ，可得 $B(2, 120)$ ，

根据货车继续出发 $\frac{2}{3}\text{h}$ 后与出租车相遇，可得 $\frac{2}{3} \times (\text{出租车的速度} + \text{货车的速度}) = 120$ ，

根据直线 OC 的解析式为 $y = 120x$ ，可得出出租车的速度为 120km/h ，

$\therefore$ 相遇时，货车的速度为 $120 \div \frac{2}{3} - 120 = 60\text{km/h}$ ，

故可设直线 BG 的解析式为 $y = 60x + b$ ，

将 $B(2, 120)$ 代入 $y = 60x + b$ ，可得 $120 = 120 + b$ ，解得 $b = 0$ ，

$\therefore$ 直线 BG 的解析式为 $y = 60x$ ，

故货车装完货物后驶往甲地的过程中，距其出发地的距离 $y(\text{km})$ 与行驶时间 $x(\text{h})$ 之间的函数关系式为

$y = 60x$ ；

【小问 3 详解】

解：把 $y = 480$ 代入 $y = 60x$ ，可得 $480 = 60x$ ，解得 $x = 8$ ，

$$\therefore G(8, 480),$$

$$\therefore F(8, 0),$$

根据出租车到达乙地后立即按原路返回，结果比货车早 15 分钟到达甲地，可得 $EF = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$ ，

$$\therefore E\left(\frac{31}{4}, 0\right),$$

$$\therefore \text{出租车返回时的速度为 } 480 \div \left(\frac{31}{4} - 4\right) = 128 \text{ km/h},$$

设在出租车返回的行驶过程中，货车出发 t 小时，与出租车相距 12km，

此时货车距离乙地为 $60t$ km，出租车距离乙地为 $128(t-4) = (128t-512)$ km，

①出租车和货车第二次相遇前，相距 12km 时；

$$\text{可得 } 60t_1 - (128t_1 - 512) = 12,$$

$$\text{解得 } t_1 = \frac{125}{17},$$

②出租车和货车第二次相遇后，相距 12km 时；

$$\text{可得 } (128t_2 - 512) - 60t_2 = 12,$$

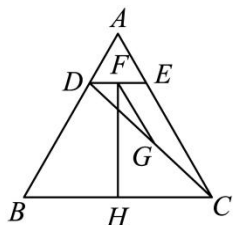
$$\text{解得 } t_2 = \frac{131}{17},$$

故在出租车返回的行驶过程中，货车出发 $\frac{125}{17}h$ 或 $\frac{131}{17}h$ 与出租车相距 12km.

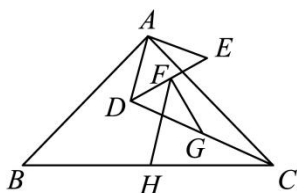
【点睛】本题考查了从函数图象获取信息，用待定系数法求一次函数，一次函数的实际应用，能准确地理解题意，根据题中信息求得所需数据是解题的关键.

26. 如图①， $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 是等边三角形，连接 DC ，点 F, G, H 分别是 DE, DC 和 BC 的中点，连接 FG, FH . 易证： $FH = \sqrt{3}FG$.

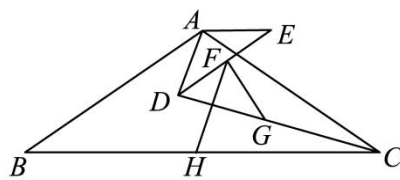
若 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等腰直角三角形，且 $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ ，如图②：若 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等腰三角形，且 $\angle BAC = \angle DAE = 120^\circ$ ，如图③：其他条件不变，判断 FH 和 FG 之间的数量关系，写出你的猜想，并利用图②或图③进行证明.



图①



图②



图③

【答案】图②中 $FH = \sqrt{2}FG$ ，图③中 $FH = FG$ ，证明见解析

【解析】

【分析】图②：如图②所示，连接 BD ， HG ， CE ，先由三角形中位线定理得到 $FG \parallel CE$ ， $FG = \frac{1}{2}CE$ ， $GH \parallel BD$ ， $GH = \frac{1}{2}BD$ ，再证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ 得到 $CE = BD$ ， $\angle ACE = \angle ABD$ ，则 $FG = HG$ ，进一步证明 $\angle FGH = 90^\circ$ ，即可证明 $\triangle HGF$ 是等腰直角三角形，则 $FH = \sqrt{2}FG$ ；

图③：仿照图②证明 $\triangle HGF$ 是等边三角形，则 $FH = FG$ 。

【详解】解：图②中 $FH = \sqrt{2}FG$ ，图③中 $FH = FG$ ，

图②证明如下：

如图②所示，连接 BD ， HG ， CE ，

$\because$ 点 F ， G 分别是 DE ， DC 的中点，

$\therefore FG$ 是 $\triangle CDE$ 的中位线，

$\therefore FG \parallel CE$ ， $FG = \frac{1}{2}CE$ ，

同理可得 $GH \parallel BD$ ， $GH = \frac{1}{2}BD$ ，

$\because \triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等腰直角三角形，且 $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ ，

$\therefore AB = AC$ ， $\angle BAD = \angle CAE$ ， $AD = AE$ ，

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS)，

$\therefore CE = BD$ ， $\angle ACE = \angle ABD$ ，

$\therefore FG = HG$ ，

$\because BD \parallel GH$ ， $FG \parallel CE$ ，

$\therefore \angle FGH = \angle FGD + \angle HGD$

$= \angle DCE + \angle GHC + \angle GCH$

$= \angle DBC + \angle DCB + \angle ACD + \angle ACE$

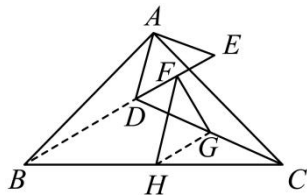
$= \angle DBC + \angle ABD + \angle ACB$

$$= \angle ACB + \angle ABC$$

$$= 90^\circ,$$

$\therefore \triangle HGF$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore FH = \sqrt{2}FG;$$



图②

图③证明如下:

如图③所示, 连接 BD , HG , CE ,

$\therefore$ 点 F , G 分别是 DE , DC 的中点,

$\therefore FG$ 是 $\triangle CDE$ 的中位线,

$$\therefore FG \parallel CE, FG = \frac{1}{2}CE,$$

同理可得 $GH \parallel BD$, $GH = \frac{1}{2}BD$,

$\therefore \triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等腰三角形, 且 $\angle BAC = \angle DAE = 120^\circ$,

$\therefore AB = AC$, $\angle BAD = \angle CAE$, $AD = AE$,

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS),

$\therefore CE = BD$, $\angle ACE = \angle ABD$,

$\therefore FG = HG$,

$\therefore BD \parallel GH$, $FG \parallel CE$,

$$\therefore \angle FGH = \angle FGD + \angle HGD$$

$$= \angle DCE + \angle GHC + \angle GCH$$

$$= \angle DBC + \angle DCB + \angle ACD + \angle ACE$$

$$= \angle DBC + \angle ABD + \angle ACB$$

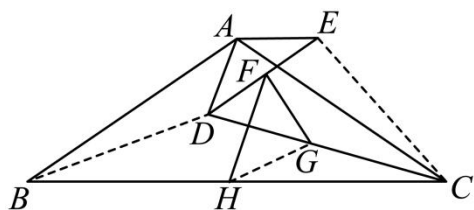
$$= \angle ACB + \angle ABC$$

$$= 180^\circ - \angle BAC$$

$$= 60^\circ,$$

$\therefore \triangle HGF$ 是等边三角形,

$$\therefore FH = FG.$$



图③

【点睛】本题主要考查了全等三角形的性质与判定，三角形中位线

定理，等边三角形的性质与判定，勾股定理等等，正确作出辅助线构造全等三角形是解题的关键.

27. 2023 年 5 月 30 日上午 9 点 31 分，神舟十六号载人飞船在酒泉发射中心发射升空，某中学组织毕业班的同学到当地电视台演播大厅观看现场直播，学校准备为同学们购进 A 、 B 两款文化衫，每件 A 款文化衫比每件 B 款文化衫多 10 元，用 500 元购进 A 款和用 400 元购进 B 款的文化衫的数量相同.

- (1) 求 A 款文化衫和 B 款文化衫每件各多少元？
- (2) 已知毕业班的同学一共有 300 人，学校计划用不多于 14800 元，不少于 14750 元购买文化衫，求有几种购买方案？
- (3) 在实际购买时，由于数量较多，商家让利销售， A 款七折优惠， B 款每件让利 m 元，采购人员发现 (2) 中的所有购买方案所需资金恰好相同，试求 m 值.

【答案】(1) A 款文化衫每件 50 元，则 B 款文化衫每件 40 元，

(2) 一共有六种购买方案

(3) $m = 5$

【解析】

【分析】(1) 设 A 款文化衫每件 x 元，则 B 款文化衫每件 $(x-10)$ 元，然后根据用 500 元购进 A 款和用 400 元购进 B 款的文化衫的数量相同列出方程求解即可；

(2) 设购买 A 款文化衫 a 件，则购买 B 款文化衫 $(300-a)$ 件，然后根据，学校计划用不多于 14800 元，不少于 14750 元购买文化衫列出不等式组求解即可；

(3) 设购买资金为 W 元，购买 A 款文化衫 a 件，则购买 B 款文化衫 $(300-a)$ 件，求出 $W = (m-5)a + 12000 - 300m$ ，根据 (2) 中的所有购买方案所需资金恰好相同，可得 W 的取值与 a 的值无关，由此即可求出 $m = 5$.

【小问 1 详解】

解：设 A 款文化衫每件 x 元，则 B 款文化衫每件 $(x-10)$ 元，

由题意得， $\frac{500}{x} = \frac{400}{x-10}$ ，

解得 $x = 50$ ，

检验，当 $x = 50$ 时， $x(x-10) \neq 0$ ，

$\therefore x = 50$ 是原方程的解，

$\therefore x - 10 = 40$ ，

$\therefore A$ 款文化衫每件 50 元，则 B 款文化衫每件 40 元，

答： A 款文化衫每件 50 元，则 B 款文化衫每件 40 元；

【小问 2 详解】

解：设购买 A 款文化衫 a 件，则购买 B 款文化衫 $(300 - a)$ 件，

由题意得， $14750 \leq 50a + 40(300 - a) \leq 14800$ ，

解得 $275 \leq a \leq 280$ ，

$\therefore a$ 是正整数，

$\therefore a$ 的取值可以为 275, 276, 277, 278, 279, 280，

$\therefore$ 一共有六种购买方案；

【小问 3 详解】

解：设购买资金为 W 元，购买 A 款文化衫 a 件，则购买 B 款文化衫 $(300 - a)$ 件，

由题意得， $W = 0.7 \times 50a + (40 - m)(300 - a)$

$= (m - 5)a + 12000 - 300m$ ，

$\therefore$ (2) 中的所有购买方案所需资金恰好相同，

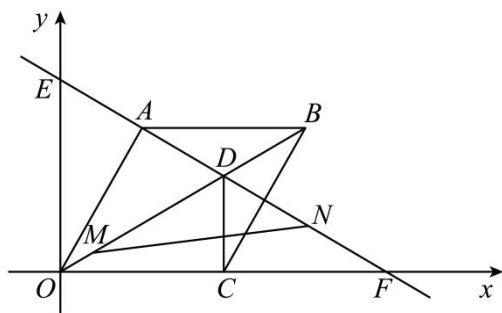
$\therefore W$ 的取值与 a 的值无关，

$\therefore m - 5 = 0$ ，

$\therefore m = 5$ 。

【点睛】 本题主要考查了一元一次不等式组的实际应用，分式方程的实际应用，整式的加减的实际应用，正确理解题意列出方程和不等式组是解题的关键。

28. 如图，在平面直角坐标系中，菱形 $AOCB$ 的边 OC 在 x 轴上， $\angle AOC = 60^\circ$ ， OC 的长是一元二次方程 $x^2 - 4x - 12 = 0$ 的根，过点 C 作 x 轴的垂线，交对角线 OB 于点 D ，直线 AD 分别交 x 轴和 y 轴于点 F 和点 E ，动点 M 从点 O 以每秒 1 个单位长度的速度沿 OD 向终点 D 运动，动点 N 从点 F 以每秒 2 个单位长度的速度沿 FE 向终点 E 运动。两点同时出发，设运动时间为 t 秒。



- (1) 求直线 AD 的解析式.
- (2) 连接 MN , 求 $\triangle MDN$ 的面积 S 与运动时间 t 的函数关系式.
- (3) 点 N 在运动的过程中, 在坐标平面内是否存在一点 Q , 使得以 A, C, N, Q 为顶点的四边形是矩形. 若存在, 直接写出点 Q 的坐标, 若不存在, 说明理由.

【答案】(1) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 4\sqrt{3}$;

(2) $S = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}t^2 - 9t + 12\sqrt{3} & (0 \leq t \leq 2\sqrt{3}) \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}t^2 + 9t - 12\sqrt{3} & (2\sqrt{3} < t \leq 4\sqrt{3}) \end{cases}$;

(3) 存在, 点 Q 的坐标是 $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ 或 $(6, 4\sqrt{3})$.

【解析】

【分析】(1) 过点 A 作 $AH \perp OC$ 于 H , 解方程可得 $OC=6$, 然后解直角三角形求出 CD 、 OH 和 AH 的长, 得到点 A 、 D 的坐标, 再利用待定系数法求出解析式即可;

(2) 首先证明 $\triangle EOD$ 是等边三角形, 求出 $DO = DF = 4\sqrt{3}$, 然后分情况讨论: ①当点 N 在 DF 上, 即 $0 \leq t \leq 2\sqrt{3}$ 时, 过点 N 作 $NP \perp OB$ 于 P , ②当点 N 在 DE 上, 即 $2\sqrt{3} < t \leq 4\sqrt{3}$ 时, 过点 N 作 $NT \perp OB$ 于 T , 分别解直角三角形求出 NP 和 NT , 再利用三角形面积公式列式即可;

(3) 分情况讨论: ①当 AN 是直角边时, 则 $CN \perp EF$, 过点 N 作 $NK \perp CF$ 于 K , 首先求出 CN , 然后解直角三角形求出 CK 和 NK , 再利用平移的性质得出点 Q 的坐标; ②当 AN 是对角线时, 则 $\angle ACN = 90^\circ$, 过点 N 作 $NL \perp CF$ 于 L , 证明 $\angle NCF = \angle NFC$, 可得 $CL = FL = 3$, 然后解直角三角形求出 NL , 再利用平移的性质得出点 Q 的坐标.

【小问 1 详解】

解: 解方程 $x^2 - 4x - 12 = 0$ 得: $x_1 = 6$, $x_2 = -2$,

$\therefore OC = 6$,

$\because$ 四边形 $AOCB$ 是菱形, $\angle AOC = 60^\circ$,

$$\therefore OA = OC = 6, \quad \angle BOC = \frac{1}{2} \angle AOC = 30^\circ,$$

$$\therefore CD = OC \cdot \tan 30^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore D(6, 2\sqrt{3}),$$

过点 A 作 $AH \perp OC$ 于 H ,

$$\therefore \angle AOH = 60^\circ,$$

$$\therefore OH = \frac{1}{2}OA = 3, \quad AH = OA \cdot \sin 60^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3},$$

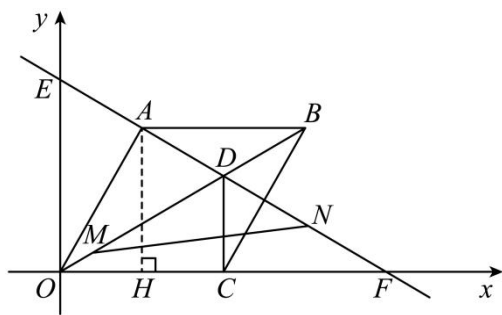
$$\therefore A(3, 3\sqrt{3}),$$

设直线 AD 的解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$,

$$\text{代入 } A(3, 3\sqrt{3}), D(6, 2\sqrt{3}) \text{ 得: } \begin{cases} 3k + b = 3\sqrt{3} \\ 6k + b = 2\sqrt{3} \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ b = 4\sqrt{3} \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } AD \text{ 的解析式为 } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 4\sqrt{3};$$



【小问 2 详解】

解: 由 (1) 知在 $\text{Rt}\triangle COD$ 中, $CD = 2\sqrt{3}$, $\angle DOC = 30^\circ$,

$$\therefore OD = 2CD = 4\sqrt{3}, \quad \angle EOD = 90^\circ - \angle DOC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ,$$

$\because$ 直线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 4\sqrt{3}$ 与 y 轴交于点 E ,

$$\therefore OE = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore OE = OD,$$

$\therefore \triangle EOD$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle OED = \angle EDO = \angle BDF = 60^\circ, \quad ED = OD = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore \angle OFE = 30^\circ = \angle DOF,$$

$$\therefore DO = DF = 4\sqrt{3},$$

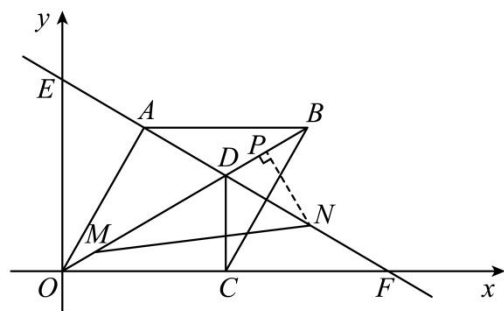
①当点 N 在 DF 上, 即 $0 \leq t \leq 2\sqrt{3}$ 时,

$$\text{由题意得: } DM = OD - OM = 4\sqrt{3} - t, \quad DN = 4\sqrt{3} - 2t,$$

过点 N 作 $NP \perp OB$ 于 P ,

$$\text{则 } NP = DN \cdot \sin \angle PDN = DN \cdot \sin 60^\circ = (4\sqrt{3} - 2t) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 - \sqrt{3}t,$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} DM \cdot NP = \frac{1}{2} (4\sqrt{3} - t) (6 - \sqrt{3}t) = \frac{\sqrt{3}}{2} t^2 - 9t + 12\sqrt{3};$$



②当点 N 在 DE 上, 即 $2\sqrt{3} < t \leq 4\sqrt{3}$ 时,

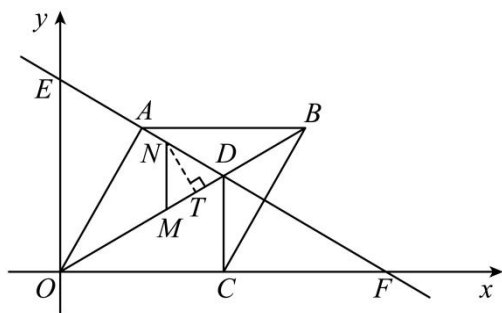
$$\text{由题意得: } DM = OD - OM = 4\sqrt{3} - t, \quad DN = 2t - 4\sqrt{3},$$

过点 N 作 $NT \perp OB$ 于 T ,

$$\text{则 } NT = DN \cdot \sin \angle NDT = DN \cdot \sin 60^\circ = (2t - 4\sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}t - 6,$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} DM \cdot NT = \frac{1}{2} (4\sqrt{3} - t) (\sqrt{3}t - 6) = -\frac{\sqrt{3}}{2} t^2 + 9t - 12\sqrt{3};$$

$$\text{综上, } S = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} t^2 - 9t + 12\sqrt{3} & (0 \leq t \leq 2\sqrt{3}) \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} t^2 + 9t - 12\sqrt{3} & (2\sqrt{3} < t \leq 4\sqrt{3}) \end{cases};$$



【小问 3 详解】

解：存在，分情况讨论：

①如图，当 AN 是直角边时，则 $CN \perp EF$ ，过点 N 作 $NK \perp CF$ 于 K ，

$$\therefore \angle NFC = 30^\circ, \quad OE = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore \angle NCK = 60^\circ, \quad OF = \sqrt{3}OE = 12,$$

$$\therefore CF = 12 - 6 = 6,$$

$$\therefore CN = \frac{1}{2}CF = 3,$$

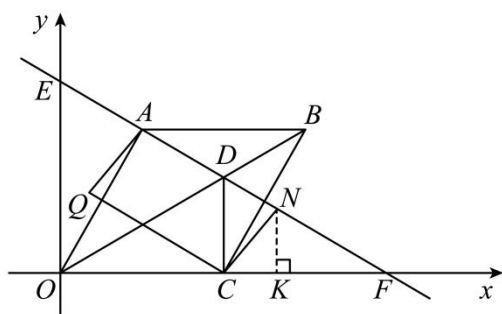
$$\therefore CK = CN \cdot \cos 60^\circ = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad NK = CN \cdot \sin 60^\circ = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$\therefore$ 将点 N 向左平移 $\frac{3}{2}$ 个单位长度，再向下平移 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 个单位长度得到点 C ，

$\therefore$ 将点 A 向左平移 $\frac{3}{2}$ 个单位长度，再向下平移 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 个单位长度得到点 Q ，

$$\therefore A(3, 3\sqrt{3}),$$

$$\therefore Q\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right);$$



②如图，当 AN 是对角线时，则 $\angle ACN = 90^\circ$ ，过点 N 作 $NL \perp CF$ 于 L ，

$$\therefore OA = OC, \quad \angle AOC = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle AOC$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle ACO = 60^\circ,$$

